SITZUNGSBERICHTE

DER KÖNIGL. BÖHMISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

JAHRGANG 1886.

Mit 27 Tafeln.

PRAG.

VERLAG DER KÖNIGL. BÖHM. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

1887.

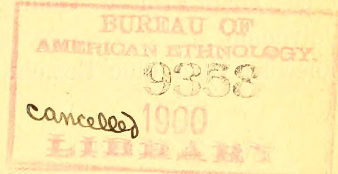
VĚSTNÍK

KRÁLOVSKÉ

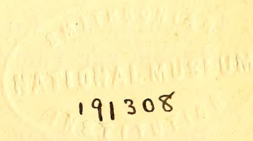
ČESKÉ SPOLEČNOSTI NAUK.

TŘÍDA MATHEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÁ.

ROČNÍK 1886.



S 27 tabulkami.



V PRAZE.

NÁKLADEM KRÁLOVSKÉ ČESKÉ SPOLEČNOSTI NAUK.

1887.

Verzeichniss der Vorträge,

welche in den Sitzungen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe

im Jahre 1886 abgehalten wurden.



Den 15. Januar.

Dr. Fr. J. Studnička: Über neue Eigenschaften der Kettenbruch-Determinanten.

Jos. Šolín: Über graphische Lösung der Gleichungen dritten Grades.

Dr. K. Vrba: Über den Cronstedtit aus Kuttenberg.

M. Lerch: Über Prof. F. Gomez Teixeiras aus Oporto „Legendrische Polynome".

M. Vaněček: Über eine Beziehung zwischen Subdeterminanten.

Den 29. Januar.

Dr. L. Čelakovský: Über die Resultate der botanischen Landesdurchforschung i. J. 1883.

F. Petr: 1. Beitrag zur Kenntniss der böhmischen Spongillen.
2. Nachträge zur Fauna der Süsswasserschwämme Böhmens.

Den 12. Februar.

Dr. K. Vrba: Studie über den böhmischen Stephanit.

Den 26. Februar.

F. Počta: Vorläufiger Bericht über Rudisten der böhmischen Kreideformation.

I.

Seznam přednášek

o zasedáních třídy mathematicko-přírodovědecké

roku 1886 konaných.

Dne 15. ledna.

Dr. Fr. J. Studnička: O nových vlastnostech determinantů řetězových.
Jos. Šolín: O grafickém řešení rovnic stupně třetího.
Dr. K. Vrba: O Cronstedtitu z Kutné Hory.
M. Lerch: O Legendrových polynomech prof. F. Gomeza Teixeiry v Oportě.
M. Vaněček: O souvislosti subdeterminantů.

Dne 29. ledna.

Dr. L. Čelakovský: O výsledcích botanického výzkumu v Čechách r. 1885.
F. Petr: 1. Příspěvek k poznání českých Spongillitů.
2. Dodatky k Fauně českých hub sladkovodních.

Dne 12. února.

Dr. K. Vrba: Studie o českém Stefanitu.

Dne 26. února.

Fr. Počta: Předběžná zpráva o rudistech českého útvaru křidového.

Den 12. März.

Dr. F. Augustin: Über die jährliche Periode der Luftströmungen.
Dr. Ot. Novák: Über böhmische Encrinuriden.

Den 26. März.

Dr. F. Vejdovský: Über die embryonale Entwickelung von Rhynchelmis (Euaxes).
Dr. K. Küpper: Über geometrische Netze.

Den 9. April.

A. Vávra: Über die Gesetzmässigkeit der materiellen Arbeit.
Dr. J. Palacký: Über die Verbreitung der Fische mit Beziehung auf Sauvage's Ansichten.
Jos. Tesař: Über die graphische Zusammensetzung der Kräfte und Drehungen im Raume.

Den 7. Mai.

Fr. Štolba und L. Zykán: Über chemische Arbeiten im Laboratorium der k. k. böhm. technischen Hochschule.
J. S. Vaněček: Über Kegelschnittsysteme zweiten Grades.
M. Lerch: Ein neuer Beweis einer Eigenschaft der Polynome von Legendre (aus einer brieflichen Mittheilung von F. Gomez Teixeira aus Oporto).
M. Pelíšek: Über perspectivische Restitution, Bewegung und Verzerrung.

Den 21. Mai.

Dr. V. Šafařík: Über die Veränderlichkeit einer Anzahl von Sternen.
Dr. J. Palacký: Über die Gränzen der Mittelmeervegetation in Frankreich.
M. Pelíšek: Über eine specielle, durch ein dioptrisches System bestimmte Raumcollineation.
J. S. Vaněček: Über ein Kegelschnittsystem $2n$-ter Stufe.

Den 4. Juni.

Dr. J. Palacký: Zur geolog. Geschichte der europäischen Fischfauna.
M. Lerch: Über elliptische Functionen.
Jos. Tesař: Die konische Loxodrome als Osculatrix.
M. Pelíšek: Über die Wirkungen perspectivischer Darstellungen.

Dne 12. března.

Dr. F. Augustin: O roční periodě směru větrů.
Dr. Ot. Novák: Studie o českých Enkrinuridech.

Dne 26. března.

Dr. Fr. Vejdovský: O embryonalním vývoji rodu Rhynchelmis (Euaxes).
Dr. K. Küpper: O sítích geometrických.

Dne 9. dubna:

A Vávra: O zákonnitosti hmotné práce.
Dr. J. Palacký: O rozšíření ryb s ohledem na náhledy Sauvage-ovy.
Jos. Tesař: O skládání sil a točení v prostoře.

Dne 7. května.

Fr. Štolba a L. Zykán: O chemických pracech v laboratorium c. k. české vysoké školy technické.
J. S. Vaněček: O osnově kuželoseček druhé mocnosti.
M. Lerch: Nový důkaz o jisté vlastnosti plynomů Legendrových (z dopisu F. Gomeza Teixeiry z Oporta).
M. Pelíšek: O perspektivní restitucí, pohybu a deformací.

Dne 21. května.

Dr. V. Šafařík: O měnivosti několika hvězd.
Dr. J. Palacký: O mezích středomořské vegetace ve Francii.
M. Pelíšek: O zvláštní, soustavou dioptrickou určené prostorné kollineaci.
J. S. Vaněček: O osnově kuželoseček $2n$-té mocnosti.

Dne 4. června.

Dr. J. Palacký: Ku geologické historii evropské rybí Fauny.
M. Lerch: O funkcích elliptických.
Jos. Tesař: Konická loxodromie jakožto křivka oskulační.
M. Pelíšek: O příčinách působivosti perspektivního zobrazování.

Den 25. Juni.

Dr. Fr. Studnička: Über die Resultate der ombrometrischen Beobachtungen in Böhmen.
M. Lerch: Über ein neues System der Arithmetik.
J. S. Vaněček: Über Kegelschnittslinien der $2n$-ten Ordnung.
M. Pelíšek: Grundzüge der Reliefperspective.
Fr. Sitenský: Vergleichung der holländischen und norddeutschen Torfe mit den böhmischen.

Den 2. Juli.

Dr. J. Krejčí: Krystallographische Bemerkungen zum Leucit, Staurolith, Phillipsit, Chalkanthit und Atinit.
J. Kušta: Weitere Beiträge zur Kenntniss der Steinkohlenflora von Rakonitz.
Dr. J. Palacký: Über die tropische Flora in Chihuahua in Mexico.
B. Katzer: Über thonige Einlagen in der silurischen Kalk-Etage G_1.
Dr. Fr. Vejdovský: Übersicht der Süsswasser-Schwämme Europas.
Em. Sekera: Beiträge zur Kenntniss der Süsswasser-Turbellarien.
Ant. Štolc: Studien zur Kenntniss der Naidomorphen.
Č. Šandera: Über einige neue, in Böhmen seltene Mollusken.

Den 15. October.

Dr. Ot. Novák: 1. Über die Ceratiocariden des böhm. Silurs.
2. Über Echinodermen der böhm. Kreide.
F. Machovec: Über die Eigenschaften des Axencomplexes der Flächen zweiten Grades.
Dr. A. Seydler: Über die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen verschiedener Grade bei gewissen Bewegungen.
Ant. Bělohoubek: Über die Resultate der Untersuchung der St. Günthersquelle im Badeorte Letin.
M. Lerch: Beitrag zur Theorie der Functionen.

Den 29. October.

Dr. J. Palacký: 1. Über die Fische von Neu-Seeland.
2. Über die Verbreitung der Fische auf der Erde.
M. Lerch: Über ein bestimmtes Integral.

Den 12. November.

Dr. L. Čelakovský: Über die morphologische Bedeutung der Cupula.
Dr. A. Seydler: Über Analogien zwischen Deformationen und Flächenkräften.

Dne 25. června.

Dr. Fr. Studnička: O výsledcích dešťoměrného pozorování v Čechách.
M. Lerch: O nové soustavě nauky arithmetické.
J. S. Vaněček: O svazku kuželoseček $2n$-té mocnosti.
M. Pelíšek: Základní reliefní perspektivy.
Fr. Sitenský: Srovnání hollandských a severoněmeckých rašelin s českými.

Dne 2. července.

Dr. J. Krejčí: Krystallografické poznámky k Leucitu, Staurolithu, Phillipsitu, Chalkanthitu a Atinitu.
J. Kušta: Další příspěvky k poznání Flory uhelné u Rakovníka.
Dr. J. Palacký: O tropické Floře v Chihuahua v Mexiku.
B. Katzer: O hlinitých vložkách do silurského váp. pásma G_1.
Dr. Fr. Vejdovský: Přehled sladkovodních hub evropských.
Em. Sekera: Příspěvky k poznání sladkovodních Turbellarií.
Ant. Štolc: Studium k poznání Naidomorfů.
Č. Šandera: O některých nových, pro Čechy vzácnějších měkkejších.

Dne 15. října.

Dr. Ot. Novák: 1. O Ceratiokaridech v českém Siluru.
2. O křidových Echinodermatech českých.
F. Machovec: O vlastnostech komplexu ploch druhého stupně.
Dr. A. Seydler: O rychlosti a urychleních různých stupňů při jistých pohybech.
Ant. Bělohoubek: O výsledcích výzkumu vody z pramene Sv. Vintíře v lázních Letínských.
N. Lerch: Příspěvek k theorii o funkcích.

Dne 29. října.

Dr. J. Palacký: 1. O rybách na Novém Zeelandě.
2. O rozšíření ryb vůbec.
M. Lerch: O jistém integrálu omezeném.

Dne 12. listopadu.

Dr. L. Čelakovský: O morfologickém významu kupule u pravých kupulifer.
Dr. A. Seydler: O analogiích mezi deformacemi a silami plošnými.

Dr. Ot. Novák: Über hercynische Typen im böhmischen Silur.
Dr. J. Velenovský: Über die Flora der böhm. Kreideformation.

Den 26. November.

Dr. K. Vrba: Über den Redruthit von Joachimsthal.
Dr. J. Palacký: Über die Bernsteinflora.
Fr. Štolba: Über seine neueren chemischen Arbeiten.

Den 10. Dezember.

Dr. K. Vrba: Über Parisit aus Neu Granada.
Dr. J. N. Woldřich: Über ein Feldspath-Lager bei Pisek.
V. Zahálka: Über eine neue Spongie aus der Kreideformation bei Raudnic.
A. Štolc: Beiträge zur Fauna des Böhmerwaldes.

Dr. Ot. Novák: O hercynských typech v Českém Siluru.
Dr. J. Velenovský: Přehled Flory českého útvaru křidového.

Dne 26. listopadu.

Dr. K. Vrba: O Redruthitu z Jáchymova.
Dr. J. Palacký: O jantarové Floře v severní Evropě.
Fr. Štolba: O svých novějších pracech chemických.

Dne 10. prosince.

Dr. K. Vrba: O Parisitu z Nové Granady.
Dr. J. N. Woldřich: O ložisku živce u Písku.
Č. Zahálka: O nové spongii z opuk Roudnických.
A. Štolc: Příspěvky k Fauně Šumavské.



VORTRÄGE

IN DEN SITZUNGEN

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE.

PŘEDNÁŠKY

V SEZENÍCH TŘÍDY

MATHEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÉ.

Nákladem král. české spol. nauk. — Tiskem dra. Edv. Grégra v Praze 1886.

1.

Eine neue Anwendung der Kettenbruchdeterminanten.

Vorgetragen von Prof. Dr. **Franz J. Studnička** am 15. Jänner 1886.

Nennt man die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x^2 + a_1 x + a_2 = 0, \tag{1}$$

wie gewöhnlich, x_1 und x_2, so ist bekanntlich

$$x_1^n + x_2^n = (-1)^n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix} \tag{2}$$

Für den Fall nun, dass

$$a_1 < 2a_2,$$

werden die beiden Wurzeln complex und somit

$$x_1 = a_2^{1/2} (\cos \varrho - i \sin \varrho),$$
$$x_2 = a_2^{1/2} (\cos \varrho + i \sin \varrho),$$

woraus einerseits folgt

$$-(x_1 + x_2) = a_1 = -2a_2^{1/2} \cos \varrho, \tag{3}$$

und anderseits Moivré's Theorem zufolge sich ergibt

$$x_1^n + x_2^n = 2a_2^{\frac{n}{2}} \cos n\varrho. \tag{4}$$

Setzen wir nun diese Werthe in die Formel (2) ein, so erhalten wir zunächst

$$2a_2^{\frac{n}{2}} \cos n\varrho =$$

$$=(-1)^n \begin{vmatrix} -2a_1^{1/2}\cos\varrho, & 1 & , & 0 & ,\dots & 0 \\ 2a_2 & , -2a_2^{1/2}\cos\varrho, & 1 & ,\dots & 0 \\ 0 & , a_2 & , -2a_2^{1/2}\cos\varrho, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & , 0 & , 0 & ,\dots - & 2a_2^{1/2}\cos\varrho \end{vmatrix},$$

oder wenn wir die Zeichen der Diagonalelemente ändern, den herausgehobenen gemeinschaftlichen Factor der ersten Colonne kürzen und die Elemente 1 transformiren,

$$a_2^{\frac{n}{2}} \cos n\varrho = \begin{vmatrix} a_2^{1/2}\cos\varrho, & a_2^{1/2} & , 0 & , 0, \dots, & 0 \\ a_2^{1/2} & , 2a_2^{1/2}\cos\varrho, & a_2^{1/2} & , 0, \dots, & 0 \\ 0 & , a_2^{1/2} & , 2a_2^{1/2}\cos\varrho, & a_2^{1/2}, \dots, & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & , 0 & , 0 & , 0, \dots, & 2a_2^{1/2}\cos\varrho \end{vmatrix}.$$

Nun enthält jede der n-Determinantenreihen $a_2^{1/2}$ als Factor, somit ist $a_2^{\frac{n}{2}}$ als Factor vor die Determinante zu setzen und dann zu kürzen, worauf endlich erhalten wird

$$\cos n\varrho = \begin{vmatrix} \cos\varrho, & 1 & , 0 & ,\dots, & 0 \\ 1 & , 2\cos\varrho, & 1 & ,\dots, & 0 \\ 0 & , 1 & , 2\cos\varrho, & \dots, & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & , 0 & , 0 & ,\dots, & 2\cos\varrho \end{vmatrix}, \qquad (5)$$

welche Formel $\cos n\varrho$ durch einen einfachen, für gerade und ungerade n geltenden Ausdruck, welcher nach den Potenzen von $\cos\varrho$ geordnet ist, darstellt.

Sollen wir nun die Determinante auswerthen, so kehren wir zur ursprünglichen Form (2) zurück und lösen sie, beachtend, dass das zweite Element der ersten Colonne

$$2a_2 = a_2 + a_2$$

ist, in zwei Kettenbruchdeterminanten auf, indem wir schreiben

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 \end{vmatrix},$$

oder kürzer, wenn die erste Kettenbruchdeterminante mit $\varDelta_n$ bezeichnet und die zweite vereinfacht wird,

$$D_n = \varDelta_n - a_2 \varDelta_{n-2}. \tag{6}$$

Nun ist nach meiner bekannten Formel*)

$$\varDelta_n = a_1^n - (n-1)_1\, a_2 a_1^{n-2} + (n-2)_2\, a_2^2 a_1^{n-4} - (n-3)_3\, a_2^3 a_1^{n-6} + \ldots$$

$$-a_2 \varDelta_{n-2} = \qquad - \qquad a_2 a_1^{n-2} + (n-3)_1\, a_2^2 a_1^{n-4} - (n-4)_2\, a_2^3 a_1^{n-6} + \ldots;$$

der Formel (6) entsprechend erhält man also, wenn berücksichtigt wird, dass

$$(n-k)_k + (n-k-1)_{k-1} = \frac{n}{k}\,(n-k-1)_{k-1}, \tag{7}$$

sofort den gesuchten Ausdruck

$$D_n = a_1^n - \frac{n}{1}\, a_2 a_1^{n-2} + \frac{n}{2}\,(n-3)_1\; a_2^2 a_1^{n-4} - \frac{n}{3}\,(n-4)_2\; a_2^3 a_1^{n-6} + \ldots \tag{8}$$

Weil nun der Formel (2) gemäss

$$x_1^n + x_2^n = (-1)^n\, D_n$$

und a_1 in Formel (8) mit Hilfe der Relation (3) durch a_2 ausgedrückt werden kann, so erhalten wir unter Verwendung der Formel (4) zunächst

$$\cos n\varrho = 2^{n-1} \cos^n \varrho - 2^{n-3} . \frac{n}{1} \cos^{n-2} \varrho + 2^{n-5} . \frac{n}{2}\,(n-3)_1 \cos^{n-4} \varrho -$$

$$- 2^{n-7} . \frac{n}{3}\,(n-4)_2 \cos^{n-6} \varrho + \ldots$$

und unter Beiziehung der Formel (5) endlich

$$\sum_{k=0} (-1)^k\, 2^{n-k-1} . \frac{n}{k}\,(n-k-1)_{k-1} \cos^{n-2k} \varrho =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varrho & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 2\cos\varrho & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\varrho & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2\cos\varrho \end{vmatrix} = \cos n\varrho, \tag{9}$$

---

*) Siehe „Sitzungsber. der kön. böhm. Ges. d. Wiss." 18. März 1872.

Dass für den speciellen Werth

$$\varrho = 0$$

die einfache Beziehung erhalten wird.

$$1 = \sum_{k=0} (-1)^k \, 2^{n-k-1} \, . \, \frac{n}{k} \, (n-k-1)_{k-1}, \qquad (10)$$

wobei, wie oben, für $k = 0$ der Binomialcoëfficient den Werth 1 erhalten soll, wollen wir nur berühren, ohne auf die besonderen Formeln einzugehen, welche sich aus der Relation (10) für geradgerade, gerade uud ungerade Werthe von n ergeben.

2.

Zur graphischen Auflösung numerischer Gleichungen dritten Grades.

Vorgetragen von Professor **Josef Šolin** am 15. Jänner 1886.

Mit 1 Tafel.

Die Construction der reellen Wurzeln einer numerischen Gleichung dritten Grades mittels einer festen Parabel ist wiederholt gezeigt worden.*) Dabei wurde eine reducirte Gleichung vorausgesetzt, nämlich eine solche, in welcher das Glied mit der zweiten Potenz der Unbekannten fehlt. Ich bin auf Grund des *Lill'schen* Verfahrens,**) auf welchem bekanntlich die beste graphische Auflösung von Gleichungen zweiten Grades beruht, zu einer sehr einfachen Auflösung der vollständigen Gleichung dritten Grades

(1) $$c_0\xi^3 + c_1\xi^2 + c_2\xi + c_3 = 0$$

gelangt, welche gleichfalls auf der Benützung einer festen Parabel sich gründet und im Folgenden auf geometrischem Wege entwickelt werden soll.

---

*) *Gergonne,* De la résolution des équations numériques du 3. degré, par la parabole ordinaire (Annales de Mathématiques pures et appliquées, 1818); *Hoppe,* Construction der reellen Wurzeln einer Gleichung 4. oder 3. Grades mittels einer festen Parabel (Archiv der Mathematik und Physik, 1874).

**) Siehe „*Lill,* Résolution graphique des équations numériques de tous les degrés à une seule inconnue et description d'un instrument inventé dans ce but (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1867)" — neb i „*Cremona,* Elementi di Calcolo grafico".

J. Šolín:



Fotolith. Farský in Prag.

Um die Gleichung (1), in welcher c_0, c_1, c_2, c_3 gegebene Strecken (gegeben der Grösse sowohl als auch dem Sinne, resp. dem Vorzeichen nach), ξ eine Zahl (als Verhältnis zweier Strecken aufgefasst bedeuten, geometrisch aufzulösen, construirt man nach Lill eine gebrochene Linie $c_0c_1c_2c_3c_4$ (Figur), deren je zwei auf einander folgende Seiten rechtwinklig sind und durch Grösse und Sinn den Coefficienten der Gleichung (1) in der Weise entsprechen, dass

$$\overline{c_0c_1} = c_0\,, \qquad \overline{c_1c_2} = c_1\,,$$
$$\overline{c_2c_3} = -c_2\,, \quad \overline{c_3c_4} = -c_3\,.$$

(Man thut da am besten, im Vorhinein zwei rechtwinklige Axen und in jeder derselben einen bestimmten Sinn als positiv anzunehmen; dann hat man die Strecken c_0, c_1 in demselben Sinne, welcher ihnen als Coefficienten der Gleichung (1) zukommt, dagegen die Strecken c_2, c_3 in dem entgegengesetzten Sinne aufzutragen.) Der gebrochenen Linie $c_0c_1c_2c_3c_4$ ist ferner eine zweite gebrochene Linie $n_0n_1n_2n_3$, deren je zwei auf einander folgende Seiten ebenfalls rechtwinklig sind, so einzuschreiben, dass der Anfangspunkt n_0 mit dem Anfangspunkte c_0, der Endpunkt n_3 mit dem Endpunkte c_4 zusammenfällt. Sodann ist das Verhältnis

$$\frac{\overline{n_1c_1}}{\overline{c_0c_1}} = \xi \tag{2}$$

eine Wurzel der gegebenen Gleichung (1).

Denkt man sich den rechten Winkel $n_0n_1n_2$ so bewegt, dass sein Scheitel n_1 stets auf c_1c_2 liege und der Schenkel n_0n_1 beständig durch c_0 gehe, so werden alle Lagen des Schenkels n_1n_2 von einer Parabel Γ umhüllt, welche den Punkt c_0 zum Brennpunkte, den Punkt c_1 zum Scheitel hat. Desgleichen denken wir uns den rechten Winkel $n_3n_2n_1$ so bewegt, dass dessen Scheitel n_2 auf c_3c_2 gleite, während der Schenkel n_3n_2 beständig durch c_4 geht, und gelangen zu einer zweiten, den Schenkel n_2n_1 umhüllenden Parabel Δ mit c_4 als Brennpunkt und c_3 als Scheitel.

Man sieht sofort, dass die Seite n_1n_2 der zu construirenden Linie $n_0n_1n_2n_3$ beide Parabeln Γ, Δ berühren muss, und die geometrische Lösung der Aufgabe ist auf die Construction der drei im Endlichen liegenden gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Parabeln Γ, Δ zurückgeführt.

Sind T_1, T_2, T_3 diese Tangenten, ferner U_∞ die unendlich ferne Gerade der Ebene, also die vierte gemeinschaftliche Tangente von

Γ, $\varDelta$, so bestimmen die Punkte $(T_2 T_3)$, $(T_1 U_\infty)$ die Gerade X, welche offenbar zu T_1 parallel ist und eine Seite des den beiden Parabeln gemeinschaftlichen Poldreieckes bildet; eben so bestimmen die Punkte $(T_1 T_3)$, $(T_2 U_\infty)$ die zweite zu T_2 parallele Seite Y und endlich $(T_1 T_2)$, $(T_3 U_\infty)$ die dritte, zu T_3 parallele Seite Z des gemeinschaftlichen Poldreieckes. Man sieht ohne Weiteres, dass die (begrenzten) Seiten des gemeinschaftlichen Poldreieckes XYZ von den Eckpunkten des Tangentendreieckes $T_1 T_2 T_3$ halbirt werden.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, das gemeinschaftliche Poldreieck der beiden Parabeln Γ, $\varDelta$ zu construiren. Dabei möge die Axe $c_0 c_1$ von Γ kürzer mit A, die Axe $c_3 c_4$ von $\varDelta$ kürzer mit B, der Schnittpunkt von A, B mit o bezeichnet werden.

Zur Construction des gemeinschaftlichen Poldreieckes benützen wir den bekannten Satz, dass die Punkte q', welche den Punkten q einer Geraden P in Bezug auf zwei Kegelschnitte Γ, $\varDelta$ zugleich conjugirt sind, auf einem Kegelschnitte liegen, welcher durch die Eckpunkte x, y, z des gemeinschaftlichen Poldreieckes hindurchgeht. Die den sämmtlichen Geraden P der Ebene in dieser Weise entsprechenden Kegelschnitte bilden ein Netz mit den Grundpunkten x, y, z, und diese Punkte können mittels zweier beliebigen Kegelschnitte des Netzes construirt werden. Wir wollen dazu den Kreis K und eine von den Parabeln des Netzes benützen.

Um die Gerade P_k zu finden, welcher der Kreis K des Netzes (xyz) als Ort der den Punkten von P_k in Bezug auf beide Parabeln Γ, $\varDelta$ conjugirten Punkte entspricht, nehmen wir auf der unendlich fernen Geraden zwei Punktepaare der involutorischen Punktreihe an, welche die imaginären Kreispunkte zu Doppelpunkten hat. Wir wählen dazu die unendlich fernen Punkte u_∞, v_∞ der Axen A, B, sodann die unendlich fernen Punkte i_∞, j_∞ derjenigen beiden Stralen, welche die rechten Winkel von A, B halbiren. Den Punkten u_∞, v_∞ sind in Bezug auf Γ, $\varDelta$ beziehungsweise die Punkte v_∞, u_∞ conjugirt. Ist $\begin{Bmatrix} G \\ H \end{Bmatrix}$ die Directrix der Parabel $\begin{Bmatrix} \Gamma \\ \varDelta \end{Bmatrix}$, ferner $\begin{Bmatrix} g \\ h \end{Bmatrix}$ der Schnittpunkt der Directrix mit der Axe $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$, und denken wir uns auf die Directrix zu beiden Seiten des Punktes $\begin{Bmatrix} g \\ h \end{Bmatrix}$ die Strecke $\begin{Bmatrix} c_0 g \\ c_4 h \end{Bmatrix}$, also nach $\begin{Bmatrix} gg' \\ hh' \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} gg'' \\ hh'' \end{Bmatrix}$ aufgetragen (siehe die Figur), so dass z. B. $c_0 g'$ zu $c_4 h'$, $c_0 g''$ zu $c_4 h''$ parallel ist, dann gehen die beiden erstgenannten

Stralen z. B. durch den Punkt i_∞, die beiden letztgenannten durch den Punkt j_∞; dem Punkte $\begin{Bmatrix} i_\infty \\ j_\infty \end{Bmatrix}$ ist in Bezug auf Γ, $\varDelta$ der Schnittpunkt $\begin{Bmatrix} i' \\ j' \end{Bmatrix}$ des durch $\begin{Bmatrix} g'' \\ g' \end{Bmatrix}$ gehenden Durchmessers von Γ mit dem durch $\begin{Bmatrix} h'' \\ h' \end{Bmatrix}$ gehenden Durchmesser von $\varDelta$ conjugirt. Der involutorischen Punktreihe $(u_\infty v_\infty, i_\infty j_\infty, \ldots)$, deren Träger die Gerade U_∞ ist, entspricht ein involutorisches Punktsystem $(v_\infty u_\infty, i'j', \ldots)$, auf dem der Geraden U_∞ entsprechenden Kegelschnitte Υ des Netzes (xyz). (Dieser Kegelschnitt ist offenbar eine Hyperbel mit den Asymptoten A, B.) Die Stralen $\begin{Bmatrix} v_\infty i', & u_\infty j' \\ v_\infty j', & u_\infty i' \end{Bmatrix}$ schneiden sich in dem Punkte $\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$, und diese Punkte bestimmen die gesuchte Gerade P_k als Involutionsaxe des Punktsystemes auf dem Kegelschnitte Υ. Man sieht, dass die Gerade P_k durch den Schnittpunkt o der Axen A, B gehen muss.

Trägt man auf die Axe $\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix}$ die Strecke $\begin{Bmatrix} oc_1 \\ oc_3 \end{Bmatrix}$ in demselben Sinne nach $\begin{Bmatrix} c_1 a \\ c_3 b \end{Bmatrix}$ auf und führt durch $\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$ eine zu $\begin{Bmatrix} B \\ A \end{Bmatrix}$ parallele Gerade, so erhält man die Polare von o in Bezug auf $\begin{Bmatrix} \Gamma \\ \varDelta \end{Bmatrix}$. Beide Polaren schneiden sich in dem Punkte o', welcher dem Punkte o von P_k entspricht und daher ein Punkt des Kreises K ist. Durch den Punkt o' ist der Kreis K bestimmt, da nach einem bekannten Satze der Schnittpunkt s der beiden Directricen G, H der Mittelpunkt des Kreises ist, welcher dem gemeinschaftlichen Poldreiecke der beiden Parabeln Γ, $\varDelta$ umschrieben werden kann.

Den Tangenten des Kegelschnittes Υ entsprechen in dem Netze $(x\ y\ z)$ Parabeln; wir wollen zur Construction von x, y, z eine von den beiden Parabeln verwenden, welche den Asymptoten A, B von Υ entsprechen.

Wenn wir z. B. die der Geraden B entsprechende Parabel Π dazu wählen, so ist auch schon deren unendlich ferner Punkt u_∞ (dem Punkte v_∞ von B conjugirt), ferner der Punkt o' (dem Punkte o von B conjugirt) gegeben. Der oben erwähnte Punkt a gehört ebenfalls der Parabel Π an, weil der ihm conjugirte Punkt a' auf der Polare B von a in Bezug auf Γ liegt. (Offenbar fällt a' mit dem

ebenfalls schon oben erwähnten Punkte b zusammen.) Die Scheiteltangente c_3c_2 von $\varDelta$ ist die Axe von Π, da sie die Sehne $\overline{ao'}$ von Π halbirt und zu derselben rechtwinklig ist. Wir wollen diese Axe kurz mit C bezeichnen.

Der dem Punkte c_3 in Bezug auf Γ, $\varDelta$ conjugirte Punkt — wir wollen ihn e nennen — liegt auf der Polare C von c_3 in Bezug auf $\varDelta$; e ist somit der Scheitel von Π. Der Punkt e liegt überdies auf der Polare von c_3 in Bezug auf Γ; da nun c_3 auf den Geraden B, C liegt, muss seine Polare durch die Pole von B, C gehen. Der Pol von B ist der Punkt a, der Pol von C ist der unendlich ferne Punkt aller zu c_0d rechtwinkligen Stralen, wenn d den Schnittpunkt von C mit der Directrix G bedeutet. Man hat daher bloss $ae \perp c_0d$ zu führen, um den Scheitel e von Π zu erhalten.

Aus den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken c_0gd und ame (wo m den Schnittpunkt der Axe C von Π mit der Sehne ao' bedeutet) folgt mit Rücksicht auf Grösse und Sinn*)

$$\frac{\overline{am}}{\overline{me}} = -\frac{\overline{c_0g}}{\overline{gd}}$$

oder

(3) $$\overline{am}^2 = \overline{c_0g} \,.\, \overline{em}.$$

Der Quotient

$$\frac{\overline{am}^2}{\overline{em}} = \overline{c_0g}$$

gibt den Parameter $2\,p$ von Π an; somit ist

$$2\,p = 2\,\overline{c_0c_1} = 2\,c_0,$$
$$p = c_0.$$

Denken wir uns den Kreis K und die Parabel Π dargestellt; die beiden Curven schneiden sich in dem Punkte o' und in weiteren drei Punkten, welche die gesuchten Eckpunkte x, y, z des gemeinschaftlichen Poldreieckes von Γ, $\varDelta$ sind. Jede der gemeinschaftlichen Tangenten T_1, T_2, T_3 ist parallel zu der entsprechenden Seite yz, xz, xy des Poldreieckes und halbirt die Entfernung des bezüglichen

*) Bei rechtwinkligen ähnlichen Dreiecken abc, $a'b'c'$, deren entsprechende Seiten zu einander rechtwinklig sind, haben die Verhältnisse $\frac{\overline{ac}}{\overline{cb}}$, $\frac{\overline{a'c'}}{\overline{c'b'}}$ der Katheten oder vielmehr die Producte $\overline{ac}\,.\,\overline{c'b'}$, $\overline{cb}\,.\,\overline{a'c'}$ gleiche Grösse aber entgegengesetzte Vorzeichen.

Punktes x, y, z von der gegenüberliegenden Seite yz, xz, xy oder X, Y, Z.

Von den Punkten x, y, z ist einer jedenfalls reell; die beiden übrigen können auch imaginär sein. Wir wollen insbesondere die vollständige Lösung dieses Falles, welche offenbar auch auf den Fall von drei reellen Punkten x, y, z angewendet werden kann, in's Auge fassen.

Es handelt sich darum, aus dem construirten Punkte x zunächst die Gegenseite X des gemeinschaftlichen Poldreieckes von Γ, Δ und daraus die gemeinschaftliche Tangente T_1 dieser Kegelschnitte abzuleiten. Wir bestimmen X als die Polare von x in Bezug auf einen der beiden Kegelschnitte Γ, Δ. Da die beiden gemeinschaftlichen Secanten xo', X des Kreises K und der Parabel Π mit der Parabelaxe C gleiche Winkel entgegengesetzten Sinnes einschliessen, brauchen wir bloss einen einzigen Punkt von X, z. B. den Pol t des durch x rechtwinklig zu C gehenden Strales in Bezug auf Γ zu bestimmen. Der Punkt t liegt auf der Axe A von Γ und ist von der Scheiteltangente c_1c_2 dieser Parabel eben so weit entfernt wie der Punkt x, jedoch nach der entgegengesetzten Seite. Daraus folgt, dass der Halbirungspunkt der Strecke $\overline{xt}$ auf c_1c_2 liegen muss. Durch diesen Halbirungspunkt geht die gesuchte gemeinschaftliche Tangente T_1 von Γ, Δ; der Schnittpunkt von T_1 mit c_1c_2, d. i. der eben erwähnte Halbirungspunkt von $\overline{xt}$, bestimmt aber eben die gesuchte Wurzel der Gleichung (1), wie dies durch die Gleichung (2) ausgedrückt wurde. Da überdies die Strecke n_1c_1 gleich ist der halben Entfernung des Punktes x von der Geraden A, braucht man die Gerade xt und daher auch den Punkt t gar nicht zu suchen und kann sagen, dass die fragliche Wurzel durch das Verhältnis der halben Entfernung $\overline{xA}$ zur Strecke $\overline{c_0c_1} = c_0$ gegeben ist.

Müsste man zur Auflösung jeder besonderen Gleichung (1) die Parabel Π besonders zeichnen, so würde die abgeleitete Construction keine besonderen Vortheile gewähren. Man braucht aber nur zu berücksichtigen, dass die Parabel Π den Parameter $2c_0$ hat und daher, von der Lage abgesehen, lediglich von dem Coefficienten c_0 der Gleichung (1) abhängt. Sie kann daher im Vorhinein gezeichnet und zur graphischen Auflösung aller Gleichungen (1), in welchen das höchste Glied den Coefficienten c_0 hat, verwendet werden. Da man nun jede Gleichung (1), welche statt c_0 den Coefficienten c'_0 hätte, durch Multiplication sämmtlicher Glieder mit dem Verhältnisse $\frac{c_0}{c'_0}$ auf die eben

erwähnte Form bringen kann, so kann eine und dieselbe Parabel Π zur Auflösung sämmtlicher Gleichungen (1) verwendet werden. Zur Auflösung von Zahlengleichungen wird man c_0 als Längeneinheit des Massstabes, welcher der Parabel Π beizufügen ist, wählen; die numerischen Coefficienten der zu lösenden Gleichung

$$\xi^3 + \gamma_1 \xi^2 + \gamma_2 \xi + \gamma_3 = 0$$

drücken dann die Verhältnisse der Strecken c_1, c_2, c_3 zu der angenommenen Grundstrecke c_0 aus; erstere können auf dem Massstabe ohne Weiteres abgegriffen werden.

Denken wir uns also die Parabel Π vom Parameter $2c_0$ dargestellt. Diese Parabel, mit dem entsprechenden Massstabe versehen, bildet dann eine graphische Tafel zur Auflösung von Gleichungen dritten Grades überhaupt. Liegt eine bestimmte Gleichung vor, so handelt es sich lediglich darum, den Kreis K und die Gerade A in der entsprechenden Lage zu der Parabel Π zu zeichnen. Wie dies zu geschehen hat, ist aus dem Vorhergehenden bekannt. Reducirt man die vorzunehmenden Operationen auf das Nothwendigste, so ergibt sich die folgende Construction:

1. Man construire die Hauptsehne ao' der Parabel Π derart, dass $\overline{mo'} = -\overline{ma} = c_1$ sei; dadurch erhält man den Punkt o' und die Gerade A. (Zur Controlle kann man unabhängig von der Parabel Π die Strecke

$$\overline{em} = \frac{\overline{am}^2}{c_0 g} = \frac{c_1^2}{2\,c_0},$$

d. h. die dritte Proportionale zu c_1, $2c_0$ construiren.)

2. Von dem Punkte m trage man auf die Axe C die Strecke $\overline{md} = -c_2 + c_0$ und rechtwinklig dazu die Strecke $\overline{ds} = c_3$ auf; dadurch erhält man den Mittelpunkt s des Kreises K, welcher überdies durch den Punkt o' geht.

3. Durch diesen Kreis schneide man die Parabel Π in dem Punkte $x, \ldots$; das Verhältnis der halben Entfernung $\overline{xA}, \ldots$*) — gemessen vom Punkte $x, \ldots$ zu der Geraden A — zur Grundstrecke c_0 ist dann die gesuchte Wurzel der Gleichung (1).

Bei numerischen Gleichungen ist die Wurzel gleich der Zahl, welche der halben Entfernung $\overline{xA}$ auf dem Massstabe entspricht, mit dem durch den Sinn jener Entfernung bestimmten Vorzeichen.

---

*) Statt der halben Entfernung $\overline{xA}$ kann man offenbar auch die Entfernung des Halbirungspunktes der Strecke $\overline{xo'}$ von der Axe C setzen.

Anmerkung. Sehr einfach gestaltet sich in dieser Weise die Construction der Cubicwurzeln aus gegebenen Zahlen. Die Gleichung

$$\xi = \sqrt[3]{\gamma}$$

geht aus (1) hervor, wenn

$$c_1 = c_2 = 0, \quad \gamma = -\frac{c_3}{c_0}$$

gesetzt wird. Sodann ist

$$\overline{mo'} = -\overline{ma} = 0, \quad \overline{md} = \overline{ed} = c_0,$$
$$\overline{ds} = c_3 = -\gamma \cdot c_0;$$

man hat also bloss auf die Gerade, welche rechtwinklig zur Axe C der Parabel Π in der Entfernung $\overline{ed} = c_0$ vom Scheitel e geführt wird, eine Strecke $\overline{ds}$ aufzutragen, welche nach dem Massstabe dem gegebenen Radicanden γ entspricht, u. z., wenn man auch das Vorzeichen berücksichtigen will, nach der $\left\{\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right\}$ Richtung, wenn $\gamma \left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}\right\}$ ist, und mittels eines aus dem Centrum s beschriebenen, durch den Parabelscheitel e gehenden Kreises die Parabel in einem Punkte x zu schneiden. Die Zahl, welche der Entfernung des Punktes x von der Parabelaxe entspricht, ist der doppelten Cubicwurzel gleich.

3.

Vorläufige Notiz über den Cronstedtit von Kuttenberg.

Vorgetragen von **Karl Vrba** am 15. Jänner 1886.

(*Mit einer Tafel*).

Anfang Oktober v. J. erhielt ich von befreundeter Seite eine kleine Probe eines schwarzen, faserig-stengligen Minerales zur Bestimmung, das ich sofort als Cronstedtit erkannte und wegen der begleitenden Minerale für Cornwaller Provenienz hielt. Einige Wochen später verbreitete sich das unbestimmte Gerücht, dass in Kuttenberg Cronstedtit vorgekommen sein soll, was mir jedoch wenig glaubwürdig erschien. Als mir aber nach etlichen Tagen mein Freund Herr A. Waldhauser ein kleines Kuttenberger Stückchen vorwies, auf

welchem, wenn auch nur Spuren besagten Minerales vorhanden waren, war ich eines besseren belehrt.

Die Vermuthung, dass die vor mehreren Wochen ohne Angabe des Fundortes erhaltene Probe auch von Kuttenberg stamme, fand später die volle Bestätigung.

Auf mein Ansuchen haben mir Herr Hofrath F. M. Ritter von Friese, Referent der Montanwerke im Ackerbauministerium, dem ich schon vielfach kostbares Material verdanke, und Herr Hofrath E. Jarolimek, Bergdirector in Přibram, von der gesammten Kuttenberger Cronstedtit-Ausbeute alle jene Stücke zur Verfügung gestellt, die ich zur Untersuchung dieses seltenen, nun von der zweiten böhmischen Localität bekannten Minerales als wünschenswerth bezeichnet habe und fühle ich mich daher beiden genannten Herren zu ganz besonderem Danke verpflichtet.

An den meisten der mir vorliegenden, vom Magdalenen- oder Reussengange im 14 Nothhelferstollen stammenden Stücken bildet der Cronstedtit theils radial- theils verworren faserige und stenglige Aggregate von tiefschwarzer Farbe, die auf kleinkrystallisirtem, schmutzig graulichweissem oder gelblichem undurchsichtigen Quarz, oder auf einem körnigen Gemenge von Quarz, Pyrit und Blende nebst spärlichem Galenit und Glimmer, gewöhnlich nicht sehr reich aufsitzen. Die Stengel sind ziemlich stark parallel ihrer Längsrichtung gerieft und an ihrer Oberfläche nur schwach schimmernd oder fast ganz glanzlos; mitunter sind dieselben mit einem hauchdünnen, bläulichgrauen oder gelblichen, mehligen Überzug versehen. Immer erglänzen zahlreiche, intensiv schwarze, meist schwach convexe oder concave Spaltflächen, die gewöhnlich einen scharfen dreiseitigen Umriss zeigen aber auch sechsseitig oder recht häufig rundlich umgrenzt sind. An der, den äusseren Contouren paralell verlaufenden Zeichnung kann man den schalenförmigen Aufbau der Stengel gleich wie am Přibramer Mineral recht deutlich erkennen. An zwei der mir vorliegenden Exemplare ist der Cronstedtit in grösserer Menge, dem unbewaffneten Auge aber fast nur erdig vorkommend, aufgewachsen, aber auch diese Stücke zeigen unter der Loupe radialfaserige, reichlich mit Pyrit durchwachsene und von Quarzkrusten unterbrochene Aggregate, die concentrischschalig abgesondert sind.

Deutliche, meist nur sehr kleine Kryställchen sind nicht selten; theils sitzen dieselben zwischen den wirr durcheinander gewachsenen Stengeln, theils bilden sie kleine Drusen oder drusige, zusammenhängende Krusten, die auch häufig derben Quarz überrinden. Die ver-

hältnissmässig besten Kryställchen, sowohl einzeln als auch zu Drusen geeint, habe ich als jüngere Bildung auf Pyritkrystalle tragenden kleinen pelluciden Quarzdrusen gefunden. Seltener ist der Cronstedtit mit Siderit vergesellschaftet und in diesem Falle zum Theil von gleichzeitiger Bildung. Eines von meinen Stücken zeigt eine Druse kleiner Spatheisenrhomboeder, zwischen denen einzelne Cronstedtitkryställchen sowie ganze Gruppen derselben mit dem unteren Ende eingewachsen, oben frei hervorragen; der begleitende Pyrit ist zum Theil bunt angelaufen.

Die Cronstedtit-Kryställchen besitzen die bekannte hemimorphe Rhomboederform, — Fig 1. —. Eine nette Gruppe zeigt sämmtliche Kryställchen mit dem unteren Ende aufsitzend, während recht häufig in anderen Fällen auch das umgekehrte Verhältniss beobachtet wird.

Die Endflächen sind, sofern nicht Spaltflächen, die, wie schon erwähnt, convex oder concav gewölbt zu sein pflegen recht eben und ziemlich glänzend; die Rhomboederflächen, nach denen gleich den Přibramer und Cornwaller auch die Kuttenberger Krystalle schalenförmigen Aufbau zeigen, sind stets recht stark in einer gegen die Polkante etwas geneigten Richtung gerieft, ausserdem aber auch horizontal gewellt. Die Endfläche giebt am Goniometer häufig einheitliche Reflexe, ohne aber das Fadenkreuz des Collimators zu spiegeln, die Rhomboederflächen konnten nur bei vorgesetzter Loupe am Beobachtungsfernrohre auf den intensivsten Reflex eingestellt werden, wesswegen die Messungen durchwegs nur als approximativ bezeichnet werden müssen.

Die Resultate der Beobachtungen, die ich an einigen Kryställchen gewonnen habe, weichen ziemlich bedeutend von einander ab. Wenn auch, wie schon mehrfach erwähnt, die Kryställchen schon wegen ihrer geringen Ausdehnung — häufig nur $^1/_3$ bis $^1/_2$ mm Höhe und Breite — und ihrer ungünstigen Flächenbeschaffenheit für goniometrische Untersuchungen keineswegs ein geeignetes Materiale bieten, können doch die an einzelnen Krystallen erhaltenen Abweichungen nicht lediglich als Beobachtungsfehler angesehen werden, sondern müssen in der mangelhaften Bauweise der Krystalle selbst begründet sein.

Ich will es vorläufig unterlassen, hier meine Beobachtungen an den einzelnen gemessenen Kryställchen anzuführen und behalte mir vor, über dieselben zu berichten, bis eine grössere Reihe derselben gemessen sein wird, nur die an dem verhältnissmässig best gebildeten $^1/_3$ mm grossen Kryställchen gewonnenen Winkelwerthe mögen hier Platz finden.

r	$: c$	82° 25′	(Mittel von 3 Bestimmungen)
	$: \underline{c}$	97° 34′	„ „ „ „
r'	$: c$	82° 17′	„ „ „ „
	$: \underline{c}$	97° 53′	„ „ „ „
r''	$: c$	82° 31′	„ „ „ „
	$: \underline{c}$	97° 33′	„ „ „ „
r	$: r'$	119° 50′	„ „ „ „

Nimmt man nach von Zepharovich*) das Grundrhomboeder Maskelyne's**) für $3R = 30\bar{3}1$ also den Werth der Hauptaxe

$$c = 3{\cdot}439$$

so ergiebt die Rechnung $\frac{h}{i} = 1.898$, welchen Werth man in Anbetracht der ungünstigen Flächenbeschaffenheit $= 2$ setzen kann und wäre sonach das beobachtete Rhomboeder $2R = 20\bar{2}1$ und

c 0001 : r $20\bar{2}1$	82° 49½′	(gef. Mttl.	82° 26⅓′)
$\underline{c}$ $000\bar{1}$: r $20\bar{2}1$	97° 10½′	(„ „	97° 40′)
$\underline{r}$ $20\bar{2}1$: r' $\bar{2}201$	119° 8½′	(„ „	119° 50′)

Eine bessere Übereinstimmung der gefundenen und theoretisch abgeleiteten Winkelwerthe erzielt man, wenn man Zepharovich's Mittelwerth

$$c\ 0001 : 3R\ 30\bar{3}1 = 84^{\circ}\ 56'$$

der Rechnung zu Grunde legt;***) es resultirt

$$c = 3.2559 \text{ und}$$

c 0001 : r $20\bar{2}1$	82° 25½′	(gef.	82° 26⅓′)
$\underline{c}$ $000\bar{1}$: r $20\bar{2}1$	97° 34½′	(„	97° 40′)
$\bar{r}$ $20\bar{2}1$: r' $\bar{2}201$	119° 3′	(„	119° 50′)

Während die beobachteten und berechneten Neigungswinkel für $r : c$ und $r : \underline{c}$ recht befriedigend übereinstimmen, weicht der beobachtete Werth der Polkante von dem gerechneten ziemlich ansehnlich ab,

---

*) Sitzber d. Wiener Acad. d. Wiss. math. nat. Cl. LXXI Bd. 1. Abth. 1875 Aprilheft.

**) Journal of the chem. society I. 1871.

***) a. a. O.

K. VRBA: CRONSTEDTIT VON KUTTENBERG.

Fig. 1.

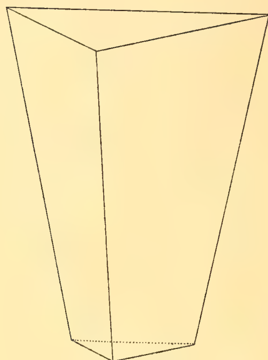


Fig. 2.

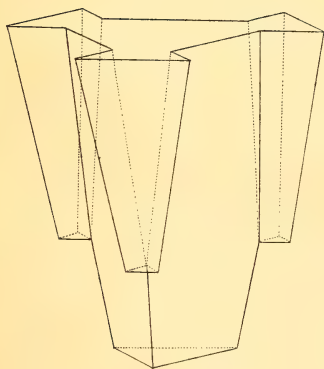
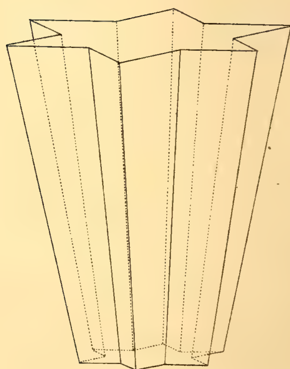


Fig. 3.



Lith. Farský Prag.

doch darf diess bei der so ungünstigen Flächenbeschaffenheit nicht besonders befremden; auch an Příbramer Krystallen differirt die X-Kante des von Zepharovich bestimmten Skalenoeders $^1/_4 R^9/_2$ (11. 7. $\overline{18}$. 36) mehr als $1^1/_3{}^0$ vom gerechneten Winkelwerth, während die Differenzen der Y- und Z-Kante weit geringer sind *).

Recht häufig gewahrt man unter den gruppenweise aufgewachsenen Krystallen Zwillinge, wie solche bereits von Zepharovich am Příbramer, von Markelyne am Cornwaller Cronstedtit beobachtet wurden; zwei Individuen, deren Endflächen in eine Ebene fallen, sind in ∞P 10$\overline{1}$0 symmetrisch verwachsen. Einmal beobachtete ich eine Repetition dieser Verwachsung, indem an jeder Kante des Hauptindividuums ein kleines Kryställchen in verkehrter Stellung angewachsen ist — Fig. 2. —. Auch penetriren mitunter die beiden Individuen in der Richtung der Hauptaxe, wodurch die Basis eine sternförmige Gestalt erhält. Fig. 3. Regellose Verwachsungen mehrerer Kryställchen sind eine häufige Erscheinung.

Die Härte des Kuttenberger Cronstedtit ist etwas höher als jene des Příbramer, etwa gleich der des Cornwaller Minerales, auch erweist er sich etwas spröder und ist im Striche dünkler grün als der erstgenannte, selbst in recht dünnen Lamellen ist er vollkommen undurchsichtig, während Příbramer Lamellen schwach grünlich durchscheinen.

Das Eigengewicht bestimmte ich (mit 0·73 und 1.2 grm bei 15° C) gleich 3.47 und 3.42 also im Mittel 3.445, es übersteigt sonach um mehr als 0·1 die Zahl, welche ich früher und nun neuerdings behufs Vergleichung mit Příbramer Material erhielt **).

Auf mein Ansuchen hat Herr Prof. K. Preis durch den Assistenten Herrn Otto Rosam im Laboratorium der böhmischen technischen Hochschule eine quantitative Analyse des von mir sorgfältigst ausgesuchten, vollkommen reinen Minerales vornehmen lassen.***) Das fein gepulverte Mineral wurde zum Behufe der *FeO*-Bestimmung in einer zugeschmolzenen Glasröhe mittelst Schwefelsäure aufgeschlossen und dasselbe mittelst Chamelaeon titrirt. In einer gesonderten Probe wurde die Kieselsäure und das Gesammteisen als Fe_2O_3 sowie auch Mangan bestimmt. Bei der direkten Wasserbestimmung ist leider

*) a. a. O.

**) Vergl. v. Zepharovich a. a. O. 3.335 (mit 1.14 gr); der neue Versuch ergab 3.338 (mit 0.92 gr).

***) Es wurden nur Kryställchen verwendet.

die Glasröhre gesprungen, so dass wegen Mangel an gleich reinem Material der dem Wasser zukommende Percentsatz der Differenz entnommen werden musste.

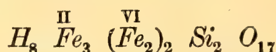
Die durch Herrn O. Rosam gewonnenen Zahlen weichen von jenen, die Damour*) und Janovsky**) bei der Zerlegung des Cronstedtit von Přibram erhielten, ziemlich bedeutend ab, nähern sich jedoch, wenigstens theilweise, den procentischen Werthen, welche Flight***) für das Cornwaller Vorkommen angiebt.

Ausser der unten angeführten ist noch eine zweite Zerlegung des Kuttenberger Minerales durch Herrn Dr. G. Dietrich im Hüttenlaboratorium zu Přibram vorgenommen worden, über welche der genannte Herr wohl nächstens berichten wird. Die Dietrich'schen Zahlen stimmen, soweit sie mir bekannt wurden, nur bezüglich SiO_2, hier aber bis auf 0·01 vollkommen überein, die übrigen Bestandtheile weisen namhafte Differenzen auf†).

Rosam's Analyse ergab nachstehende Zahlen:

			Quotienten:
SiO_2	17·34%		0·2893
Fe_2O_3	43·05 „		0·2696
FeO	30·27 „	0·4213	} 0·4235
MnO	0·16 „	0·0022	
H_2O	[9·18]„		0·5111
	100·00		

Nimmt man den Mittelwerth der Quotienten von SiO_2 und $Fe_2O_3 = 1$, so erhält man rund $SiO_2 : Fe_2O_3 : FeO : H_2O = 2 : 2 : 3 : 4$ und würde somit die empirische Formel:



$$H_8 \overset{II}{Fe_3} (\overset{VI}{Fe_2})_2 Si_2 O_{17}$$

die Zusammensetzung ausdrücken, dieselbe erfordert:

SiO_2	16.50
Fe_2O_3	43.95
FeO	29.66
H_2O	9·89
	100.00

---

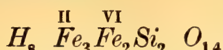
*) Annales de Chimie et de Physique (3) 58. 99.

**) „Lotos" 1875 August-Nro. und Journal f. prakt. Chemie Bd. 11. 1875. 378.

***) Journ. of the chem. society I. 1871.

†) Ob H. Dr. Dietrich vollkommen reines Material zur Verfügung hatte, ist mir unbekannt.

Janovsky leitet aus seiner mit vollkommen reinem Material ausgeführten Analyse die Formel

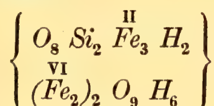


$$H_8 \overset{II}{Fe_3} \overset{VI}{Fe_2} Si_2 \; O_{14}$$

ab, woraus zu ersehen, dass das Kuttenberger Mineral noch basischer ist, indem die Differenz der beiden Formeln Fe_2O_3 beträgt; hierin dürfte auch der Grund des höheren Eigengewichtes zu suchen sein.

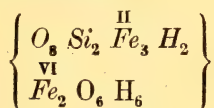
Wegen der wechselnden Mengen von FeO und Fe_2O_3 *) dürfte vielleicht der Cronstedtit, ähnlich wie dies Tschermak für die Clintonit-Gruppe annimmt **), der ja der Cronstedtit in mancher Beziehung nahe steht, als eine isomorphe Mischung zweier Verbindungen anzusehen sein, wie es auch wahrscheinlich ist, dass das H_2O, das erst in hoher Temperatur entweicht, nicht als Hydrat-, sondern als Constitutionswasser enthalten ist.

Die Zusammensetzung des Kuttenberger Minerales würde sich demgemäss ausdrücken lassen:



$$\left\{ \begin{array}{l} O_8 \; Si_2 \; \overset{II}{Fe_3} \; H_2 \\ \overset{VI}{(Fe_2)_2} \; O_9 \; H_6 \end{array} \right\}$$

während dem Přibramer Cronstedtit



$$\left\{ \begin{array}{l} O_8 \; Si_2 \; \overset{II}{Fe_3} \; H_2 \\ \overset{VI}{Fe_2} \; O_6 \; H_6 \end{array} \right\}$$

entsprechen würde.

4.

Sur une limite relative aux polynômes de Legendre.

Extrait d'une lettre adressée à **Mr. Lerch** à Prague par **Mr. F. Gomes-Teixeira,**

Professeur à l'Ecole Polytechnique de Porto, ancien professeur à l'Université de Coïmbra.

(Présenté dans la séance du 15. janvier 1886.)

„Je vous remercie pour l'envoi de votre savant article intitulé „*Remarques sur quelques points etc.*" ***), dont la lecture m'a intéressé beaucoup.

---

*) Flight fand I. Fe_2O_3 36·76; FeO 36·31;
II. „ 32·75; „ 38·57 und eine dritte Bestimmung ergab FeO 41·27, Damour Fe_2O_3 29·08 FeO 33·52,
Janovsky „ 32·34 „ 29·23.

**) Zeitsch. f. Krystallog. etc. III. Br. 1879. 504.

***) Comptes rendus des séances de la Société royale des Sciences de Bohême, 30. octobre 1885.

J'ai fait application de votre analyse aux polynômes de *Legendre*, et je suis arrivé à un résultat qui peut-être vous intéressera.

Vous savez que le développement

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=1+X_1\alpha+\ldots+X_n\alpha^n+\ldots$$

définit les polynômes X_1, X_2, etc. de Legendre et que trois polynômes successifs satisfont à l'équation

$$(n+1)X_{n+1}-(2n+1)xX_n+nX_{n-1}=0$$

qui donne

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(2+\frac{1}{n}\right)x\cdot\frac{X_n}{X_{n+1}}+\frac{X_{n-1}}{X_n}\;\frac{X_n}{X_{n+1}}=0,$$

et par conséquent

$$\text{(1)}\qquad \lim_{n=\infty}\frac{X_n}{X_{n+1}}=x\pm\sqrt{x^2-1}.$$

Il faut maintenant voir quand on doit employer le signe $+$ ou le signe $-$.

Le rayon de convergence de la série proposée est le module de la quantité

$$\lim_{n=\infty}\frac{X_n}{X_{n+1}}$$

D'un autre côté, la même série est convergente à l'intérieur d'un cercle dans lequel la fonction $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ n'a pas des points singuliers, c'est à dire dans un cercle dont le rayon est le plus petit des modules des valeurs de α qui satisfont à l'équation

$$\alpha^2-2x\alpha+1=0$$

qui donne

$$\alpha=x\pm\sqrt{x^2-1}.$$

Donc la fonction $\lim\frac{X_n}{X_{n+1}}$ représente $x+\sqrt{x^2-1}$ dans la région du plan où $|x+\sqrt{x^2-1}|<|x-\sqrt{x^2-1}|$ et represente $x-\sqrt{x^2-1}$ dans la région du plan où arrive le contraire.

Veuillez agréer, etc.

Porto, le 18. décembre 1885.

5.

O souvislosti subdeterminantů.

Napsal **M. N. Vaněček** a předložil prof. dr. Blažek dne 15. ledna 1886.

Předpokládejme, že determinant označíme tak, že udáme u každého jeho prvku řádek a sloupec, ve kterém se nachází, kladouce značku řádku před značku sloupce. Označíme tedy determinant $\varDelta$ stupně n. takto:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1,1;\ 1,2; & . & . & . & 1,n \\ 2,1;\ 2,2; & . & . & . & 2,n \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ n,1;\ n,2; & . & . & . & n,n \end{vmatrix}$$

Utvoříme-li z prvků, které jsou v kterýchkoliv α řádkách a kterýchkoliv α sloupcích determinant nový, říkáme o tomto determinantu, že jest subdeterminantem původního determinantu $\varDelta$. Pro jednoduchosť předpokládejme, že jest subdeterminant ten utvořen z prvků prvních α řádků a prvních α sloupců, což ze známých příčin nemá na obecnosť našeho vyšetřování žádného vlivu. Subdeterminant ten nazveme krátce A a můžeme jej označiti též tak, že udáme jeho hlavní člen v závorce; tedy:

$$A = (1,1;\ 2,2;\ \ldots\ \alpha,\alpha)$$

Označme ostatní řádky determinantu $\varDelta$ tím, že udáme jak za prvními α řádky následují a tedy $\alpha+1$, $\alpha+2 \ldots \alpha+\beta$, kde patrně $\beta = n-\alpha$ a podobně ostatní sloupce v A nezahrnuté $\alpha+1$, $\alpha+2$, $\ldots\ \alpha+\beta$.

Jest patrno, že nahradíme-li kterýkoliv ze sloupců $1, 2, \ldots \alpha$ determinantu A kterýmkoliv sloupcem z $\alpha+1, \ldots \alpha+\beta$ aneb kteroukoliv ze řádek $1,2, \ldots \alpha$ téhož determinantu některou řádkou $\alpha+1$, $\alpha+2 \ldots \alpha+\beta$, že takto obdržený determinant bude opět subdeterminantem původního $\varDelta$. Můžeme tedy takto jakýkoliv subdeterminant α. stupně (stejného s A) původního determinantu $\varDelta$ vyvoditi ze subdeterminantu A výměnou příslušných řádek a sloupců. Děje-li se výměna tato dle určitého zákona pak také mezi takto ob-

drženými subdeterminanty bude platiti jakýsi vztah a účelem tohoto pojednání jest právě udati tuto souvislosť mezi subdeterminanty, jež obdržíme dle určitého takovéhoto zákona proměnnosti.

Nové determinanty A odvodíme z daného A tím způsobem, že vypustíme nejprvé řádkový index h_1 a nahradíme jej postupně indexy $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, ... $\alpha + \beta$; podobně značky řádkové $h_2 \ldots h_\beta$ nahradíme taktéž postupně týmiž značkami $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, ... $\alpha + \beta$.

Takto obdržené subdeterminanty A můžeme sestaviti v determinant d stupně β., jehož sloupce udají nám vypuštěné řádky h_1, $h_2 \ldots h_\beta$ a jehož řádky podobně udávají ty řádky, kterými jsme je nahradili, řádky $\alpha + 1$, $\alpha + 2 \ldots \alpha + \beta$. Determinant d bude tedy:

$$d = \begin{vmatrix} {}^{h_1}A^{\alpha+1}, & {}^{h_2}A^{\alpha+1} & \ldots & {}^{h_\beta}A^{\alpha+1} \\ {}^{h_1}A^{\alpha+2}, & {}^{h_2}A^{\alpha+2} & \ldots & {}^{h_\beta}A^{\alpha+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ {}^{h_1}A^{\alpha+\beta}, & {}^{h_2}A^{\alpha+\beta} & \ldots & {}^{h_\beta}A^{\alpha+\beta} \end{vmatrix},$$

kde význam substitučního symbolu ${}^{h_1}A^{\alpha+1}$ jest patrný a znamená, že determinant ten dostali jsme z A tím, že jeho řádku h_1 nahradili jsme řádkou $\alpha + 1$.

Abychom vyšetřili hodnotu tohoto determinantu, vyvineme subdeterminanty, jež jsou jeho prvky, pomocí jejich subdeterminantů, které jsou sdružené s prvky řádků nahražených, řádků, kterými se navzájem od sebe liší, totiž: $\alpha + 1$, $\alpha + 2$, ... $\alpha + \beta$.

Tyto nové subdeterminanty budou obsahovati prvky všech řad determinantu A, vyjma vždy jedinou z nich, jež jest některá z h_1, $h_2 \ldots h_\beta$ a prvky všech jeho sloupců opět vyjma jediný; každý takový subdeterminant můžeme označiti opět písmenem A, k němuž dolů připojíme značku vynechaného řádku a sloupce. Jsou to jak patrno subdeterminanty původního determinantu A. Determinant d nabude tedy podoby:

$$d = \begin{vmatrix} \Sigma \alpha + 1, k A_{h_1,k}, & \Sigma \alpha + 1, k A_{h_2,k} & \ldots & \Sigma \alpha + 1, k A_{h_\beta,k} \\ \Sigma \alpha + 2, k A_{h_1,k}, & \Sigma \alpha + 2, k A_{h_2,k} & \ldots & \Sigma \alpha + 2, k A_{h_\beta,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \Sigma \alpha + \beta, k A_{h_1,k}, & \Sigma \alpha + \beta, k A_{h_2,k} & \ldots & \Sigma \alpha + \beta, k A_{h_\beta,k} \end{vmatrix}, \qquad a)$$

kde ve všech součtech Σ mění se k od 1 až do α. Determinant takto upravený má tu vlastnosť, že členy součtů Σ pod sebou stojící obsahují týž subdeterminant jako činitel.

Můžeme však determinant ten vyjádřiti jako součet S několika determinantů, poněvač každý jeho člen jeví se jako součet stejného počtu součinů. Tyto nové determinanty téhož stupně β, z nichž skládá se součet S utvoříme tak, že z každého členu součtu v prvním, druhém ... β. sloupci utvoříme pořadem první, druhý, ... β. sloupec determinantu nového. Jak patrno z hořejšího, obdržíme takto determinant, jehož všechny prvky prvního, druhého ... β. sloupce obsahují vždy některý subdeterminant determinantu A tak, že můžeme příslušný subdeterminant vyňati jako činitel.

Vezmeme-li tedy z prvního, druhého ... β. sloupce pořadem člen $k_1, k_2 \ldots k_\beta$, obdržíme takto nový determinant, jemuž jak praveno možno dáti podobu:

$$A_{h_1,k_1} A_{h_2,k_2} \ldots A_{h_{\beta},k_\beta} \delta,$$

kde δ značí determinant

$$\delta = \begin{vmatrix} \alpha+1, k_1; & \alpha+1, k_2 & \ldots & \alpha+1, k_\beta \\ \alpha+2, k_1; & \alpha+2, k_2 & \ldots & \alpha+2, k_\beta \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha+\beta, k_1; & \alpha+\beta, k_2 & \ldots & \alpha+\beta, k_\beta \end{vmatrix}$$

Zaměníme-li dva z těchto indexů k, vezmeme-li na příklad z prvního sloupce členy k_2 a z druhého k_1, obdržíme nový determinant δ, který však záměnou prvního a druhého sloupce přejde úplně v předešlý determinant δ. Při tom však změní se tedy znamení jeho součinitele, znamení součinu $A_{h_1,k_2} A_{h_2,k_1} \ldots A_{h_\beta,k_\beta}$ zrovna tak, jako kdybychom z hlavního členu $A_{h_1,k_1} A_{h_2,k_2} \ldots A_{h_\beta,k_\beta}$ odvozovali příslušný člen determinantu:

$$\left(A_{h_1,k_1} A_{h_2,k_2} \ldots A_{h_\beta,k_\beta}\right) \qquad b)$$

záměnou příslušných značek k. Vyhledáme-li tedy ty členy součtu S, které mají týž determinant δ za činitele, obdržíme, že součet jich dává právě determinant δ, násobený determinantem $b)$.

Všimneme-li si blíže tohoto determinantu $b)$, shledáme, že determinant ten jest subdeterminantem determinantu tak zvaného přidruženého determinantu A a tu jak známo platí:

$$\left(A_{h_1 k_1}, A_{h_2, k_2} \ldots A_{h_\beta, k_\beta}\right) = A^{\beta - 1} Z,$$

značí-li Z subdeterminant determinantu A, který povstane z něho vypuštěním jeho řádek h_1, $h_2 \ldots h_\beta$ a sloupců k_1, $k_2 \ldots k_\beta$.

Kdybychom vypustili v determinantu A řádky h_1, $h_2 \ldots h_\beta$ a postavili na místo nich pořadem řádky $\alpha + 1$, $\alpha + 2 \ldots \alpha + \beta$ determinantu $\varDelta$, obdržíme determinant nový, který můžeme označiti symbolem ${}^{h_1 \ldots h_\beta}A^{\alpha+1 \ldots \alpha+\beta}$ a v němž budou δ a Z sdružené subdeterminanty. Zvolíme-li za k jiné hodnoty, dostaneme také jiné Z, ale vždy bude to jeho subdeterminant, sdružený s příslušným δ. Snadno se pozná, probereme-li tak všemožné skupiny indexů k a tudíž probereme-li tak celý součet S, že vlastně obdržíme všechny členy determinantu ${}^{h_1 \ldots h_\beta}A^{\alpha+1 \ldots \alpha+\beta}$, vyvinutého jako součet součinů vždy po dvou sdružených jeho subdeterminantů, z nichž jedny jsou vzaty ze řádek h_1, h_2, $\ldots h_\beta$ a druhé ze zbývajících.

Takto přišli jsme tedy k poznání, že platí vztah:

$$\left({}^{h_1}A^{\alpha+1}\,{}^{h_2}A^{\alpha+2} \ldots {}^{h_\beta}A^{\alpha+\beta}\right) = A^{\beta-1}\,{}^{h_1 \ldots h_\beta}A^{\alpha+1 \ldots \alpha+\beta} \qquad \text{I.}$$

což dá se vyjádřiti poučkou:

Nahradíme-li v determinantu A libovolných β řádek postupně jinými β řádkami a z takto obdržených determinantů utvoříme determinant nový d tak, že sloupce jeho udávají řádky, které jsme vypustili a řádky jeho jsou udány opět řádkami, kterými jsme vypuštěné postupně nahradili, jest hodnota tohoto determinantu rovna součinu z β—1 mocnosti determinantu původního A a determinantu, který z A obdržíme, když všechny vypuštěné řádky nahradíme oněmi přidanými.

O užitečnosti této poučky přesvědčíme se nejlépe z následujících zvláštních případů, které objeví se jako obecné pro subdeterminanty z jiného stanoviska pozorované.

1. Jakožto výsledek plynoucí z této poučky obdržeti můžeme známou poučku o násobení dvou determinantů.

Budiž $\beta = \alpha$. V případu tom obdržíme, že determinant ${}^{h_1 \ldots h_\beta}A^{\alpha+1 \ldots \alpha+\beta}$ má všechny prvky jiné než determinant A. Utvořme determinantu A přidružený determinant. Jelikož, jak praveno, jest $\alpha = \beta$, obdržíme dle známé vlastnosti determinantu přidruženého, že:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2} & \dots & A_{1,\alpha} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} & \dots & A_{2,\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\alpha,1}, & A_{\alpha,2} & \dots & A_{\alpha,\alpha} \end{vmatrix} = A^{\beta-1}$$

Tím dostaneme tedy na pravé straně rovnice I. součin dvou determinantů. Vyvineme-li však determinnnt na levé straně stojící způsobem naznačeným v rovnici *a)*, seznáme, že součty Σ jsou právě dle známého pravidla utvořené členy součinu dvou determinantů čili že platí:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1}, & A_{1,2} & \dots & A_{1,\alpha} \\ A_{2,1}, & A_{2,2} & \dots & A_{2,\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\alpha,1}, & A_{\alpha,2} & \dots & A_{\alpha,\alpha} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha+1,1, & \alpha+1,2 & \dots & \alpha+1,\alpha \\ \alpha+2,1, & \alpha+2,2 & \dots & \alpha+2,\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha+\alpha,1, & \alpha+\alpha,2 & \dots & \alpha+\alpha,\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \Sigma_{\alpha+1,k} A_{1,k}, & \Sigma_{\alpha+1,k} A_{2,k} & \dots & \Sigma_{\alpha+1,k} A_{\alpha,k} \\ \Sigma_{\alpha+2,k} A_{1,k}, & \Sigma_{\alpha+2,k} A_{2,k} & \dots & \Sigma_{\alpha+2,k} A_{\alpha,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Sigma_{\alpha+\alpha,k} A_{1,k}, & \Sigma_{\alpha+\alpha,k} A_{2,k} & \dots & \Sigma_{\alpha+\alpha,k} A_{\alpha,k} \end{vmatrix}$$

2. Vzorec I. obsahuje v sobě jako zvláštní případ vzorec, pomocí něhož jsme platnosť jeho odvodili, větu to o subdeterminantu determinantu přidruženého.

Předpokládejme totiž, že řádka $\alpha+1$ obsahuje samé nully až na prvek na místě α_1 stojící, který nechť jest 1 a podobně řady $\alpha+2 \dots \alpha+\beta$, že obsahují samé nully až na prvky ležící v nich pořadem na místě $\alpha_2 \dots \alpha_\beta$, jež jsou vesměs jednotky a kde $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_\beta$ jsou vesměs mezi sebou různé.

Jak známo, přejde v případu tom determinant ${}^{h_1}A^{\alpha+1}$ v determinant $A_{h_1\alpha_1}$ jenž jest subdeterminantem determinantu A. Podobně determinanty ${}^{h_2}A^{\alpha+2} \dots {}^{h\beta}A^{\alpha+\beta}$ přejdou v subdeterminanty $A_{h_2\alpha_2} \dots A_{h_\beta\alpha_\beta}$. Z téže příčiny pak bude ${}^{h_1 \dots h\beta}A^{\alpha+1 \dots \alpha+\beta}$ sub-

determinantem $A_{h_1,\alpha_1;\,h_2,\alpha_2;\,\ldots\,h_\beta\alpha_\beta}$. Determinant tento pak jest, jak patrno, sdružený se subdeterminantem $(h_1,\alpha_1 \ldots h_\beta,\alpha_\beta)$, který odpovídá deierminantu $(A_{h_1,\alpha_1} \ldots A_{h_\beta,\alpha_\beta})$ jenž jest subdeterminantem přidruženého determinantu, determinantu původního A. Vzorec I., který v případu tom může se psáti:

$$\left(A_{h_1,\alpha_1}, A_{h_2,\alpha_2} \cdot \cdot \cdot A_{h_\beta\alpha_\beta}\right) = A^{\beta-1} A_{h_1,\alpha_1;\ldots h_\beta,\alpha_\beta}.$$

vyjádřuje tedy známou poučku o subdeterminantu determinantu přidruženého.

3. Vzorec I. však můžeme také obrátiti. Můžeme totiž považovati determinant ${}^{h_1\ldots h_\beta}A^{\alpha+1\ldots\alpha+\beta}$ za původní a ostatní determinanty ${}^{h_1}A^{\alpha+1} \ldots {}^{h_\beta}A^{\alpha+\beta}$ za odvozené z něho. Jest patrno, že z ${}^{h_1\ldots h_\beta}A^{\alpha+1\ldots\alpha+\beta}$ odvodíme naopak zase determinant A, když za $\alpha+1, \ldots \alpha+\beta$ řádky předešlého determinantu píšeme $h_1 \ldots h_\beta$ řádky a podobně z něho odvodíme opět determinant ${}^{h_1}A^{\alpha+1}$, když za všechny tyto řádky vyjma $\alpha+1$, když totiž za řádky $\alpha+2, \ldots \alpha+\beta$ píšeme řádky $h_2 \ldots h_\beta$. Na věci samé však ničeho se nemění, když nahrazené řádky označíme opět $h_1 \ldots h_\beta$ místo $\alpha+1 \ldots \alpha+\beta$ a ty, které na jich místo klademe, když opět $\alpha+1, \ldots \alpha+\beta$ místo $h_1 \ldots h_\beta$ pojmenujeme. Vzorec I. promění se takto tedy v:

$$\left({}^{h_2\ldots h_\beta}A^{\alpha+2\ldots\alpha+\beta},\ {}^{h_1h_3\ldots h_\beta}A^{\alpha+1,\alpha+2\ldots\alpha+\beta} \ldots {}^{h_1\ldots h_{\beta-1}}A^{\alpha+1\ldots\alpha+\beta-1}\right) = A\left({}^{h_1\ldots h_\beta}A^{\alpha+1\ldots\alpha+\beta}\right)^{\beta-1}. \qquad \text{II.}$$

Poučku obsaženou v této rovnici mohli bychom vysloviti podobně, totiž:

Nahradíme-li v determinantu A vždy $\beta-1$ z libovolných β řádek jinými $\beta-1$ řádkami vzatých z libovolných β řádek, jež v determinantu A nejsou a z takto obdržených determinantů utvoříme determinant nový d' tak, že sloupce jeho udávají řádky nahrazené a řádky jeho jsou ndány řádkami nahrazujícími, jest hodnota tohoto determinantu rovna součinu z $\beta-1$ mocnosti determinantu původního A a determinantu, který z A obdržíme, když všechny vypuštěné řádky nahradíme oněmi přidanými.

Pro $\alpha=\beta$ obdrželi bychom opět poučku o násobení dvou determinantů.

Zajímavým pak stává se tento případ, kdy $\beta < \alpha$, užijeme-li zvláštních hodnot řádek nahražujících jako v předešlém. Dejme tomu, že prvních r řádek $\alpha + 1, \ldots \alpha + r$ nahražujících jsou vesměs nully až na jeden vždy prvek v nich, pořadem na $\alpha_1 \ldots \alpha_r$ místě stojící, který nechť jest jednotka a kde $\alpha_1 \ldots \alpha_r$ jsou vesměs mezi sebou různé. Jest patrno, že determinanty, v nichž se nalézají, redukují se na subdeterminanty, kde příslušná řádka a sloupec jsou vynechány.

Uvažujme tuto pouze případ, kdy toto platí o všech řádkách $\alpha + 1 \ldots \alpha + \beta$. Dostaneme takto známou poučku, jak lze determinant vyjádřiti pomocí jeho subdeterminantů, libovolného stupně, které jsou mezi sebou vázány tou podmínkou, že jeden subdeterminant mají všechny společný. Vzorec II. v případu tom přejde v

$$A\left(A_{h_1,\alpha_1 \ldots h_\beta,\alpha_\beta}\right)^{\beta-1} =$$

$$= \left(A_{h_2,\alpha_2 \ldots h_\beta,\alpha_\beta} \; A_{h_1,\alpha_1, h_3,\alpha_3 \ldots h_\beta,\alpha_\beta} \cdots A_{h_1,\alpha_1 \ldots h_{\beta-1},\alpha_{\beta-1}}\right)$$

Zvláštního povšimnutí zasluhuje determinant pravé strany. Neboť tam všechny prvky jeho jsou determinanty $\alpha + 1$ stupně a každý z nich, jak patrno, obsahuje všechny prvky determinantu $A_{h_1\alpha_1, \ldots h_\beta,\alpha_\beta}$ a mimo to vždy ještě jeden sloupec a řádek. Kdybychom tedy označili B^{pq} takový determinant, který dostaneme připojením libovolné řádky p a libovolného sloupce q ku determinantu tomu, pak seznáme snadno, že determinant pravé strany můžeme psáti ve formě:

$$\begin{vmatrix} B^{h_1,\alpha_1}, & B^{h_1,\alpha_2} & \ldots & B^{h_1,\alpha_\beta} \\ B^{h_2,\alpha_1}, & B^{h_2,\alpha_2} & \ldots & B^{h_2,\alpha_\beta} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ B^{h_\beta,\alpha_1}, & B^{h_\beta,\alpha_2} & \ldots & B^{h_\beta,\alpha_\beta} \end{vmatrix}$$

Čímž přišli jsme k výsledku pro jinou zákonitou změnu indexů, kde mění se jeden index řádkový a jeden sloupcový a sice tak, že nahražená řádka a sloupec jsou stále tytéž a ty, jimiž jsme je nahradili, se všemožně mění tak, že tvoří determinant nový. Výsledek ten dá se vyjádřiti takto:

Měníme-li v subdeterminantu jednu řádku a jeden sloupec tak, že je postupně nahradíme všemi zbývajícími řádky a sloupci, dají se determinanty takto obdr-

žené sestaviti v determinant, kde řádky jsou udány řádkami novými a sloupce novými sloupci a hodnota determinantu toho jest determinant původní (ze všech sloupců a řádek) násobený subdeterminantem společným všem novým determinantům, který jest v mocnosti o jednotku nižší než jest stupeň determinantu z nich utvořeného.

6.

Resultate der botanischen Durchforschung Böhmens im Jahre 1885.

Vorgetragen von Prof. Dr. **Lad. Čelakovský** am 29. Jänner 1886.

Die botanische Durchforschung Böhmens hat auch im verflossenen Sommer erfreuliche Fortschritte gemacht, und sind mir wieder zahlreiche neue Standortsverzeichnisse und Pflanzensammlungen zur Benützung übergeben worden, aus denen das Wichtigste formell im Anschlusse an den Prodromus der Fl. v. Böhm. hier publicirt wird. In diesem Verzeichnisse sind auch wieder die Resultate mitenthalten, welche die im Auftrage des Durchforschungscomité's, und zwar diesmal von meinem Sohne (Čf) in der Gegend von Saaz, Waltsch, Jechnitz, Duppau und im Egerthale ausgeführte botanische Bereisung ergeben hat. Ich selbst habe nur einzelne Excursionen nach mehreren Punkten des Elbthals, nach dem Erzgebirge bei Abertham, nach Gratzen an der österreichischen Grenze, nach Eisenstein und in der Umgegend von Chudenic unternommen.

Ferner lieferten z. Th. recht ansehnliche, z. Th. kleinere Beiträge folgende Herren: Bartoš Wenzel (Bš), Assistent der böhm. Oberrealschule in Prag, botanisirte südlich der Eger bei Libochovic, Bílek Franz (Bk), Gymnasialprofessor in Schlan, bot. ebendaselbst, Ciboch (Ci), bot. bei Písek und im angränzenden Moldauthale, Conrath (C), Assistent der deutschen Technik in Prag, bot. im böhm. Mittelgebirge; Dvořák Jos. (D), derzeit Bürgerschuldirektor in Písek, bot. um Chotěboř, Mirotic, Freyn Josef (F), bot. bei Kuttenberg, Leitmeritz und im Erzgebirge, P. Häusler Jos. (Hs), bot. um Adler-Kostelec, Hesz Gustav (Hz), Gymnasialschüler in Jungbunzlau, bot. ebendort, Hora Paul (Ha), Jahn Jaroslav (J), bot. (seit Jahren um Pardubic) bei Chrudim, Strašic zbir. u. a., Kabát Josef (Kb), Zuckerfabriksdirektor in Welwar, bot. um Welwar, bei Bilichau, Hoch-Weselí, Khek Eugen (Kh), Pharmaceut, bot. um Neu-

haus, Plitzka Alfred (Pl), Cand. d. Prof., bot. um Melnik, Polák Karl (Pk), bot. im Elbthal, v. Purkyně Cyril (CP), bot. um Říčan, Řezáč Friedrich (Ř), Mediciner, bot. bei Zbirow, Sitenský Franz (S), Professor, bot. bei Tábor, Smolař Franz, Lehramtskandidat, bot. bei Jičín, Studnička Franz (St), Gymnasialschüler, bot. bei Neuhaus, Topitz Anton (T), Schullehrer in Sonnberg bei Gratzen, bot. daselbst, Uzel Heinrich (U), Gymnasialschüler in Königgrätz, bot. in dortiger Gegend, Dr. Velenovský Josef (V), bot. meist im Elbethal, Weidmann Anton (Wm), Lehrer, bot. um Lomnic a. Lužn., Wildt Albin (Wt), Bergingenieur in Kladno, bot. daselbst und theilte auch einige Funde des dortigen Lehrers Lichtnecker zur Ansicht mit, Zítko Josef (Z), Bürgerschullehrer in Chrudim, bot. daselbst, Žára Anton (Ž), theol. cand., bot. um Hochlieben.

Im Allgemeinen wäre hervorzuheben, dass heuer fünf Arten für das Gebiet neu aufgefunden wurden, darunter Doronicum caucasicum MB., dessen, wie ich überzeugt bin, spontanes Vorkommen nahe der österreichischen Grenze besonders merkwürdig ist. Die anderen Novitäten sind: Calamagrostis litorea DC., gleich an zwei von einander entfernten Standorten, Alisma arcuatum Mich. von Chudenic (und schon früher, verkannt, von mehreren älteren Standorten), Hieracium graniticum Schulz bip. (var. quarciticum) aus der Šárka bei Prag, und Genista pilosa DC. von Gratzen (früher zwar schon einmal, aber zweifelsohne irrig, in Böhmen angegeben).

Für Böhmen neue Varietäten (z. Th. Rassen) werden hier zum erstenmal aufgeführt: Potamogeton praelongus β) brevifolius Čel., Scirpus lacustris β) fluitans Coss. & Germ., Lapsana communis *b*) hirsuta Peterm. (L. pubescens Bernh.), Hieracium cymosum *b*) pubescens W. Gr. (H. glomeratum Fr.), H. murorum *b*) cinerascens (Jord. sp.), Scorzonera hispanica L. var. asphodeloides Wallr.

Neu beobachtet wurden auch folgende Bastardformen: Lappa omentosa × minor, Verbascum thapsiforme × nigrum, Rumex maritimus × crispus, Festuca loliacea Curt. (F. elatior × Lolium perenne).

Silphium perfoliatum L., aus Nordamerika, wurde zum erstenmal verwildert (auf einem Felde) gefunden.

Von den sonst im Verzeichniss von neuen Standorten aufgeführten Arten nehmen diejenigen das meiste Interesse in Anspruch, die bisher nur von wenigen, oft nur von einem oder zwei, Standorten

bekannt waren und deren Verbreitungsgebiet durch die Auffindung weiterer, von den früheren entfernterer Standorte wesentlich erweitert wurde. Dahin gehören: Ceterach officinarum (zweiter viel ausgiebigerer Standort), Equisetum variegatum (zweiter, von dem zuerst bekannt gewordenen entfernter Standort), Potamogeton praelongus, Sparganium affine (zweiter Standort im Böhmerwalde), Stipa Tirsa, Carex nutans, Schoenus nigricans (zweiter sicherer, entfernter Standort), Ophrys muscifera, Euphorbia amygdaloides, Thesium rostratum (zweiter Standort in Böhmen), Orobanche pallidiflora, Teucrium scorodonia (dritter Standort), Ranunculus Steveni, Oenothera muricata, Cytisus austriacus (dritter Standort), Lathyrus heterophyllus.

Erwähnenswerth ist hier die Thatsache, dass Isoëtes lacustris im Schwarzen See bei Eisenstein, wo sie seit Tausch wohl Niemand wiedergesehen hat, wiederaufgefunden und Standort und Vorkommen genauer festgestellt wurden.

Nennenswerthe Erweiterung ihres Vorkommens in Böhmen lernten wir von folgenden Varietäten kennen: Poa annua *β*) varia Koch (im Erzgebirge, bisher nur im Riesengebirge bekannt gewesen), Silene nutans *β*) glabra, Oxalis acetosella *β*) rosea.

Von seltenen, wenn auch schon früher, aber nur ein- oder zweimal beobachteten Bastarden wurden heuer wieder angetroffen und gesammelt: Juncus effusus × glaucus (zwar schon früher angegeben, aber nicht durch Belege beglaubigt gewesen), Lappa tomentosa × major, Bidens radiatus × tripartitus, Viola mirabilis × Riviniana.

Alle diese Arten, Varietäten und Hybriden sind im nachfolgenden Verzeichniss mit fetterer Schrift hervorgehoben und die völlig neuen noch mit einem Sternchen bezeichnet.

Ich schliesse diese Einleitung mit dem Hinweis auf 3 Specialfloren für einzelne kleinere Bezirke des Landes, die im J. 1884 und 1885 erschienen sind. Prof. Bílek hat sein im 1884 begonnenes Verzeichniss der Schlaner Flora: „Soustavný přehled rostlin cévnatých v okolí Slaného samorostlých a obecně pěstovaných“ heuer vollendet. Das reichhaltige Werkchen verdient als eine gewissenhafte, auf hinreichenden botanischen Kenntnissen beruhende Arbeit alle Anerkennung. Die wichtigsten Funde dieses Autors habe ich auf Grund eingeschickter Pflanzen revidirt und schon in meinen früheren Durchforschungsresultaten veröffentlicht. Im Übrigen sei auf die Schrift selbst verwiesen.

Eine zweite Specialflora: „Aus der Flora von Kladno und dessen Umgebung“ in „Lotos, Jahrb. für Naturwiss.“ 1884 und 1885 von

Albin Wildt, Bergingenieur in Kladno, fällt z. Th. schon in das Gebiet der Aufzählung Bílek's. Auch dieser Schrift ist das redliche Bestreben, eine richtige Darstellung der botanischen Verhältnisse der betreffenden Gegend zu liefern, anzumerken, obwohl sich trotzdem eine Anzahl Bestimmungsfehler in dieselbe eingeschlichen haben.*)

Die dritte Specialflora, eine vom Forstadjunkten J. Chadt verfasste „Květena Písecká a okolí" (sic!) 1884 ist so unwissenschaftlich und so voll der gröbsten Irrthümmer, dass sie dieser Eigenschaften wegen für die Pflanzengeographie Böhmens völlig unbrauchbar ist**).

Cryptogamae vasculares.

Ophioglossum vulgatum L. Wiesen bei Lissa gegen Alt-Lissa zu an mehreren Orten zahlreich (J)! Zvole bei Jaroměř (Čeněk)!

Botrychium lunaria Sw. Lissa: „na viničkách" mit B. matricariaef., doch seltener (J)! Königgrätzer Wälder (Čeněk)!

Botrychium matricariaefolium A. Br. Lissa: Sandflur am Kieferwalde links vom Wege nächst Dvorce sehr zahlreich (V, Kh)!

---

*) Der Verfasser hat mir bereitwilligst jene Pflanzen zur Einsicht geschickt, welche ich als kritischere und leichter zu verwechselnde Arten zu sehen wünschte. Die meisten waren richtig bestimmt, nur die folgenden Namen sind hiernach in der obigen „Flora von Kladno" zu streichen, nämlich: Aspidium spinulosum *c*) Tauschii Čel. (= *a*) genuinum!), Alopecurus nigricans Hornem., Bromus racemosus L., Carex pulicaris L., C. Buekii Wimm., Juncus Gerardi Lois., Quercus pubescens Willd., Senecio erucifolius L., Carduus crispus L., Scabiosa lucida Vill., Galium saxatile L., Omphalodes scorpioides Schr., Myosotis silvatica L. var. alpestris (= genuina!), Veronica agrestis Fr., Ranunculus paucistamineus Tsch (= R. Petiveri Koch!), Viola stagnina Kit., Spergula arvensis L. *β*) sativa (= *α*) vulgaris!), Spergula pentandra Bor. (= S. Morisonii Bor.!), Cerastium triviale *β*) nemorale Uechtr. (= f. vulgaris!), Rubus plicatus Whe. Die berichtigten Angaben sind, soweit sie nicht ganz gemeine Arten betreffen, in meinem heurigen Verzeichniss mitgetheilt.

**) Von den in jener „Květena" angeführten Arten sind etwa 60 aus pflanzengeographischen Gründen für Písek theils ganz unmöglich, theils wenigstens sehr unwahrscheinlich. Die meisten derselben sind auf die wärmsten Lagen und Kalkböden Nordböhmens beschränkt, darum von früheren zuverlässigen Beobachtern bei Písek nicht beobachtet. Ausserdem figuriren in der „Květena" Ribes petraeum, Viola lutea, Athyrium alpestre, Luzula maxima, Salix myrtilloides. Auf dem Umschlag berichtigt Verf. Sedum album seines Verzeichnisses in S. acre, Galium tricorne in G. apparine, Anthriscus vulgaris in Chaerophyllum hirsutum. Diese wenigen Pflanzen habe ich gesehen, und von mir rührt die Correctur der ursprünglichen Bestimmungen des Verfassers her. Diese Proben dürften zur Qualificirung das Ganzen genügen.

Botrychium rutaefolium A. Br.*) Goldöls bei Schatzlar (Čeněk)!

Blechnum spicant Roth. Turnau: zwischen Waldstein und Gross-Skal, nächst Equiset. maximum (Kb). Erzgebirge: auch am Spitzberg und Sonnenwirbel bei Gottesgab, Oberwiesenthal (Čf)! Zwischen Borkovic und Weselí, steril (Wm)!

Asplenium septentrionale Hoffm. Jungbunzlau: Bába bei Kosmonos, Thal gegen Skalsko (Hz)! Heinrichschlag bei Neuhaus (St)!

Asplenium germanicum Weiss. Prag: Kozí hřbety hinter der Scharka (Ř)! Waltsch: Basaltfelsen nächst der Liná-Schäferei (Čf)!

Asplenium viride Huds. Weisswasser: Rachel bei Paterhof (CP)!

Aspidium lonchitis Sw. Am Schreckenstein bei Aussig, 2. Expl. mit Ceterach (Kh 1884)! in ungewöhnlich warmer Lage.

Aspidium lobatum Sw. Berg Vlč bei Strašic zbir. mit Lonicera nigra und Sambucus racemosa (J)!

Aspidium oreopteris Sw. Damm des Rosenberger Teiches bei Wittingau (Wm)!

Aspidium thelypteris Sw. Schlossrevier (Hrádeček) bei Wittingau (Wm)! Waldsumpf bei Přeseka bei Lomnic (Wm)!

Polypodium phegopteris L.**) Prager Gegend: bei Říčan mit P. dryopteris (Čf)!

Polypodium Robertianum Hoffm. Prag: Felsen des Radotíner Thals bei Hinter-Kopanina, unweit von dem Standort der Daphne cneorum (C)! Gratzen: Steinmauer bei Neugebäu im Theresienthale!

Ceterach officinarum Willd. Aussig: schroffe Basaltfelsen am Waldabhang hoch über dem Schreckenstein, nächst dem Fusspfad, der nach dem Wostray hinaufführt, recht zahlreich! (von Khek entdeckt). Zweiter und viel ergiebigerer Standort in Böhmen.

Equisetum silvaticum L. Prager Gegend: bei Říčan (CP)!

Equisetum elongatum Willd. Sandiger Kieferwald bei Lissa und bei Sadská (J)! Kieferwald zwischen Woleschko [Olešek] und Liboteinitz bei Raudnitz (C)!

---

*) Nach Prantl ist Botrych. ternatum Sw., mit welchem B. rutaefolium von Milde vereinigt wurde, eine verschiedene, Japan und Himalaya angehörende Art.

**) Die Trennung der Gattungen Phegopteris Fée und Polypodium Fée, eigentlich nur nach dem nicht abgliedernden und abgliedernden Blattstiel, scheint mir nicht im Einklang mit den Principien der Systematik. Consequent sollte man auch Asplenium trichomanes mit abgliedernden Fiederblättchen vom nächst verwandten A. viride generisch trennen!

Equisetum hiemale L. Weisswasser: im Thale nächst dem Bahnhof, gegen Jungbunzlau zu (Hz)! Zwischen Woleschko und Liboteinitz mit vorigem (C)!

Equisetum variegatum Schleich. Kladno: auf einer kleinen Stelle der sumpfigen Wiese bei Hnidous (Wt)! und nach demselben Gewährsmann wahrscheinlich auch im Walde bei Libušín. Zweiter Standort in Böhmen.

Lycopodium annotinum L. Erzgebirge: Wald oberhalb Joachimsthal (Čf). Schlan: „v Ostrově" bei Jedomělic (Bk)! und im Krnčíthale bei Kladno (Wt).

Lycopodium clavatum L. Prager Gegend: zwischen Říčan und Schwarz-Kostelec (CP).

Lycopodium complanatum L. (genuinum). Prager Gegend: bei Říčan (CP)! Chrudim: na Paláci, na Líně, u Rabštejnka (Z). Hoděšovic bei Holic (Čeněk)!

Isoëtes lacustris L. Im Schwarzen See bei Eisenstein im Böhmerwalde heuer durch meinen Sohn Ladislav am 6. Sept. 1885 wiederaufgefunden.

Die von Tausch*) im J. 1816 dort entdeckte Isoëtes ist meines Wissens seither nicht wieder daselbst gesehen worden. Schon J. Wagner (in Opiz Naturalientausch 1828) beklagt sich, dass er sie auf einer 1825 gemachten Böhmerwaldreise nicht finden konnte, obschon er das ganze linke Ufer des Sees fleissig abgesucht habe, und meinte, sie müsse entweder ausgerottet oder am gegenseitigen Ufer, wo er nicht war, zu suchen sein. Nicht besser erging es zu wiederholten malen mir und verschiedenen anderen Botanikern der Neuzeit (abgesehen von einer spasshaften Episode, die ein von Jemandem, den ich nicht nennen will, als Isoëtes einmal herausgefischter steriler Juncus supinus veranlasste). Der Grund dieser steten Misserfolge, wie sich jetzt herausgestellt hat, ist aber der, dass die Isoëtes in bedeutender Tiefe, bei gewöhnlichem Wasserstande 3 Meter und darüber tief, und von den Ufern weit entfernt wächst, so dass sie vom Ufer aus nicht gesehen werden kann. Heuer wurde der See in Folge anhaltender Dürre zum Theil abgelassen, um Wasser für die tieferliegenden Wiesen zu bekommen, wodurch weite (bis 8 Meter breite), steinige, vegetationsleere Uferstrecken, besonders am linken, östlichen Ufer trockengelegt wurden, von deren weit ins Innere des Sees vorspringendem Rande aus nunmehr bei guter Beleuchtung die Isoëtes, stellenweise im

*) S. den Bericht von Tausch in „Flora" 1819 pag. 501—507.

Schlamme ganze Wiesen bildend, stellenweise, zumal zwischen Steinen, auch spärlicher, im Wasser smaragdgrün leuchtend, zu Gesichte kam. Aber auch da war mit einem einfachen Stecken wenig herauszufördern, daher auf einer zweiten, von mir und meinem Sohne unternommenen Excursion eine bei zwei Klafter lange, an einem Ende mit einem Grabscheit, auf dem anderen mit einem Netz versehene Stange benutzt wurde, mit deren Hilfe von uns nach fünfstündiger Arbeit mehr als 400 Exempl. (hauptsächlich für Kerners Herbar. austro-hungar.) ausgestochen und herausgefischt wurden. Wahrscheinlich war das Jahr, in dem Tausch die Pflanze entdeckte, ebenso günstig wie das heurige.

Die schönsten grössten Exemplare mit bis 18—20 cm. langen Blättern bewohnen eine grössere Tiefe, näher dem blosgelegten neuen Uferrande sind sie kleiner. Ganz junge kleine Exemplare, nur 2 cm. hoch, besitzen zweizeilig gestellte Blätter auf einem von den Seiten plattgedrückten Stamme.*) Auch die schon von Tausch gesammelte Form mit nach auswärts sichelförmig gebogenen Blättern (f. falcata Tausch)**) kommt dort nicht selten vor. Solche Exemplare sind sehr breitstämmig und haben zahlreiche, sehr steife, aber verhältnissmässig kurze Blätter. Die reifen Macrosporen aller von mir untersuchten Exemplare waren auf der Oberfläche höckerig (var. tuberculata s. vulgaris); die glattsporige Var. (leiospora Klinggr.) sah ich dort nicht.

Nächst dem rechten nordwestlichen Ufer fand ich die Isoëtes spärlich und noch weniger zugänglich. Mein Sohn untersuchte auch noch den Teufelssee, fand aber, trotzdem dessen Wasserniveau noch mehr als das des Schwarzen Sees gesunken war, von Isoëtes dort keine Spur. Hiernach ist die Meinung neuerer Schriftsteller (Koch Synopsis, Milde Höhere Sporenpflanzen, A. Braun Verh. d. bot. Ver. v. Brandbg. III, IV), der auch ich im Prodr. Fl. Böhm. gefolgt bin, dass Tausch die Isoëtes in 2 Seen, nämlich im Bistritzer und im Eisensteiner See (unter welchem dann der Teufelssee zu verstehen wäre) gefunden habe, zu berichtigen. Tausch selbst spricht in Flora

*) Es wird von der Isoëtes im Allgemeinen angegeben, dass deren Blätter nach $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{13}$ u. s. w. stehen; Prantl jedoch fand bereits seine „adventiven Sprosse“ auf Isoëtesblättern (eigentlich subaxilläre Brutknospen) „annähernd zweizeilig beblättert.“ Die aus dem Schwarzen See geholten kleinen Pflänzchen waren wohl Keimpflanzen: wenigstens konnte ich von Brutknospen auf den Blättern nichts bemerken.

**) Tausch in Flora 1834 (17. Jahrg.) I. Bd. Intelligenzblatt Nr. 1, im Inhaltsverzeichniss des im J. 1832 (od. 1833?) zuerst ausgegebenen Fasc. II der Plantae selectae. (Gleichzeitig gab Tausch das Herb. Fl. bohem. universale heraus.)

1819 nur vom Bistritzer See, und es findet sich keine spätere Angabe von ihm, dass er Isoëtes auch im Teufelssee entdeckt hätte. Dies Missverständniss entstand offenbar dadurch, dass Tausch den Schwarzen See einmal als Bistritzer, ein andermal (so im Herb. bohem.) als Eisensteiner See bezeichnet hat, was auch nicht unrichtig ist, da sowohl der Schwarze (Bistritzer, Deschenitzer oder Eisenstrasser) See, als auch der nahe gelegene Teufels- oder Görgl-See die Eisensteiner Seen genannt werden.

Auf Isoëtes echinospora Dur., die in den Schwarzwaldseen mit Isoëtes zusammenwächst, haben wir besonders geachtet und gefahndet, aber umsonst; sie scheint dort wirklich zu fehlen, oder müsste sie in noch grösserer, auch bei dem niedrigen Wasserstande noch unerreichbarer Tiefe hausen.

Gymnospermae.

Pinus montana Mill. Gottesgab: am Sonnenwirbel, unter dem Spitzberg, Gneisssteinbruch, Försterhäuser (Čf). Torfe bei Abertham!

† Pinus laricio Poir. Unterhalb des Radelsteins (C).

† Pinus strobus L. Bei Holic ein kleiner Waldbestand (J)!

Monocotyledoneae.

Lemna trisulca L. Pardubic häufig (J)! Stein-Žehrovic bei Kladno (Wt).

Lemna gibba L. Pardubic: nur im Teichel zwischen Svitkov und Popkovic (J)! Chrudim: Mühle Klobásov; u Kříže (Z). Wassergraben zwischen Woleschko und Libotejnic (C).

Lemna polyrrhiza L. Heřmanův Městec: bei Svinčan (Z). Tümpel beim alten Hafen in Lobositz (C). Waltsch: Liná-Teich und Waldtümpel unter der Ruine Neuhaus (Čf).

Najas marina L. In der abgedämmten Elbe zwischen Pistian und Gross-Černosek, sehr häufig (C)!

Caulinia fragilis Willd. Wie vorige, aber selten (C)!

Zanichellia palustris L. Jechnitz: Teich zwischen Obermühle und Brettsäge (Čf)!

Potamogeton pectinatus L. Im Kanal „Halda“ bei Pardubic (J)! Chrudim: Teich bei Bytovan (J)! Bach Wlkawa bei Alt-Lissa (J)! Im „Garrasch“ bei Lobositz (C)! Abzugsgraben des Karezský Teichs bei Strašic (J).

Potamogeton obtusifolius M. et K. Teich Hluboký bei Podhráz bei Holic (J)! Lomnic a. L.: Abzugsgraben des Sumpfes „na šancích“ (Wm)! Neuhaus: Tümpel zwischen dem Teich Weigar und Böhms Fabrik (St).

Potamogeton acutifolius Link. Niemes (Lorinser)!

β) major Fieb. Pflanze gross, minder ästig, Blätter länger, breiter, theilweise stumpf, zugespitzt. — Alt-Bunzlau: östlich von Bad Houška im Wiesengraben (Pk)! jedoch steril. Radbuzathal bei Pilsen, ebenfalls steril (Ha)! Die Exempl. sehen dem P. compressus L. ähnlich; da sie aber leider steril sind, so wage ich nicht zu behaupten, dass sie wirklich dazu gehören und rechne sie vorläufig zu Fiebers Varietät.

Potamogeton perfoliatus L. Pardubic: alte Elbe bei Rosic (J)!

Potamogeton praelongus Wulf. var.***brevifolius** m. Blätter länglich, in der Mitte am breitesten, nur 6 cm. lang (an die von P. perfoliatus erinnernd).

In der Adler bei Malšovic bei Königingrätz (U)!

Anm. Bei der Normalform sind die Blätter länglich-lanzettlich, zur Spitze allmählich verschmälert, bis 17 cm. lang.

Potamogeton lucens L. Bach Wlkawa bei Alt-Lissa (J)! Chrudim: bei Lipoltic im Teiche (Z)! Grosser Teich bei Waltsch, Duppauer Teich (Čf)!

Potamogeton gramineus L. β) heterophyllus. Teich Hluboký bei Holic, Čivice, Fasanerie bei Pardubic u. a. (J)! Chrudim: Podhůra (J)! Im Flüsschen Rožmitálka gegenüber dem Čimelicer Bahnhofe (D)!

Potamogeton rufescens Schrad. Tümpel bei Stěnkov nächst Hohenbruck [Třebechovic] (U)! Chotěboř: bei Libic, auch gegen Bílek zu (D)! „Bechyňská stoka“ bei Weselí (Wm)! Mirotic: im Bache über der Oberen Mühle (D)! Merklín: vor dem Dorfe Hráz (Čf).

Calla palustris L. Chotěboř: gegen Bílek zu (D)! Chrudim: Teich bei der Mühle bei Svidnic (Z). Neuhaus: auch im Tümpel nächst dem Waiger (St). Tábor: bei Kozí Hrádek*) an der Strasse nach Turovec (S).

Arum maculatum L. Pardubic: Nemošicer Lehne (J)! „v Úzkém“ bei Sezemic (J)! Chrudim: Panská stráň bei Ouřetic, früher auch im Hyksovo peklo, jetzt schon ausgerottet (Z).

---

*) Nicht: Husí Hrádek, wie in Folge einer irrthümlichen Angabe des Finders in den vorjährigen „Resultaten“ zu lesen.

Sparganium affine Schnitzl. Im Schwarzen See bei Eisenstein im Böhmerwalde, und zwar in einem durch theilweises Ablassen des Sees und Trockenlegung der linksseitigen Uferstrecke entstandenen flachen Tümpel unweit der Wehre, in Menge blühend! (von Čf entdeckt). Zweiter Standort im Böhmerwalde*).

Typha latifolia L. Um Königingrätz selten: Černilov bei Smiřic (U). Thiergarten bei Týniště (J)! Hoch-Weselí: im Teiche der Zuckerfabrik spärlich mit reichlicher T. angustifolia (Kb). Bilichau (Kb). Grosser Teich bei Waltsch (Čf). St. Benigna, Cheznovic (J). Chudenic: im Chocomyšler Teiche mit T. angustif. zahlreich!

Andropogon ischaemum L. Um Chrudim mehrfach (Z)! Um Welwarn verbreitet (Kb). Ředhošť, Peruc (Bš)! Um Lobositz häufig; zwischen Poplz und Ejvan bei Libochovic (C)! Südböhmen: im Moldauthal bei Podolsko (Ci)!

Panicum sanguinale L. b) ciliare (Retz sp.). Weingärten unterhalb des Lobosch (C)!

† Setaria italica P. B. Budyně: im Strassengraben (Bš)!

Setaria verticillata P. B. Pardubic: Feld unter der Nemošicer Lehne (J)! Gärten bei Welwarn (Kb). Schlan: zerstreut in Gemüsefeldern und an der Strasse zum Bahnhofe (Bk)!

Milium effusum L. Wälder na „Hradcích" bei Holic (J)! Chrudim: Fasanerie bei Ouřetic (Z)! Hain bei Hoch-Weselí, Wälle [Valy] bei Češov (Kb). Südl. Prager Gegend: Abhang am Teiche Vyžlovka bei Mukařov (J)! Hoher Reinstein bei Waltsch, Oedschlossberg bei Duppau (Čf)!

Stipa Joannis Čel. (S. pennata L. p. p. Autt. plur.) Abhang am Kieferwäldchen nächst der Strasse von Welwarn nach Weltrus spärlich; zwischen Podhořan und Nové Ouholice über der Kalk-

---

*) „Es ist übrigens nicht unwahrscheinlich, dass Sp. affine auch im Schwarzen See wächst, obgleich ich es dort bisher nicht bemerkt habe; ich finde nämlich eine ältere Angabe von J. Wagner (Opiz Naturalientausch 1828), dass er Sp. natans L. im Schwarzen See gefunden habe. Darunter könnte wohl eher Sp. affine als Sp. minimum Fr. gemeint sein, da letzteres in so hoher Lage kaum zu erwarten ist." (Čelakovský im Sitzungsber. d. böhm. Ges. d. Wiss. 1881. Über einige Resultate der botanischen Durchforschung Böhmens.) — Dr. A. Peter hat offenbar dasselbe Sp. affine am Schwarzen See (und nach ihm auch im Kl. Arbersee) im Vorjahre gleich uns gesehen, aber irrig für Sp. simplex f. fluitans genommen (Öst. Bot. Ztsch. 1886. N. 1 u. 2). Wagner nennt auch Sp. ramosum als am Schwarzen See wachsend, was ich bezweifle, da ich es dort nicht sah und überhaupt in solcher Höhe nicht vermuthen möchte.

lehne auf Sandboden ebenfalls spärlich (Kb). Prag: Abhang im Radotíner Thale (J)! Abhang über dem Schreckenstein! Ziegenberg bei Gross-Priesen (Wiesbauer)! Berg Rabney bei Türmitz (ders.)! Berg Rače [Ratschenberg] bei Stadic am linken Ufer der Biela, Phonolith (Wiesb.! s. Österr. Bot. Ztschr. 1885 n. 1. pag. 35). Liboritzer Wald bei Kriegern (Čf)! Heckelberg bei Klösterle (Čf)!

Stipa Tirsa Stev. Auf dem Radobýl bei Leitmeritz (F)!

Stipa Grafiana Stev. Radobýl (F)!

Stipa capillata L. Auf dem Chlumek bei Jungbunzlau äusserst spärlich (Hz)! Um Welwarn häufig (Kb). Zwischen Poplz und Ejvan bei Libochovic; am Debus bei Praskowitz (C). Zwischen Saaz und dem Abhange Pertsch (Čf)!

Leersia oryzoides Sw. Teich der Zuckerfabrik bei Hoch-Weselí häufig, Cidlina-Ufer unterhalb Veležic (Kb). Heřmanměstec (Z). Gräben bei Hnidous bei Kladno (Wt).

Coleanthus subtilis Seidl. Sumpfiges Ufer des mittleren Louňovicer Teiches (zwischen Říčan und Schwarz-Kostelec, noch am Horizonte der Prager Gegend), klein und spärlich, mit Limosella und Ranunculus Petiveri (Čf)!

* **Calamagrostis litorea** DC. (C. pseudophragmites Aschers., Arundo pseudophragmites Hall. fil., Arundo glauca M. Bieb.) Elbe-Kostelec: auf Flugsand an der Elbe, östlich von der Stadt, im Winkel, den die Elbe mit dem Verbindungsarm macht, ziemlich zahlreich (V)! Adler-Kostelec: am linken Adler-Ufer oberhalb der Mühle Podhorná unweit der Mandlovna (Hs)! Neu für Böhmen.

Calamagrostis lanceolata Roth. Neuteich bei St. Benigna (J)?

Calamagrostis Halleriana DC. Erzgebirge: Sonnenwirbel bei Gottesgab (forma mutica) (Čf)! und oberhalb Ober-Wiesenthal (ders.).

Alopecurus pratensis L. β. glaucus Sonder Fl. hambg, Čel. Auf Wiesen bei Kladno (Wt, als A. nigricans Hornem.)!

Phleum pratense L. β. nodosum (Phl. nodosum L.). Skuteč in Ostböhmen: in Weizenfeldern und auf Rainen in grosser Menge und nur diese Var. (auch mit spärlicher und kürzer gewimperten und theilweise kahlen Hüllspelzen)!

Phleum Boehmeri Wib. Pardubic (J)! Um Welwarn genug häufig (Kb). Welchen bei Gross-Priesen (F)! Berg Dewisch bei Welchau, Klösterle, Waltsch: am Oberbrenntenberg, Galgenberg (Čf)!

Anthoxanthum odoratum L. β) longearistatum. Plateau oberhalb B. Skalic gegen Ratibořic, Holzschlag im Eichwalde (Čf)!

Hierochloa australis R. & Sch. Krnčíthal bei Kladno (Wt)!

Sesleria coerulea Ard. Welwarn: Kalkabhang bei Radowic, zahlreich (Kb). Nemošicer Lehne bei Pardubic (J)! Turnau: farářství (Bělohlávek)!

Arrhenatherum avenaceum P. B. β) biaristatum (Peterm.). Auf dem Reinstein zwischen dem Prokopiberg und Filirschberg bei Waltsch (Čf)!

Ventenata avenacea Koel. Waltsch: zwischen Ruine Neuhaus und dem Galgenberg an der Strasse (Čf)!

† Avena orientalis Schreb. Bei Strašic zbir. gebaut (J)!

Avena pubescens Huds. Chotěboř (D)! Um Pardubic hier und da (J)! Chrudim (Z)! Kladno und Libušín (Wt)! Waltsch: am Hampelberg, Neuhaus (Čf)! Gratzen (T)!

Avena pratensis L. Hügel um Nelahozeves, Hleďsebe, Podhořan, Volanic (Kb.). Kladno und Libušín (Wt)! Chlumberg bei Pomeisl, Basaltplateau (Čf)!

Aira caryophyllea L. Chrudim: Anhöhe bei Hyksovo peklo (J)! Ufer des südl. Moldauthals bei Podolsko (oberhalb Klingenberg) (Ci)!

Aira praecox L. Teichgrund Veliká Čeperka bei Pardubic (J)!

Corynephorus canescens P. B. Holic bei Pardubic (J)! Chrudim: bei Škrovád mit Festuca myurus (Z)! Um Schlan verbreitet (Bk)! Gross-Holetitz bei Saaz, um Rudig gemein (Čf)!

Koeleria cristata Pers. Pardubic: hinter Studánka (J)! Radovic bei Welwarn, Kalkmergel (Kb). Libušín bei Kladno (Wt)! Weisse Lehne bei Pokratitz, Plänerkalk (F)! Waltsch, Podersam, Kriegern, Waffenhammer bei Warta (Čf)!

β) nemoralis Čel. Chlumberg bei Pomeisl (Čf)!

Koeleria gracilis Pers. Pardubic (J)! Um Welwarn gemein (Kb). Meierhof Hrabice [Rapitz] bei Kladno (Wt, als K. cristata)!

Koeleria glauca DC. Chrudim: Fasanerie bei Zaječic (J)!

Melica picta C. Koch. Haine bei Gr. Kostomlat a. Elbe (V). Abhänge der Seitenthäler der Moldau bei Dawle, häufig (V).

Melica uniflora Retz. Nemošicer Lehne bei Pardubic (J)! [ungewöhnlich niedrige Lage].

Melica ciliata L. α) transsilvanica (Schur). Leitmeritz: auch Weingärtenränder bei Čalosic (F)! Lobosch, Kletschenberg, Lhota-Berg bei Mileschau (C). Waltsch: Basaltfelsen bei der Liná-

Schäferei (Čf)! Welchau bei Schlackenwerth: am Dewisch und Stengelberg; Klösterle (Čf).

Sclerochloa dura P. B. Chrudim: gegen Dorf Topol (J)! Welwarn: bei der Zuckerfabrik, bei Unter-Kamenic, am Feldwege von Nabín gegen Hobšovic, überall spärlich (Kb).

Poa bulbosa L. Um Welwarn häufig (Kb). Pilsen (Zd. Jahn)!

Poa annua L. β) **varia** Koch. (P. supina Schrader). Auch im Erzgebirge: bei Abertham, besonders auf dem Plateau unter der Plessberg-Koppe, in Menge auf Triften und Wegen! Bisher nur aus dem Riesengebirge bekannt gewesen.

Poa fertilis Host. Hoch-Weselí: feuchte Schläge am Stříbrnicer Haine; Ufer der Cidlina unterhalb Veležic (Kb). Duppau: am Aubach vor Olleschau (Čf)!

Poa sudetica Haenke β) remota (Fr.). Im Isergebirge oberhalb Haindorf (Vandas)! dort bisher weder für Böhmen noch für Schlesien angegeben gewesen. Zbirover Wälder: im Walde am Wege von Strašic nach Holoubkau (J)! [Nach dem Podhorn bei Tepl der zweite Standort im inneren Lande].

Eragrostis minor Host. Am Wege von Kralup nach Libčic; im Bahngeleise zwischen Kralup und Welwarn; im Hofe der Welwarer Zuckerfabrik zahlreich (Kb). Pardubic: Feld bei Studánka, auch nächst der Realschule (J)!

Molinia varia Schrank β) silvestris Schlecht. Pardubic: im Waldschlage bei Černá, schön (J)! Wald „Háj" bei Hochweselí zahlreich; Farářství bei Turnau (Kb).

Atropis distans Griseb. Welwarn: Salzhaltige Wiesen bei der Zuckerfabrik, mit Triglochin maritima, Glaux, Scorzonera parviflora, reichlich! Kladno: Wassergraben an der Eisenbahn, selten (Wt)! Podersam: zwischen Letau und Lischwitz im Strassengraben (Čf)!

Glyceria fluitans R. Br. Im Böhmerwalde noch am Wege vom Prokop zum Schwarzen See, in feuchtem humosen Waldboden!

Glyceria plicata Fr. Nedošín bei Pardubic (J)! Gräben zwischen Kladno und Libušín (Wt)! Beřovic bei Schlan in Menge (Bk)! Waltsch: unter dem Dörflein Jamiken, Rudig bei der Bahn (Čf)! Schlackenwerth: beim Bahnhof (ders.). Písek: am Bache bei Vrcovic (Ci)!

β) depauperata Crép. Rispe einfach, öfter fast traubig, Äste derselben kürzer, Ährchen meist 7blüthig, Spelzen kleiner.

In den Ährchen ähnlich der G. nemoralis, aber die Nervatur der Spelzen wie bei der Normalform.

So z. B. beim Kohlenhäusel bei Waltsch (Čf)! Motol bei Prag (Kh)! Thal von Jahannisbad! (im Nachtr. z. Prodr. Böhm. irrthümlich unter G. nemoralis).

Festuca myurus L. Chrudim: bei Škrovád, Sandfluren (Z). Welwarn: Sandfelder bei Radowic (Kb). Přelic bei Schlan (Bk)! Woleschkathal bei Kladno (Wt). Petersburg: Waldhau unter dem Brenntenberg; an der Strasse vor Kotěschau (Čf).

Festuca glauca Lamk. Abhang über dem Schreckenstein bei Aussig!

Festuca arundinacea Schreb. Hoch-Weselí: Wiesen bei Veležic (Kb). Welwarn: Wiesen bei der Zuckerfabrik, schön! Grosser Teich bei Waltsch (Čf)!

× **Festuca loliacea** Curt. (F. elongata Ehrh., Lolium festucaceum Link, Festuca elatior × Lolium perenne). Locker rasig, Halme aus aufsteigendem Grunde aufgerichtet; Blüthenstand eine lockere ährenförmige Traube oder am Grunde einfach rispig, mit im Querschnitt 3eckiger etwas gedrehter Hauptaxe. Ährchen länglich, 6— mehrblüthig, die oberen fast sitzend, die unteren kurz gestielt, mit der Kante schief gegen die Hauptaxe gekehrt, die untersten auch länger gestielt, mit 1—2 kurzgestielten Seitenährchen.

Zwischen Duppau und dem Oedschlossberge an Wegen und Wiesenrändern, und am Bahnhof von Schlackenwerth an Wegrändern, immer nur unter den vermuthlichen Stammarten (L. Č. fil.)!

Festuca gigantea Vill. β) **breviaristata** m. Stengel niedriger, Blätter schmäler, Rispenäste kürzer, mehr aufrecht, angedrückt, Ährchen meist 4- (3—5)blüthig. Granne so lang oder wenig länger oder auch kürzer als die Spelze.

(Durch die gegen die Diagnosen verstossende kurze Granne von der sonst übereinstimmenden var. triflora Koch, Godr. = Bromus triflorus L. abweichend, vielleicht aber doch mit ihr zu vereinigen.)

Am Hohen Reinstein bei Waltsch, in 2 gleichen Expl. vorliegend (Čf)!

Festuca silvatica Villars. Heckelberg bei Klösterle, Oedschlossberg bei Duppau (Čf).

Brachypodium silvaticum R. & Sch. Heřmanův Městec (Z). Bilichauer Waldthal!

Brachypodium pinnatum P. B. Kalklehnen bei Skuteč! Chrudim (Z). Um Podersam, Pomeisl, Duppau (Čf).

Bromus racemosus L. Brandeis: feuchte Wiesen beim Bad Houška zahlreich (Pk). Schlan: feuchte Wiesen bei Beřovic (Bk)!

Bromus commutatus Schrad. Chrudim (J)! Prag: Scharka (Čf). Kladno: unweit des Engertschachtes (Wt, als B. racemosus)! Wegränder am Radobyl und bei Čalosic nächst Leitmeritz zahlreich (F)! Aussig!

Bromus mollis L. β) leiostachys Tausch. Říčan: beim Bahnhof (Čf)!

Bromus arvensis L. Hoch-Weselí: trockene Wiese bei der Zuckerfabrik (Kb). Pardubic; Habry bei Goltsch-Jenikau (J)!

Bromus asper Murr. (genuinus). Peiperzthal bei Bodenbach (F)! Schlan: „v ostrově" im Jedomělicer Thale (Bk)! Waltsch: Hoher Reinstein, Galgenberg (Čf).

Bromus erectus Huds. Nemošicer Lehne bei Pardubic (J)! Prag, Kanal'scher Garten (Čf)! Um Welwarn häufig (Kb). Schlan (Bk). Über dem Schreckenstein bei Aussig! Dewischberg bei Welchau (Čf).

Bromus inermis Leyss. Chrudim: Klobásov-Mühle (Z)! Um Welwarn häufig (Kb). Lehne oberhalb Měcholup [Michelob] bei Saaz, Rudig, Klösterle (Čf).

Triticum glaucum Desf. Waldränder bei Kladno, selten (Wt)! Zwischen Saaz und dem Abhang „Pertsch" (Čf). Berglehne oberhalb dem Schreckenstein bei Aussig, im Walde (eine Form, deren Blattscheiden sehr rauhhaarig, Spelzen meist behaart, kurz begrannt)!

Triticum caninum Schreb. Park von Pardubic (J)! Chrudim selten: bei Klobásov (Z). „Valy" bei Češov (Kb).

† Lolium multiflorum Lamk. Pardubic (J)! Bei Chrudim mehrfach (Z). Petersburg: Waldblösse unter dem Brenntenberg (Čf)! Klösterle: am Bahndamm und Wiesenrand (ders.). — Hat sich, besonders durch die Eisenbahnen, beinahe durch ganz Böhmen verbreitet.

Lolium remotum Schrank. Hoch-Weselí: im Lein bei Hrobičan (Kb). Unhošt im Lein (F). Leinfeld zwischen Rodisfort und Bad Giesshübel (Čf)!

Elymus europaeus L. Waltsch: Buchwälder am Hohen Reinstein (Čf)!

Hordeum murinum L. Chotěboř (D)! Chrudim (Z)!

Carex pauciflora Lightf. Erzgebirge: auch auf Torfen zwischen Gottesgab und den Försterhäusern (Čf)!

Carex pulicaris L. Chudenic: auch auf den Wiesen unter dem „Bade" gegen den Lotrow-Teich! Wiese bei Kletce bei Lomnic (Wm)!

Carex Davalliana Sm. Wiesen bei Skutč! Wiesen bei Holic mit Tetragonolob. siliquos. und Gent. pneumonanthe (J)! Böhm.-Skalic (Čf)! Wiese unter dem Berg Bába bei Kosmanos in der Richtung gegen Trenčín (Hz)! Lissa: „na viničkách" (J)! Um Chrudim häufig (Z)! Welwarn: häufig um die Zuckerfabrik, unterhalb Radovic, bei Chržín und Budohostic (Kb). Kladno: vom Krnčíthal bis Motyčín am Bache gemein; auch bei Hnidous (hier als C. pulicaris) (Wt)! Prag: bei St. Prokop (J)! Schweidnitz in Südböhmen: bei Wieden, selten (T)!

Carex teretiuscula Good. Böhm.-Skalic: sumpfige Wiesenstellen zwischen Dubno und Vysokov (Čf)! Sumpfwiese bei Hnidous nächst Kladno (Bk! Wt!). Bei Rudig, Sumpfstelle an der Bahn (Čf)! Wittingau: Sumpf beim obecní mlýn (Wm)! Sumpf „na šancích" bei Lomnic (Wm)!

Carex paradoxa Willd. Pardubic: unter dem Schlosse (J)! „Na viničkách" zwischen Alt- und Neu-Lissa a. E. sehr häufig (V)! Hnidous bei Kladno, mit C. Davalliana (Wt)! Sumpfwiesen bei Klösterle (Čf)! dann zwischen Rudig und Kriegern (Čf)! Auf Wiesen bei Schlackenwerth an der Strasse gegen Lichtenstadt viel!

Carex paniculata L. (a. squarrosa). Prag: nasse Wiese vor der Jenerálka, an der herabführenden Strasse (Čf)! Pilský rybník bei Mšec [Kornhaus] (Bk)! Böhm.-Skalic: Wiesen zwischen Dubno und Vysokov (Čf)!

Carex divulsa Good. (Durieu et Autt. recent. p. p. excl. C. Pairaei). Waltsch: Anhöhe hinter dem Parke, dann unter dem Prokopiberg auf dem Felsrücken „an den Fuchslöchern", zahlreich (Čf)! Jechnitz: Felsabhang nächst der Mittelmühle (ders.)!

Anmk. Die echte C. divulsa Good., von der mit Unrecht mit ihr identifizirten C. Pairaei F. Sch. durch aufrechte (nicht spaarige) Früchte und den Blüthenstand verschieden, ist in Böhmen jedenfalls viel seltener als letztere.

Carex canescens L. Říčan: unter dem Berge Tehov (Čf)! Sonnenwirbel bei Gottesgab (Čf)!

Carex elongata L. Chrudim: Sumpf bei der Mühle Klobásov, spärlich (Z)! Bei Říčan mit vorig. häufig (Čf)! Waltsch: Waldsumpf unter der Ruine Neuhaus (ders.)! Gratzen: in Niederthal und bei Sonnberg (T)!

Carex echinata Murr. Zwischen Říčan und dem Tehov (Čf)! Bei Waltsch, Petersburg, Jechnitz, Gottesgab u. s. w. (Čf). Sonnberg bei Gratzen (T)!

Carex remota L. Říčan: unter dem Tehov (Čf)! Nemošicer Lehne bei Pardubic (J)! Wälder bei Skutč! Hoher Reinstein bei Waltsch, Oedschlossberg bei Duppau (Čf).

Carex cyperoides L. Teich Hluboký bei Holic (J)!

Carex brizoides L. (genuina). Wiesen des Theresienthals bei Gratzen, sehr häufig!

Carex curvata Knaf. Chrudim: bei der Schwimmschule (Z)!

Carex Schreberi Schrank. Eichberg bei Podersam, Grosser Teich bei Waltsch (Čf)!

Carex disticha Huds. Böhm.-Skalic, mehrfach (Čf)! Welwarn: bei der Zuckerfabrik, bei Unter-Kamenic und weiter gegen Černuc (Kb). Unter der Burg Okoř (Čf)! Schlan: bei Beřovic (Bk)! Hnidous (Wt)! Ufer des Filirschteiches bei Waltsch (Čf)! Wiesen bei Schlackenwerth an der Strasse nach Lichtenstadt, dicht, wie gesäet!

Carex acuta L. b) tricostata (Fr). Böhm.-Skalic: Teichel zwischen Dubno und Vysokov (Čf)!

Carex Buekii Wimm. An der Elbe bei Kostelec a. E. (V).

Carex stricta Good. Wiese bei Hnidous viel (Wt)!

Carex digitata L. Chotěboř (D)! Chrudim: Hyksovo peklo und Podhůra häufig (Z)! Wälder zwischen Říčan und Schwarz-Kostelec (CP). Adelsberg, Neuhaus bei Waltsch, Chlumberg bei Pomeisl, Tannenberg bei Jechnitz, Heckelberg bei Klösterle (Čf)!

Carex humilis Leyss. Häufig auf Abhängen bei Nelahozeves [Mühlhausen], Radovic, um den Hain Lutovník bei Kralup (Kb). Anhöhe bei Klein-Kvíc bei Schlan (Bk)! Nadelwaldlehne zwischen Debře und Josefsthal bei J.-Bunzlau, nächst dem Wege nach Hrdlořez (Hz)!

Carex montana L. Böhm.-Skalic: Lehne gegen Ratibořic und Fasanerie (Čf)! Eichberg bei Podersam, Berg Neuhaus bei Waltsch, Chlumberg bei Pomeisl, Dewisch an der Eger gegenüber Welchau, Heckelberg bei Klösterle (Čf).

Carex pilulifera L. Prag: über dem Košířer Kirchhofe zahlreich (Čf); Dobřichovic (V); Říčan (CP)! Schwarzwald bei Joachimsthal (Čf)!

Carex umbrosa Host (C. polyrrhiza Wallr.). Prag: Wälder oberhalb Dobřichovic (V)! Kladno: Haide über dem Průhonschachte und im Walde Smuha (Wt)! Im Pfarrerwald bei Gratzen (T)!

Carex tomentosa L. Prag: Wiese bei Střešovic an der Strasse zur Jeneralka (Čf)! Krnčíthal bei Kladno (Wt)! Im „Háj" bei Hoch-Weselí (Kb). Böhm.-Skalic: Eichwald im Aupathale (Čf)!

Carex ericetorum Poll. Nemošicer Lehne bei Pardubic (J)!

Carex Buxbaumii Wahl. Waldwiese bei Skutč! V Kozlovech bei Lomnic a. Lužn. (Wm)!

Carex limosa L. Böhmerwald: Sumpf am Teufelssee bei Eisenstein (Čf)! Sumpf „na šancích" bei Lomnic a. L. (Wm)!

Carex glauca Scop. Böhm.-Skalic, häufig (Čf)! Liboritzer Wald bei Kriegern, um Waltsch, Litizau bei Schlackenwerth (Čf)! Südböhmen: Piberschlag bei Gratzen (T)!

Carex supina Wahl. Sandige Anhöhen bei Nelahozeves häufig, dann zwischen Rostok und Selc (Kb).

Carex silvatica L. Prag: bei Říčan (CP)!

Carex Hornschuchiana Hoppe. Kladno: am Südrande der Wiese bei Hnidous, auf einer kleinen Stelle (Wt)! [Ein vom Elbthal her weiter entfernter Vorposten].

Carex distans L. Böhm.-Skalic mehrfach (Čf)! Chrudim: vor Sobětuch häufig (Z)! Welwarn: sehr häufig bei der Zuckerfabrik, bei Unter-Kamenic, Budohostic (Kb). Kladno: von Motyčín bis Hnidous gemein (Wt)!

Carex flava L. (genuina). Skutč!

Carex lepidocarpa Tausch. Wiesen bei Elbe-Kostelec, in Menge (Kh)! Oschitz bei Böhm.-Aicha (S)! Zwischen Rudig und Kriegern (Čf)!

Carex Oederi Ehrh. Chrudim: na Podhůře (Z)! Říčan: Wiese zwischen Louňovic und dem Berge Tehov (CP). Erzgebirge: Sonnenwirbel bei Gottesgab; Wiesen bei Klösterle (Čf)!

Carex Michelii Host. Am Chlum bei Jungbunzlau (Hz)! Im feuchten Hain bei Lešan zahlreich, im Zádušní háj bei Nelahozoves mehrfach; auf der Kalklehne bei Hleďsebe mit Anemone silvestris und Clematis recta, spärlich (Kb).

Carex ampullacea Good. Bilichover Wälder (Kb). Rudig, Petersburg (Čf). Sonnberg bei Gratzen (T)!

Carex nutans Host. Sumpfwiese bei Hnidous nächst Kladno (Bk)!

Scirpus compressus L. Hoch-Weselí: am Volanicer Bache hinter Zběř (Kb). Hnidous bis Motyčín bei Kladno (Wt)! Rudig, Kriegern, Waltsch (Čf)!

Scirpus maritimus L. Südböhm.: Ufer der Otava bei Písek (Ci)! β. compactus Hoch-Beřovic bei Schlan (Bk)!

Scirpus radicans Schk. Teich Hluboký bei Holic (J)!

* Scirpus lacustris L. β. **fluitans** Coss. et Germ. (Fl. Paris.) (β. foliosus Mortensen? Nordost. Själlands Flora 1872). Blattscheiden am Stengel hoch hinauf reichend, alle oberen (ca 5—6) mit flachen linealen 4—6 mm. br., etwa fusslangen, im Wasser fluthenden Blattspreiten, deren oberste bisweilen emporgetaucht und aufgerichtet, schmäler und steifer.

Eine sehr eigenthümliche Form; die Blätter ganz ähnlich denen von Sparganium simplex var. fluitans. Ist zumeist in Frankreich verbreitet; auch in England (Babington), und wie es scheint, auch in Dänemark (Lange, Mortensen) *) bekannt. (Dass die oberste Blattscheide eine kürzere oder längere Spreite entwickelt, kommt zwar auch bei der gewöhnlichen Form vor, aber hievon ist β) fluitans noch bedeutend verschieden).

Lissa: im tieferen Graben mit fliessendem Wasser, der von den Hrabanower Torfen gegen Alt-Lissa sich hinzieht, in Menge!

Scirpus Tabernaemontani Gmel. Leitmeritz: Teich bei Čížkovic [Tschischkowitz] (C)!

Scirpus holoschoenus L. An der Strasse zwischen Byšic und Melnik (Hz)!

Scirpus setaceus L. Teich Hluboký bei Holic (J)! Chrudim: Wiesengraben hinter Kostelec, spärlich (Z). Petersburg (Čf)!

Scirpus pauciflorus Lightf. Sumpfwiesen westlich von Rudig und westlich von Kriegern (Čf)!

Scirpus uniglumis Link. Wiesen um Welwarn häufig (Kb). Um Kladno gemein (Wt)!

Scirpus ovatus Roth. Am Teiche Kosinář bei Bolewec nächst Pilsen in gutem Schlammboden in nie gesehenen riesigen, fusshohen, eine dichte Wiese bildenden Rasen!

β) Heuseri Uechtr. Am Šepadler Teiche bei Chuděnic!

Eriophorum vaginatum L. Im Torf des östlichen Ufers des Padrť-Teiches bei Strašic (J)!

Eriophorum polystachyum Roth. Jenikovice bei Hohenbruck (U)! Jesničany und Černá bei Pardubic (J)! Přelicer Thal bei Schlan (Bk)! Neuhaus: Torf des Wajgar-Teichs (St).

---

*) Nach Uechtritz in lit.

S c h o e n u s f e r r u g i n e u s L. Lissa: auch auf einem zweiten Standort bei Dvorce (V). Prag: bei Motol auf feuchter Wiese nur wenige Rasen (Kh)!

Schoenus nigricans L. Jungfer-Teinitz: im zweiten schmalen Parallelthal hinter dem Bilichauer Forsthause, am Fusse der waldigen Lehne in lehmigem Sumpfboden in grosser Menge (in einer ungewöhnlich lang- und dünnblätterigen Waldform)! (von Kabát entdeckt).*)

C y p e r u s f u s c u s L. Holic bei Pardubic, nicht häufig (J)! Synkow bei Adler-Kostelec (Hs)!

C y p e r u s f l a v e s c e n s L. Bei Holic hinter Poběžovic (J)! Chabry bei Goltsch-Jenikau (J)!

Juncus effusus × glaucus (J. diffusus Hoppe). Waltsch: Pfützen und Gräben bei der Ruster Mühle nächst Neudorf; Duppau: bei den Ziegelhütten, zahlreich (etwa 20 Stöcke); Schlackenwerth: ober Erlitzgraben bei Wickwitz (Čf)! Chuděnic: hinter dem Park am Wege nach Kaniček! bei Trnč; bei Schwihau: nächst Lhovic unter Kněžhora (Čf)! Überall unter den Eltern und meist mit fehl schlagenden Früchten, selten kapseltragend. Zum erstenmal für Böhmen sicher nachgewiesen.

J u n c u s f i l i f o r m i s L. Warta: vor Waffenhammer am Egerufer (Čf)!

J u n c u s a c u t i f l o r u s Ehrh. Moorwiese westlich von Rudig (Čf)!

J u n c u s s u p i n u s Mönch. Erzgeb.: oberhalb Joachimsthal, Torfe bei Gottesgab (Čf)! Chuděnic selten: unter dem Eugensberg (Čf)! Sonnberg bei Gratzen (T)!

J u n c u s G e r a r d i Lois. Welwar: bei der Zuckerfabrik mit Triglochin maritima (Pk)!

L u z u l a m a x i m a DC. Erzgebirge: zwischen Abertham und Joachimsthal nicht häufig!

L u z u l a p a l l e s c e n s Wahl. Pardubic (Bělohlávek)! Dvorce bei Lissa (V)!

---

*) Die Mittelform zwischen Schoenus ferrugineus und Sch. nigricans, die ich im vorigen Jahre als Bastard gedeutet und S. intermedius genannt habe, ist wohl identisch mit jener, welche, wie ich erst nachträglich erfahren habe, Chr. Brügger 1882 in den „Mittheilungen über neue Pflanzenbastarde" der Schweizer-Flora" beschrieben und ebenfalls als S. intermedius bezeichnet hat, daher Brügger als Autor dieses Namens zu gelten hat. Die von uns beiden unabhängig als Bastard erkannte Mittelform ist also bisher in der Schweiz und in Böhmen gefunden.

Tulipa silvestris L. Jungbunzlau: Grasplätze im Garten an der Kosmonoser Strasse gleich hinter der Stadt, ehemals häufig (Hz)!

Lilium martagon L. Homole bei Potenstein (J)! Böhm. Skalic gegen Ratibořic (Čf)! Chrudim selten: Hyksovo peklo, Panská stráň bei Ouřetic (Z). Eichberg bei Podersam, Ruine Neuhaus bei Waltsch, Berg Dewisch bei Welchau bei Schlackenwerth (Čf).

Gagea minima Schult. Fasanerie bei Pardubic (J)! Pěčicer Fasanerie bei Dobravic häufig (Hz)!

Gagea arvensis Schult. Pardubic: Fasanerie und Nemošicer Lehne (J)! Chrudim selten (Z). Felder bei Kladno (Wt)!

Gagea bohemica Schult. Kalklehne bei Hleďsebe nächst Weltrus spärlich; unfern vom Haine Lutovník auch sehr spärlich (Kb).

Ornithogalum umbellatum L. Chvojno bei Holic (U)! Chotěboř: im Parkwäldchen [liboháj] (D. nach J)!

Ornithogalum tenuifolium Guss. Um Kuttenberg häufig (F). Říčan: Wiesen zwischen Louňovic und dem Tehov (P).

† Ornithogalum nutans L. Jungbunzlau: auf der schönen Wiese [Krásná louka] einige Exempl. (Hz)! Chotěboř: im Schlosspark und im Spazierwäldchen [liboháj] (D)! Pumberg bei Chrudim (Karl Adámek)!

Scilla bifolia L. Kl. Černosek: in Zwetschkengärten massenhaft (C).

Allium ursinum L. Wildenschwert: Abhänge bei Landsberg (V).

Allium acutangulum Schrad. Um Königgrätz auf Wiesen und im Königgr. Walde, mehrfach (U)! Um Pardubic häufig (J)! Wiesen um Javorka unweit der Station Smidary in Menge (Kb).

Allium montanum Schm. Pardubic: Hügel bei Weska (J)! Říp (Fulín)! Hasenburg, Košťál (C). Chlumberg bei Pomeisl, Dewisch und Stengelberg bei Welchau, Heckelberg bei Klösterle (Čf)!

Allium vineale L. Um Pardubic mehrfach (J)! Bei Kladno auf Haideboden selten (Wt)! Saaz: gegen Pertsch, vor Holetitz; um Rudig und Kriegern auf Sandboden häufig (Čf)! Kotěschau bei Petersburg; Duppau; zwischen Welchau und Schlackenwerth (Čf). Písek: Berg Bohuslavic bei Vrcovic (Ci)! Sonnberg bei Gratzen (T)!

Allium scorodoprasum L. Chrudim: in Neumayers Garten, Fasanerie bei Ouřetic (Z)!

Allium rotundum L. Feldraine zwischen Welwarn und Černuc (Kb).

Muscari comosum L. Pardubic: bei Jesničan und Hradiště (J)! Chrudim: Felder bei der Burg Rabstein, häufig (J)!

Muscari tenuiflorum Tausch. Prag: auch bei St. Prokop (J)! Getraidefeld auf Kalkmergel am Abhange gerade über Bilichau, in Menge! Dreikreuzberg bei Gross-Černosek (C).

Muscari racemosum DC. Jungbunzlau: auf der Wiese im Schneidungswinkel der Prager und Koliner Bahn, ziemlich zahlreich (1884 Hz)!*)

Muscari botryoides DC. Jungbunzlau: Wiese am linken Iserufer bei Vinec spärlich (1884 Hz)!

† Hemerocallis fulva L. Leitmeritz: Weingarten am Fusse des Radobyl, einige Exempl. (C).

Anthericum liliago L. Libušín bei Kladno (Lichtnecker)! Heckelberg bei Klösterle (Čf).

Anthericum ramosum L. Kalklehnen nördlich von Skutč, zahlreich! Nemošicer Lehne und Weska bei Pardubic (J)! Neuköniggrätzer Wald und bei Krňovic nächst Hohenbruck (U)! Budyně (Bš)! Eichburg bei Podersam, Oberbrenntenberg und Chlumberg bei Pomeisl, häufig; Waltsch: auf Felsen bei der Liná-Schäferei, Liboritzer Wald bei Kriegern, Lehne gegenüber der Mittelmühle bei Jechnitz (Čf).

Asparagus officinalis L. Um Saaz nicht selten (Čf).

Polygonatum officinale All. Um Pardubic, Chotěboř mehrfach (J)! Haine bei Lešan, Nelahozeves, Hleďsebe (Kb). Kriegern: zwischen dem Liboritzer Wald und dem Kirchberg, Adelsberg bei Waltsch, Chlumberg bei Pomeisl (Čf).

Polygonatum multiflorum All. B. Skalic gegen Ratibořic (Čf). Neuköniggrätzer Wald und bei Chvojno (U)! Um Pardubic häufig (J)! Chrudim: Hyksovo peklo, Podhůra (Z). Bei Lešan, Nelahozeves mit voriger, aber viel zahlreicher (Kb). Hoher Reinstein bei Waltsch, Wickwitz bei Schlackenwerth (Čf). Wieden bei Gratzen (T)!

Polygonatum verticillatum All. Wald na Břevnici bei Chotěboř (D)! Böhm. Skalic: gegen Ratibořic (Čf)! Sonnenwirbel bei Gottesgab (ders.).

Paris quadrifolia L. Ratibořicer Hain bei Skalic (Čf)! Bei Königgrätz, Smiřic, Hohenbruck, Bolehošť häufig (U)! Chrudim: Hyksovo peklo (Z). Říčan: Wälder zwischen Louňovice und Jevany häufig (Čf)! Hoher Reinstein bei Waltsch, Tannenberg bei

---

*) M. racemosum ist nach Pohl's Tentamen schon von F. W. Schmidt bei Jungbunzlau angegeben worden.

Jechnitz, Oedschlossberg bei Duppau (Čf). Neuhaus: z. B. Heinrichschlag, Margareth (St).

Colchicum autumnale L. Um Chrudim und Heřmanov-Městec häufig (Z)! Westlich noch bei Rodisfort und Puchstein-Giesshübel, Wickwitz bei Schlackenwerth (Čf). Krumau: nur auf der Spitalwiese auf einigen Quadratklaftern, der Fischerswohnung gegenüber (Jungbauer).

Veratrum nigrum L. Ein heuriger Besuch der Bilichower Localität zur Blüthezeit ergab, dass diese Art auf den Nordgehängen des Smradovna-Thales nicht nur im Walde, sondern auch weiterhin auf dem mit niederem Buschwerke bewachsenen Theile hinter der Mühle, oft von Adenophora suaveolens begleitet, zahlreich wächst und in dieser sonnigen Lage auch häufiger und in oft riesigen Exemplaren blüht (wir fanden wenigstens 50 blühende Stöcke); einzeln kommt es auch auf dem Abhang des zweiten Parallelthals über dem Forsthause vor, dort aber nicht blühend.

Tofieldia calyculata Wahl. Moorwiese bei Vrutic nächst Melnik (Pl)! In beiden Bilichauer Parallelthälern auf feuchten grasigen Waldstellen und Waldwiesen häufig und sehr stattlich!

Triglochin palustris L. Hochweselí (Kb). Jungbunzlau: bei Sejčín, bei Řečkov (Hz)! Skuhrov bei Melnik (Pl)! Am Granatbach unter dem Radelstein (C)! Jechnitz, Rudig, Waltsch, Duppau (Čf)! — Písek: bei Vrcovic (Ci)! Přeseka bei Lomnic a. L. (Wm)!

Butomus umbellatus L. Morašic und Choltic bei Heřmanův Městec (Z). Stein-Žehrovic bei Lahna (Wt)!

Alisma plantago L. Var.:

α) cordifolium Čel. Prodr. Gemein.

β) lanceolatum Gren., Autt. boh. part. Blätter breit- bis schmal-lanzettlich, in den Blattstiel zugeschweift oder verschmälert, langgestielt. — Viel seltener.

γ) natans Čel. Blätter sehr langgestielt, z. Th. mit oval-spateliger Spreite auf dem Wasser schwimmend. — Dahin gehören mehrere der im Prodr. unter *γ*. graminifolium angegebenen Standorte, so wahrscheinlich: Münchengrätz! Jičín! Unhošt! — Ist von unseren Sammlern mehrmals für A. natans L. gehalten worden.

* **Alisma arcuatum** Michalet (A. lanceolatum Withering? A. ranunculoides Autt. boh. veter., Opiz Seznam, non L.). Bei uns (vielleicht ausschliesslich) an Teichufern und in Teichen.

Var. *α*) lanceolatum. Blätter elliptisch, länglich-lanzettlich bis lineallanzettlich, kurzgestielt. Die Landform, an Teichufern.

Chudenic: am Šepadler Teiche, am nördlichen Ufer (gegen Šepadly) an einer Stelle im Schlammboden in Menge, mit spärlicherem A. plantago (dieses am schilfigen Ufer gegen Ouboč in Menge), seltener am südl. Ufer! Teich bei Fischern bei Karlsbad (Presl fl. čech., als A. ranunculoides)? Schwarzer Teich bei Schlackenwerth (J. Reiss)! Am Postelberger Teiche (J. Knaf 1820)! Stadtteich bei Časlau (Opiz, als A. ranuncul. in Pohl Tent. fl. Bohem.)!

β) graminifolium Casp. (A. graminifolium Autt., an Ehrh.?, A. longifolium Presl in Sommers Topogr. XV., A. angustifolium Presl in Opiz Böh. phan. et cryptog. Gew.). Blätter langgestielt, in eine sehr schmale, lineale, vom Stiel wenig verschiedene Spreite allmählich übergehend oder ganz lineal grasartig. So in tieferem Wasser.

Teich bei Schlackenwerth (Presl)! Hirschberger Teich (Lorinser)! Teich bei Schlüsselburg [Lnáře] nächst Blatna (Velen.)!

Über die Unterschiede der beiden Alisma-Arten s. Österr. Bot. Ztschr. 1885. N. 11. und 12.

Sagittaria sagittaefolia Ĺ. Lipoltic bei Chrudim (Z). Kelštic*) bei Melnik (Pl)! Kleiner Padrťer Teich (J).

Hydrocharis morsus ranae L. Prag: im Teichel nächst der Bahnstation Hloupětín (Čf)! Oupor bei Melnik (Pl)! Bei Gross-Bělč und Blešno, Neudorfer Teich bei Týniště (U).

† Elodea canadensis Rich. em. Bei Salesl und Schönpriesen bei Aussig, bei Tichlowitz (Wiesbauer Österr. Bot. Zt. 1885 N. 11). Oupor bei Melnik (Pl)! Im Podoler Hafen bei Prag bereits so lästig, dass im laufenden Jahre eine behördliche Commission behufs Abhilfe abgehalten wurde.

Leucojum vernum L. Königgrätzer Wälder; wilder Park bei Správčic, Wald Chropotín bei Bolehošť und bei Ledec (U)! Borohrádek (Čeněk)! Um Pardubic häufig (J)! Slatinan bei Chrudim (ders.)! Goltsch-Jenikau (Pk). Kl. Černosek (C). Prag: im Walde bei Jiloviště (Rons). Lomnic a. Lužn.: Jednoty bei Novosed (Wm)!

Galanthus nivalis L. Paňská stráň bei Ouřetic nächst Chrudim (Z)!

Iris nudicaulis Lamk. (I. bohemica Schm.) Im Wopparner Thal gegenüber der Kaisermühle; Kahler Berg bei Borec; Berg Wostray bei Mileschau (C).

*) So heisst nach H. Plitzke das Wiesenland im Winkel zwischen Elbe und Moldau bei Melnik.

Iris sambucina L. Am Ratschenberg (320 M. hoher Phonolithberg) bei Hlinay und Stadic am linken Biela-Ufer; ob wild? (Wiesbauer).

Iris pseudacorus L. Ouřetic bei Chrudim (Z)! Říčany: Wiese bei Budy (Čf)!

Iris sibirica L. Pardubic: bei Jesničan und Černá, mit Trollius (J)! Chotěboř: Wiese unter dem Parke spärlich (D)!

Gladiolus imbricatus L. Hoch-Weselí: im „Háj" zu Seiten des Veležicer Weges reichlich; Stříbrnicer Hain, dann im Chotělicer Haine, ebenfalls häufig (Kb)!

Orchis purpurea Huds. Suttomer Berg bei Lobositz (C).

Orchis ustulata L. Pardubic: Kuněticer Berg, Jesničan, Nemošic (J)! Chrudim: im „Hyksovo peklo" (J)! bei Jandera's Mühle selten (Z)! Prag: Říčan (CP)!

Orchis coriophora L. Pardubic: bei Černá 1881 ein Exempl. (J)! Lissa: Wiese bei Dvorce (J)!

Orchis morio L. Prag: im Welwarner Haine häufig (Kb).

Orchis mascula L. Erzgebirge: am Plessberg bei Abertham zahlreich!

Orchis palustris Jacq. Elbgebiet: Gross-Kostomlat auf Schwarzboden; Wiesen vor Mratín bei Elbe-Kostelec (V). Vrutic bei Melnik selten (Pl)!

Orchis sambucina L. Erzgebirge bei Abertham: am Plessberg und gegen Jochimsthal, aber selten!

Orchis maculata L. Seč, Chotěboř, Holic, Chrudim (J)! Strašic zbir. (J)!

Orchis incarnata L. Auf Wiesen bei Lissa häufig (J)! Wiesen bei Mratín vor Elbe-Kostelec (V)! Teichwiesen unterhalb der Mühle Podhrad im Kokoříner Thale (Pl)!

Gymnadenia conopea R. Br. Wiesen unterhalb Ctětín bei Nassaberg (Z). Hyksovo peklo bei Chrudim (Al. Mencl)! Am Debisch gegenüber Welchau bei Schlackenwerth (Čf)!

Platanthera solstitialis Bönn. Chotěboř (D)! Kalkmergellehnen bei Skutč über Skutíčko! Um Pardubic häufig (J)! Podhůra u. a. bei Chrudim (Z). Strašic: am Padrťteich, Karezský und Tisý-Teich (J)! Um Waltsch, am Chlumberg bei Pomeisl (Čf)!

Platanthera chlorantha Cust. (Pl. montana Rchb. fil., nec Orchis montana Schmidt!) Chotěboř: gegen die Mühle „Horní mlýn" spärlich (D)! Čivice bei Pardubic (J)!

Ophrys muscifera Huds. Im Walde des Krnčíthales bei Kladno (Lichtnecker)!

Cephalanthera pallens Rich. Im Walde bei Hoch-Oujezd nächst Hohenbruck selten (U)! Pardubic: bei Studánka, Nemošicer Lehne (J)! Chrudim: auf der Podhůra und im Hyksovo peklo (J)! „Valy" bei Česov spärlich (Kb).

Epipactis atrorubens Schult. Jungbunzlau: im Nadelwald am linken Iserufer gegenüber Zvířetic zahlreich; auch bei Řečkov (Hz)!

Epipactis palustris Crantz. Hoch-Weselí: zwischen Hrobičan und Chotělic nächst der Bezirksstrasse (Kb).

Neottia nidus avis Rich. Holic, Chvojno, Čivic u. a. (J)! „Valy" bei Česov (Kb). Chrudim: Libáňer Thiergarten, Hyksovo peklo (Z). Hain bei Lešan (Kb). Bilichover Waldthal! Waltsch: am Neuhaus, Hohen Reinstein; Oedschlossberg bei Duppau (Čf)! Neweklov (J)!

Listera ovata R. Br. Böhm.-Skalic: im Hain vor Ratiboric und in der Fasanerie (Čf)! Pardubic mehrfach, Chrudim (J)! Bilichover Wälder (Kb).

Goodyera repens R. Br. Fichtenwald am Fusse des Egerberges bei Klösterle, zahlreich (Čf)!

Spiranthes autumnalis L. Skuteč: auf der Lehne östlich von Skutíčko (Quido Polák)! Parkwiese von Sichrow (Fr. Bělohlávek)!

Cypripedium calceolus L. Suttomer Berg bei Lobositz (C)!

Dicotyledoneae.

1. Apetalae.

Ceratophyllum demersum L. Hochweselí: im Teich der Zuckerfabrik, in der Cidlina bei Hrobičan (Kb).

Ceratophyllum submersum L. Chotěboř, steril (D)!

Hippuris vulgaris L. Adler-Kostelec: Tümpel hinter der Zuckerfabrik (D)! Jungbunzlau: am rechten schlammigen Ufer der Iser bei Vinec spärlich (Hz)! Lissa: auch im Graben, der von den Hrabanov-Torfen gegen Alt-Lissa fliesst! Im „Garrasch"*) bei Lobositz (C)! Zlonic: im Teichel hinter dem Pfarrgarten (Bk)!

Callitriche stagnalis Scop. Pardubic: Waldgraben bei Černá hinter Bor (J)!

Euphorbia exigua L. Pardubic, Holic (J)! St. Benigna (J). Um Saaz, Waltsch, Schlackenwerth, Klösterle (Čf)!

*) So heisst das alte Elbbett, welches die Lobositzer Insel bildet (Conrath).

Euphorbia platyphylla L. Melnik (Pl)!

Euphorbia dulcis L. Ratibořic bei B. Skalic (Čf)! Říčan: Wald bei Jevan (Čf). Theresienthal bei Gratzen!

Euphorbia angulata Jacq. Prag: im Kundraticer Wald (Pl)! Vor Davle auf den Lehnen der am rechten Moldauufer gelegenen Seitenthäler häufig (V).

Euphorbia palustris L. Melnik: Wiese Turbovka bei Kelštic, mit Serratula (Pl)!

Euphorbia Gerardiana Jacq. Um Nelahozeves häufig, bei Hleďsebe (Kb). Obstgarten bei Bakov bei Zlonic (Bk)!

Euphorbia amygdaloides L. Pardubic: auf der Nemošicer Lehne, dann am Feldraine bei Vostřešan (J)! Chrudim: ausser bei Strádov auch im Kochanovicer Thiergarten, aber vereinzelt (Z)!

Euphorbia lucida W.K. Gr. Kostomlat bei Nimburg (V).

Euphorbia virgata W.K. Prag: St. Prokop, Feld bei der ehemaligen Mühle (J)! Feld beim Gloriett der Cibulka (J)! Felder zwischen Welwarn und Černuc (Kb). Schlan: gegen Knovíz (Bk)! Ladowitz zwischen Dux und Bilin (F).

Mercurialis annua L. Um Pardubic und Chrudim häufig (J)!

Alnus incana DC. Jungbunzlau: in den Choboty und im Hradecer Thale ziemlich zahlreich (Hz)! Theresienthal bei Gratzen!

Alnus viridis DC. Gratzen: auch auf den Hügeln vor der Stadt von der Station aus!

Betula pubescens Ehrh. Neuhaus: in den Wäldern über Svoboda's Mühle (St)!

† Castanea sativa Mill. Am Kuněticer Berge bei Pardubic ein alter grosser Baum (J)! Wopparner Thal bei Lobositz; im Eichgebüsch unterhalb der Kubačka gegen Dubkovic (C).

† Salix Schraderiana Willd. (?) (S. bicolor Tausch!). Gratzen am Bache bei Neugebäu im Theresienthale mehrere Sträucher, wahrscheinlich angepflanzt! Am Böhmdorfer Teiche beim Forsthause Jakule (T)! schon früher von Kalbrunner als „S. bicolor Ehrh." angegeben. (Wohl hybrid aus S. phylicaefolia L. (Fr) und aurita L.)

Salix viminalis × purpurea (S. rubra Huds.). Theresienthal bei Gratzen!

Salix repens L. *a)* genuina. Bei Lissa häufig (J). Bilichover Wälder (Kb).

b) rosmarinifolia (L.). Prag: oberhalb Hodkovičky im Wiesen graben mit S. cinerea (C & Ha)! Wiese westlich von Rudig (Čf)!

Salix cinerea × repens (rosmarinifolia). Wiesengräben bei Hodkovičky mit den Stammformen (C & Ha)!

Parietaria officinalis L. Jungbunzlau: Neuberg im Parke (Hz)!

Atriplex nitens Schk. Um Welwarn, besonders um die Zuckerfabrik, häufig (Kb). Oupor bei Melnik (Pl)! Lobositz (C).

Schizotheca hastata Čel. Bahnhof bei Königgrätz (U)! Welwarn (Kb). Elbufer gegenüber Lobositz (C)!

Schizotheca oblongifolia Čel. Um Welwarn häufig (Kb). Lobositz gegen die Weinberge; Steinbrüche in Gross-Černosek (C)!

Schizotheca tatarica Čel. (Atripl. laciniata Koch). Um Welwarn häufig (Kb). Mauern in Pistian bei Lobositz (C)!

Schizotheca rosea Čel. Unter-Polanky bei Hohenbruck (U). Welwarn (Kb).

Chenopodium rubrum L. Oupor bei Melnik (Pl)!

Chenopodium urbicum L. (*a.* deltoideum). Adler-Kostelec nur an einer Stelle in der Stadt (Hs)! Slatina unter der Hasenburg (C)!

Chenopodium murale L. Welwarn (Kb).

Chenopodium opulifolium Schrad. In Kladno und Hof Hrabic (Wt)! Gross-Černosek (C)!

Chenopodium ficifolium Sm. Welwarn (Kb)! Schlan: Gemüsefelder und Strassengraben bei Michálek's Mühle (Bk)!

Salsola Kali L. Welwarn: bei Gross-Bučina, Uha (Kb). Woleško, Felder zwischen Pistian und Černosek (C).

Polycnemum arvense L. (*a.* minus). Welwarn: bei Uha, Chržín und an der Bahn gegen Kralup (Kb).

Albersia blitum Kunth. Chrudim: in Gärten häufig (Z)! Felder bei Kladno (Lichtnecker).

Amarantus silvestris Desf. Prag: im unteren Theile des Strahover Gartens am Laurenziberg, in Menge (F)!

Rumex maritimus L. *a*) aureus. Grosser Teich bei Waltsch (Čf)! Klösterle, Schlackenwerth (ders.). Němčicer Teich bei Neugedein (dort mit R. palustris Sm.), in Trnč bei Chudenic (Čf)!

Rumex obtusifolius L. *b*) agrestis. Bachufer bei Skuhrov bei Melnik (Pl)! Oberhalb Joachimsthal (Čf). Klattau, Košenicer Hof bei Chudenic!

Rumex obtusifolius × crispus (R. pratensis M. et K.). Unhošt (F). Kotěschau bei Petersburg mit den Eltern (Čf)! Chudenic: beim „Bad“ und im Städtchen an der Strasse nach Vyšensko mit den Eltern! bei Lučic, Kaničky, Hráz bei Merklín, Svrčoves (Grillendorf) bei Dolan (Čf)!

Rumex maritimus (aureus) × crispus. Blätter etwas kraus, länglich, die oberen lanzettlich, in den Blattstiel verschmälert. Die unteren Scheinwirtel etwas entfernt, die übrigen sehr genähert, zumeist von Blättern gestützt, nur die obersten blattlos. Klappen 3eckig-eiförmig, zugespitzt, herzförmig, erhaben netzaderig, beiderseits mit mehreren lanzettlich-pfriemlichen, verlängerten, theilweise aber kurzen Zähnen. Schwielen lanzettlich, gelblich oder geröthet.

Der vorgenannte Bastard (R. pratensis), obwohl ähnlich, unterscheidet sich durch grösstentheils blattlose Scheinquirle, viel kürzere, weniger pfriemliche Zähne und dickere Schwielen der Fruchtklappen. — Die Beschreibung, die Haussknecht von seinem R. obtusif. × crisp. (R. fallacinus Hkn.) giebt, passt nicht ganz auf unsere Form, die jedoch den angezeigten Bastardcharakter sehr evident zur Schau trägt.

Klösterle: im Thale oberhalb Ketwa am Bache (Čf)!

Rumex hydrolapathum Huds. Torfe bei Lissa! Stein-Žehrovic bei Lahna (Wt)! Tümpel vor Praskowitz; im Wopparner Thale am Teiche bei der Neumühle (C)!

Rumex acetosa L. *b)* thyrsiflorus (Bluff et Fing. sp.). Zwischen Gross-Priesen und Welchen (F)!

Polygonum bistorta L. Rudig, Duppau (Čf).

Polygonum minus Huds. Chudenic: Wiesen am Šepadler Teich in Menge, roth und weissblühend; am Merkliner Teich auch weissblühend! Filirschteich bei Waltsch (Čf).

Polygonum dumetorum L. Am Rothen Bach bei Welwarn (Kb).

Daphne mezereum L. Černá bei Pardubic, „na Kamencích" bei Holic (J)! Farářství bei Turnau (Bělohlávek)! „Valy" bei Češov reichlich; Bilichover Wälder (Kb). Berge und Wälder bei Welchau, Klösterle, Waltsch, Duppau, Kriegern (Čf).

Thesium rostratum M. & K. Im zweiten Bilichover Parallelthal auf einer Waldwiese im Thonboden, mit Schoenus nigricans, Cirsium pannonicum u. s. w. in beträchtlicher Menge! (Zweiter sicherer Standort in Böhmen, von Kabát aufgefunden).

Thesium pratense Ehrh. Pilsen (Zden. Jahn)! Bei Buchwald nächst Ferchenhaid im Böhmerwalde (Ha)!

Thesium intermedium Ehrh. Zwischen Chržín und Sazená bei Welwarn (Kb).

Thesium montanum Ehrh. Am Fuss des Egerberges bei Klösterle (Čf)!

Loranthus europaeus L. „Valy" bei Češov, ziemlich reichlich (Kb). Nelahozeves: im Zádušní háj (ders.). Bei Jungbunzlau häufig (Hz)!

Viscum album L. Bei Malč nächst Chotěboř auf Apfel- und Birnbäumen, breitblättrig (D)! Im fürstlichen Parke bei Heřman-Městec, auf Pappeln, sehr breitblättrig (J)!

Aristolochia clematitis L. Hochweselí: Feld unter dem Kirchhofe (Kb). Chrudim: in Worel beim Hofe sehr reichlich (Z).

2. *Sympetalae.*

Bryonia alba L. Im Gestein am Oberbrenntenberg bei Pomeisl (Čf)!

Phyteuma spicatum L. Hoher Reinstein bei Waltsch, Chlum bei Pomeisl (Čf). Heinrichschlag bei Neuhaus (St).

Phyteuma orbiculare L. Wald Chropotín bei Bolehošť (U)! Dymokur: über dem Jakobsteiche einzeln (Hz)! Wiesen bei Dvorce nächst Lissa, häufig (J, Kh). Bilichover Wälder (Kb).

Campanula glomerata L. Um Königgrätz häufig; Hohenbruck und Hochoujezd, Hrádek bei Nechanic, Unter-Přím, Wald Ouliště bei Piletic, zwischen Sendražic und Račic (U)! Chrudim (Adámek)! Košťál bei Trebnitz (C)! Fuss des Egerbergs bei Klösterle; zwischen Bad Giesshübel und Rodisfort, Chlum bei Pomeisl, um Waltsch (Čf)! Moldaufelsen bei Křenek oberhalb Worlík zahlreich (Ci)!

Campanula bononiensis L. Lobosch; im Wopparner Thal gegenüber der Kaisermühle (C)!

Campanula latifolia L. Südböhmen (erster Standort): Bad St. Margareth bei Prachatic*) (Frau Jelínek-Doubek)!

Adenophora liliifolia Bess. Leitmeritz: auch bei Nemtschen in der Mulde zwischen Matrai und dem Lerchenberge (C)! unweit des Babina'er Standorts.

Xanthium strumarium L. Um Jungbunzlau häufig (Hz)! Welwarn, Uha, Minkovic (Kb).

Xanthium italicum Mor. Elbufer in Kelštic bei Melnik (Pl)!

Xanthium spinosum L. Am Bahnhof bei Pardubic einmal (J)! An der Strasse von Welwarn nach Weltrus (Kb).

Lapsana communis L. *a*) glabrescens. Stengel schlapp, dünn, schwachkantig, entfernt beblättert, unterwärts flaumig oder rauhhaarig, oberwärts kahl oder mit zerstreuten Drüsenhaaren. Blätter oberflächlich geschweift-gezähnt, die oberen einfach. Blüthenstand langzweigig, locker, mit einer geringeren Zahl grösserer Köpfchen, deren Stiele z. Th. mehr-

*) Das vorliegende Exemplar hat 2blüthige untere Traubenzweige und an der Basis der Blüthenstiele inserirte Vorblättchen!

mals länger als die Hülle. Hievon giebt es oberwärts am Stengel ganz kahle und mehr oder weniger drüsenhaarige Formen (f. pubescens Klett und Richter Fl. v. Leipzig 1830), welch' letztere in der Behaarung den Übergang in *b*) bilden. Dies die allgemein verbreitete Form.

* *b)* **hirsuta** Peterm. fl. lips. excurs.*) (*β*. pubescens Rchb**). Lapsana pubescens Bernh.?). Stengel kräftig, steif, vielkantig-gefurcht, reichblätterig, typisch über 2′ hoch, oberwärts nebst Ästen und Rispenzweigen dicht drüsenhaarig, nur die kurzen Kopfstiele und Hüllen kahl oder fast kahl. Blätter genähert, schärfer geschweift-gezähnt, bis hoch hinauf am Stengel leierförmig mit ovalem spitzen Endzipfel und kleinen schmalen Seitenzipfeln. Blüthenstand reichästig, doldentraubig-rispig; Doldentrauben am Ende des Stengels und der Äste gedrungen reichköpfig; Stiele der kleineren Köpfchen so lang oder wenig länger als die Hülle.

Eine ausgezeichnete, noch weiter in der Natur zu prüfende, nur von wenigen Floristen erwähnte Form, von so eigenem Habitus, dass man sie, gäbe es nicht gewisse Übergangsformen, zunächst für eine eigene Art halten möchte.

Bei Potenstein an der Strasse nach Sopotnic, etwa gegenüber dem Maierhofe Berna, in Mehrzahl (Häusler)! Franzensbad? (Bracht 1837)! Dieser Standort darum nicht ganz sicher, weil beim Zettel, der einfach nur Lapsana communis lautet, auch ein Exempl. der Var. *a)* liegt und möglicher Weise eines der beiden ungleichartigen Exemplare, und vielleicht gerade *b)*, im Herbar unter Verlust eines anderen Zettels zufällig zur Bracht'schen Etiquette gekommen ist.

Arnoseris pusilla Gärtn. Westlich von Rudig mehrfach; zwischen Rudig und Kriegern, zwischen Petersburg und Woratschen (Voráče), Jechnitz: bei Kotieschau, Podersam: vor dem Eichberge (Čf)!

Crepis rhoeadifolia M. B. Zwischen Saaz und Weletitz bei der Ziegelei; Basaltberg Chlum bei Mĕcholup [Michelob], zwischen Mĕcholup und Schellesen [Železná]; Eisenbahndamm bei Rudig (Čf).

† Crepis nicaeensis Balb. Wiesen bei Elbe-Kostelec (V).

---

*) „elatior, tri-quadripedalis, valida, caulis crassus, sulcatus, densissime glanduloso-hirsuto-villosus, folia hirta, acuta, subsinuato-dentata, petiolo longe auriculato." (Peterm. fl. lips. sec. Cl. Uechtritz).

**) „Denso indumento fere tomento tota obducta, canescens, humilior (?), folia breviora, panicula corymbosa, magis contracta. Nur auf hochgelegenen, sonnigen Aeckern." Rchb. Fl. germ. excurs.

Crepis praemorsa Tausch. Chrudim: Wiesen „v Řišti“ nicht häufig (Z). Kladno: Lehne bei Hnidous (Bk)!

Crepis paludosa Mönch β) brachyotus Čel. Wiese westlich von Rudig (Čf)!

Hieracium floribundum Wimm. Jungbunzlau: bei Zámost und Pěčic selten (Hz)! Erzgebirge: bei Ober-Wiesenthal (Čf)! und um Weipert überall in vielen, sehr häufig auch in gabelästigen Formen (F)! Lomnic a. Lužn.: Ufer des Teiches Naděje (Wm)!

Hieracium pratense Tausch. Welchen bei Gross-Priesen (F)! Lomnic: beim Hofe Šaloun spärlich (Wm)!

Hieracium collinum Gochn. Tausch.*) Bergwiesen bei Welchen bei Gross-Priesen (F)!**) Berg Dewisch gegenüber Welchau bei Schlackenwerth (mit H. praealtum genuinum) (Čf)!

Hieracium cymosum L. *a)* poliotrichum Wimm. Zwischen Saaz und Weletitz (Čf). In Böhmen die verbreitete Form.

b) **pubescens** Wimm. (Lindb.) (H. glomeratum Fröl. p. pte, H. cymigerum Rchb.). Stengel, Blätter, Inflorescenzstiele und Hüllkelche mit spärlicheren kurzen Borsten, die beiden letzteren aber mit reichlichen schwarzen Drüsenhaaren. Köpfchen etwas grösser. — Hieher H. attenuatum Tausch hb. boh.!

Bei uns wohl selten, wenigstens selten beobachtet; scheint mehr nördliche Form. Bei Karlstein (Tausch)! Erzgebirge: Wegränder zwischen Weipert und Neugeschrei (F)! Schatzlar (nach Näg. & Pet.).

Hieracium setigerum Tausch. Am Ratschenberg nächst dem Bielaflusse bei Stadic (Wiesbauer).

Hieracium Schmidtii Tausch. Prag: Felsen vor der Jenerálka (Čf)! Am Ratschenberg bei Stadic, Phonolith (Wiesbauer). Heckelberg bei Klösterle (Čf)! Kieselschieferfelsen bei Waffenhammer bei Warta (ders.)! Am Debisch gegenüber Welchau unweit Schlackenwerth (ders.)!

---

*) Nägeli und Peter erklären wiederum das H. pratense Tausch für das wahre H. collinum Gochn., was meiner Überzeugung nach gewiss irrig ist.

**) Freyn hält diese Pflanze für ein H. pratense × praealtum (nach Freyn selbst = H. arvicola Näg. et Pet., obwohl die Autt. dieses bestimmt für nicht hybrid erklären), ich sehe aber ausser kürzeren, schwächeren Borsten als gewöhnlich auf der Oberseite der sehr lang blattstielartig verschmälerten Blätter keinen besonderen Unterschied von H. collinum, namentlich in den Köpfchen nicht und möchte daher das Consortium von H. pratense und praealtum für zufällig halten. Wäre dies dennoch obiger Bastard, so wäre ein solcher von echtem H. collinum schwer zu unterscheiden.

* **Hieracium graniticum** Schulz bip. Grundblätter zahlreich, gestielt, etwas derb, steiflich, seegrün, eiförmig bis länglich, stumpf oder spitz, am Grunde gerundet bis herzförmig, entfernt kleingezähnt oder am Grunde grobgezähnt, am Rande und öfter auch auf der Oberseite borsthaarig, unterseits am Mittelnerven und am Blattstiel zottig. Stengel 1blättrig oder blattlos, unten zerstreut borstig, sonst kahl, oben sammt Blüthenzweigen sternhaarig und mit zerstreuten, feinen, schwärzlichen Drüsenhaaren, doldentraubig, meist nur 3—5köpfig, mit geraden oder etwas bogigen Kopfstielen. Köpfchen breit, bauchig. Hüllschuppen langzugespitzt, dunkelgrün, am Rande blass und besonders jung weissfilzig, sonst feinborstig und oberwärts gewimpert. Blumenkronen kahl, goldgelb. Griffel gelb.

Durch die bauchigen Köpfe und deren, wie auch der Kopfstiele, Behaarung die gelben Griffel und die seegrüne Farbe der mehr weniger steifborstigen Blätter dem H. Schmidtii sich anreihend, aber durch die Blattform dem H. murorum sich nähernd.

Var. quarciticum (H. quarciticum Freyn in scheda ad interim!). Blätter etwas minder steif, dunkler gesättigter seegrün, oft entschiedener herzförmig, öfter unterseits purpurroth gefärbt, auf der Oberseite (wie übrigens bei var. typicum Uechtritz auch) ziemlich kahl oder nur gegen die Spitze zerstreut feinborstig, Borsten feiner und minder steif. Ligulae kurz, nur um $^1/_3$ länger als der Hüllkelch. H. 20—25 cm.

Durch die feinere Behaarung nähert sich diese Var. auch dem H. praecox Schulz bip.! welches auch graugrüne und nicht derbe Blätter besitzt, aber keine bauchigen Hüllen wie H. graniticum und Schmidtii, und wohl kaum von H. murorum zu trennen ist. Übrigens variirt die Stärke und Steifheit der Borsten bei den mährischen Formen des H. graniticum auch sehr; bei var. multisetum Uechtr. sind sie so steif wie bei H. Schmidtii, bei var. typicum Uechtr. wenig stärker als bei unserer Form. Die Ligulae sind bei der mährischen Pflanze beträchtlich länger, fast doppelt so lang als der Hüllkelch. Freyn hat laut scheda unsere Form nur vorläufig als Art benannt, indem er sich das Urtheil über deren Stellung noch vorbehielt. R. v. Uechtritz, der die Form gesehen hat, spricht sich brieflich nicht bestimmt über sie aus, indem er sagt, dass sie vom H. graniticum „vielleicht wirklich verschieden ist, obwohl dieses auch variabel genug auftritt." Mir erscheinen aber die Unterschiede des H. quarciticum doch schon jetzt nicht ausreichend zur specifischen Trennung vom H. graniticum.

Blüht Ende Mai bis über den halben Juni hinaus, gegen Ende dieses Monats zumeist schon verblüht und fruchttragend. Prag: im Šárka-Thale auf den Quarzitfelsen gegenüber der Generálka (1884 von Freyn entdeckt)!*)

---

*) H. graniticum fehlt in Garcke's Fl. v. Deutschl. Ich sah es von „Basaltklippen des Herzsteins bei Elgershausen unweit Cassel" (Zabel), bereits

Hieracium murorum L. *a)* genuinum. Blätter von weicher Consistenz, oberseits grasgrün, weichbehaart und gewimpert.

Hiezu *β)* atrovirens (H. atrovirens Fröl., H. mur. *B.* autumnale Schulz bip.). Grundblätter trüb dunkelgrün, unterseits blasser, stärker graugrün, oval oder länglich, nur klein gezähnelt, am Grunde abgerundet oder in den längeren Blattstiel herabgezogen. So z. B. am Heckelberg bei Klösterle, Basalt (Čf)!

b) * **cinerascens** (Jord. sp., Fries Epicrisis, Hierac. europ. exsicc. n. 76!) Blätter derber, oval, drüsiggezähnelt, theilweise am Grunde deutlicher gezähnt, bisweilen auch die inneren grobgezähnt, graugrünlich, beiderseits und am Rande dicht borsthaarig, kurzgestielt, Blattstiel nebst Mittelrippe der Unterseite dicht und lang weisszottig. Stengel mit kleinem tiefstehenden Blatt, oben sammt Blüthenzweigen mit reichlichen langen Drüsenhaaren. — Die Pflanze Bordère's von Gèdre in den Pyrenaeen ist ganz die unsrige, auch die Beschreibung in Grenier's Fl. d. France passt gut, bis auf die gelblichen Griffel, die bei unserer und bei der Bordère'schen Pflanze wie bei H. murorum sonst rauchgrau sind. Es variirt aber die Griffelfarbe auch bei murorum genuinum bis ins Gelbliche.*)

Auf Basaltfelsen bei der Lina-Schäferei bei Waltsch (Čf)! recht typisch. Auf dem Eichberge bei Podersam sehr schön, aber mit tiefgezähnten oberen Blättern (ders.)!

Anmerkung. Obwohl dieses typische H. cinerascens recht auffallend aussieht kommen doch Übergänge in *a)* genuinum, und zwar in *β.* atrovirens vor. Eine solche mit weit weniger steifborstigen Blättern sammelte mein Sohn am Adelsberge bei Waltsch, eine andere mit länger gestielten, trübgrünen, spärlicher und weichbehaarten Blättern, von denen nur die ersten steifborstig und kurzgestielt sind, derselbe am Heckelberge mit typischem *β)* atrovirens.

Hieracium gothicum Fr. Erzgebirge: Abhang des Sonnenwirbels bei Gottesgab (Čf)!

Prenanthes purpurea L. Hochoujezd, Týniště, Smiřic, Litic bei Potenstein (U)! Brandeis a. Adl. (J)! Prachower Felsen bei Jičín (Smolař). Kokořín (Pl)! Heřman-Městec: hinter Vyžic (Z)! Buchwald bei Jevan bei Schwarz-Kostelec (Čf)! Strašice (J)! Um

---

von Uechtritz dafür bestimmt. Von diesem bemerkte Uechtritz, es komme dem H. quarciticum besonders nahe.

*) Auch das schlesische, von Uechtritz schon früher als Var. des murorum erkannte cinerascens stimmt ganz mit dem von Waltsch überein, wie vom Hn. von Uechtritz, dem ich überhaupt die Aufklärung über diese Form verdanke, eingeschickte Exemplare bezeugen.

Waltsch, Duppauer Gebirge, Schlackenwerth, Klösterle (Čf)! Neuhaus: Heinrichschlag, Margareth (St). Gratzen: auch im Theresienthale!

Lactuca perennis L. Hasenburg, Suttomer Berg, Lhota-Berg bei Mileschau (C). Am Abhang über dem Schreckenstein häufig!

Lactuca quercina L. Jungbunzlau: bei Dolní Krnsko am rechten Iserufer selten (Hz)!

Lactuca viminea Presl. Bei Vrcovic nächst der Píseker Strasse, selten (Ci)!

Lactuca saligna L. Königgrätz: an der Strasse zwischen Bukovic und Dříteč (U). Kladno: an der Strasse nach Brandeisl (Wt)! Wegränder zwischen Saidschitz und Kosel (C)!

Chondrilla juncea L. Saaz: auch zwischen Holetic und Bukovina, und hinter Bukovina gegen Měcholup häufig; Sandböden bei Rudig und Kriegern (Čf)!

Willemetia hieracioides Monn. Gratzen: bereits im Theresienthale, in niedrigerer Lage!

Taraxacum palustre DC. Lissa: Torfwiesen na Hrabanově!

Hypochoeris glabra L. Kotěschau bei Petersburg; um Rudig häufig (Čf)!

Leontodon autumnalis L. β) trichocephalus Neilr. Felder und Raine oberhalb Chudenic gegen Vyšensko!

Picris hieracioides L. Měcholup, Waltsch, Pomeisl (Čf)!

Tragopogon major Jacq. Kladno (Wt)! Chlumberg bei Pomeisl, Wickwitz bei Schlackenwerth (Čf).

Scorzonera hispanica L. Jungbunzlau: Abhang über Nepřevázka reichlich (Hz)! Leitmeritz: auch am Weissen Berg bei Podivín (C)!
β) * **asphodeloides** Wallr. Blätter verlängert, schmal lineal, grasartig.
β) Am Suttomer Berg bei Lobositz (C)!

Scorzonera humilis L. Im Háj bei Hochweselí (Kb). Bilichower Wälder (ders.). Říčan: gegen Louňovic (CP). Chotěboř (D)!

Scorzonera parviflora Jacq. Wiesen bei der Welwarner Zuckerfabrik, nächst Triglochin maritima, zahlreich!

Scorzonera laciniata L. Hnidous bei Kladno (Wt)! Am Berge Chlum bei Pomeisl zahlreich (Čf)!

Aster amellus L. Leitmeritz: auch zwischen Malitschen und Mířovic (C)! Liboritzer Wald bei Kriegern (Čf)!

† Aster frutetorum Wimm. Chrudim: Ufer der Chrudimka bei der Klobásov-Mühle, selten (Z)! Im sog. Garrasch bei Lobositz (C)!

† Aster parviflorus Nees. Lehne bei Holic, zahlreich verwildert (J)! Bylany bei Chrudim, nächst einem Garten (Z)!

† Aster novi Belgii L. Jungbunzlau im Gebüsch verwildert (Hz)!

† Aster laevis L. Chrudim: in Pisťov am Wege verwildert (Z)!

Inula salicina L. Waldschlag oberhalb Vranov bei Nassaberg (Z).

Inula hirta L. Schlan: „v ostrově" bei Jedomělic (Bk)! Suttomer Berg bei Lobositz (C).

Inula conyza DC. Jičín: auch Prachower Felsen (Smolař). Wostray bei Mileschau, Dreikreuzberg bei Gr. Černosek (C). Berge um Podersam, Waltsch, Oedschlossberg bei Duppau, Welchau, Klösterle (Čf).

† Helianthus tuberosus L. Um Königgrätz und Nechanic häufig als Viehfutter gebaut und auch verwildert (U). Lehnen der Chotěschauer Fasanerie, fürs Wild gepflanzt (C)!

Bidens radiatus × tripartitus (B. Polákii Velen.). Am Šepadler Teiche bei Chudenic mehrfach, mit den Eltern (Čf)!

† **Silphium perfoliatum** L. Feld bei Hoch-Weselí (J)!

† Rudbeckia laciniata L. Im Gebüsch des Klattauer Parkes nahe dem Bache in Menge verwildert!

Achillea nobilis L. Leitmeritz: auch am Kahlenberg bei Hlinay! im Wopparner Thale (C)!

Anthemis ruthenica MB. Sandflur westlich von Rudig (Čf)!

Anthemis tinctoria L. Um Waltsch, Petersburg, Rudig, Welchau, Klösterle, auch oberhalb Joachimsthal (Čf).

† Chrysanthemum segetum L. Pardubic: Wiese an der Chrudimka und Feld bei Brozan (J)!

Chrysanthemum corymbosum L. Königgrätz: Wald Ouliště bei Piletic, Hoch-Oujezd (U). Waltsch, Rudig häufig, Welchau (Čf).

Artemisia pontica L. Fasanerie bei Chotěschau, um Saidschitz und Kosel; Suttomer Berg bei Lobositz (C)! Saaz: auch gegen Weletitz; Liboritz bei Měcholup (Čf)!

Filago germanica L. Jungbunzlau (*β.* Hz)! Petersburg, Pomeisl, Kriegern (Čf).

Gnaphalium norvegicum Gunn. Gottesgab: am Sonnenwirbel und Spitzberg (Čf)!

Gnaphalium uliginosum L. *β.* pilulare Koch. Ufer des Šepadler Teiches bei Chudenic, zahlreich (Čf)!

Gnaphalium arenarium L. Holetic bei Saaz, Rudig, Pomeisl (Čf).

Arnica montana L. Wälder bei Říčan (CP). Bilichover Lehne!

Doronicum austriacum Jacq. Bergwälder bei Puchers an der österreichischen Grenze (T)!

* **Doronicum caucasicum** M. B. (D. eriorhizon Guss., D. orientale Hoffm., D. Nendtwichii Sadler). Nächst verwandt mit D. pardalianches L., wie dieses mit langen, beschuppten, an der Spitze fleischig-knollig verdickten, hier Grundblätter bildenden und dann in den Blüthenstengel auswachsenden Ausläufern. Unterscheidet sich von D. pardal. durch eine feinere, kürzere Behaarung, durch zahlreiche breite herzförmige Grundblätter, einen nur 2—3blättrigen, meist einköpfigen, selten aus der Achsel des obersten Blattes einen zweiten gestielten Kopf treibenden Stengel. Von den Stengelblättern ist das unterste gestielt, mit am Grunde mässig verbreitertem Stiele, den Grundblättern ähnlich, das 2te sitzend, mit grossen Seitenlappen herzförmig umfassend. Die Hüllblätter sind länger, gleichmässiger fein zugespitzt, langgewimpert, mit fast sitzenden spärlicheren Drüsen bestreut; die Strahlblumen auch länger. In den Achseln der Grundblätter an der stark verdickten Läuferspitze sitzt ein Büschel langer Seidenhaare.

Im Theresienthale bei Gratzen, in lichten Waldgebüschen, besonders in 3 verschiedenen Gehölzen zwischen Neugebäu und dem Blauen Hause (Badhause), in grosser Menge, stellenweis ganz dicht stehend, reichlich blühend und noch mehr Blattbüschel aus den Läufern bildend! (zuerst von P. Šavel, Kaplan in Wittingau, jetzt Pfarrer in Jinonic gefunden, in dessen Herbar dieses Doronicum dem Prof. Křížek auffiel, der es mir zur näheren Bestimmung der Art 1884 übersandte, worauf ich Ende Mai 1885 in seiner Begleitung den Standort näher untersuchte). Obzwar das ganze Thal parkartig hergerichtet ist, so halte ich doch das Vorkommen für ein spontanes, weil eine neuere Ansiedlung nach der Ausbreitung und Massenhaftigkeit der Pflanze ausgeschlossen erscheint und es unwahrscheinlich ist, dass diese südeuropäisch-orientalische *), in unseren Gärten nicht vorkommende Art in älterer Zeit als Zierpflanze angepflanzt worden wäre. Ich bin vielmehr der Ansicht, dass diese Art hier in Böhmen, analog der Anthemis montana, einen weit nordwestlich vorgeschobenen Posten besitzt. Blüht vom Mai in den Juni.

---

*) Verbreitung: Ungarn (Fünfkirchen), Siebenbürgen, Serbien, Türkei, Griechenland, Creta, Sicilien, Süd-Italien.

Doronicum pardalianches L. hat eine stärkere, längere Behaarung, besonders den Stengel oben sammt Kopfstielen dichter drüsenhaarig flaumig bis zottig, an der Spitze minder verdickte Ausläufer mit zur Blüthezeit am Stengelgrunde wenigen Grundblättern. Die Haarbüschel in ihren Achseln sollen nach Neilreich (Diagnos.) u. A. fehlen, was aber nicht richtig ist; nur sind die Haare nicht so lang und dicht, weniger auffällig. Stengel mehrblättrig (5—8blättrig), oben öfter verzweigt, mehrköpfig (doch auch nur 1köpfig). Die 2 untersten Stengelblätter gestielt, das 2te mit am Grunde grossöhrig verbreitertem Stiel, die folgenden sitzend, mit kürzeren Lappen am Grunde halbumfassend, das dritte oft geigenförmig. Hüllblätter meist kürzer, rascher zugespitzt, drüsenhaarig, die Strahlblumen meist kürzer.

Im Herbar des böhm. Museums liegt ein Exemplar von Ed. Hofmann, angeblich vom Plessberge bei Abertham im böhm. Erzgebirge. Da auch Reichenbachs Iconographia fl. germ. angiebt, dass D. pardal. im sächsischen Erzgebirge subspontan oder vielleicht spontan wächst (bei Wildenfels, Hartenstein, Härtersdorf, nach Wankel! und bei Schwarzenberg nach Junghans!), so habe ich im vergangenen Juni dieser Pflanze wegen den Plessberg besucht, aber keine Spur davon gefunden. Diese Art ist daher derzeit aus der böhm. Flora zu streichen.

Senecio silvaticus × viscosus. Waldhau am Berge Hrušina bei Waltsch; Kriegern: Waldschlag hinter dem Liboritzer Walde; Chlumberg bei Pomeisl; bei Petersburg im Waldhau zahlreich (Čf)!

Senecio barbareaefolius Krock. Pechov bei Nekrasín nördlich von Neuhaus (Kh)!

Senecio Jacquinianus Rchb. Gross-Bělč bei Königgrätz (U)! Unter-Přim bei Nechanic (ders.). Radelstein (C)! Adelsberg und Prokopiberg bei Waltsch, Tannenberg bei Jechnitz, Oedschlossberg bei Duppau, meist mit S. Fuchsii (Čf)!

Senecio fluviatilis Wallr. Weidengebüsch am Elbufer bei Kelštic bei Melnik (Pl)!

Senecio rivularis DC. Gratzen: auch auf den Vorbergen über der Ebene und im Theresienthale! Erzgebirge: um den Plessberg bei Abertham zahlreich!

Petasites officinalis Mönch. Prag: auch bei Lieben (V).

Eupatorium cannabinum L. Jungbunzlau: Iserufer (Hz)! Mceler Hügel (Ž). Skuhrov bei Melnik (Pl)! Bilichover Lehne (C).

Lappa major Gärtn Um Königgrätz, Týniště (U). Chrudim selten (Z)! Dubovce bei Lomnic (Wm)!

Lappa minor DC. Um Königgrätz verbreitet, Nechanic, Týniště, Potenstein (U).

Lappa tomentosa × major (L. ambigua Čel.) Bei Klein-Holetic bei Saaz 1 Expl. unter zahlreichen Eltern (Čf)!

* **Lappa tomentosa × minor.** Köpfe mittelgross, am Stengel traubig, am Ende der Äste öfter fast doldentraubig gehäuft, kurzgestielt. Hüllen schwach spinnwebig; äussere Hüllblätter hakig, die der innersten Reihen verbreitert, häutig, purpurfarbig, mit ziemlich gerader oder auch ohne Stachelspitze, zahlreich.

Im Blüthenstand und den ziemlich kahlen Köpfchen ähnlicher der L. minor, aber durch die zahlreichen, gefärbten, nicht hakigen inneren Hüllblätter mit L. tomentosa übereinstimmend. Mit L. macrosperma Wallr. hat dieser kaum zweifelhafte Bastard, entgegen Ascherson's Vermuthung (in Fl. v. Brandenbg.), wenig Ähnlichkeit.

Chudenic: bei Lučic ein Exemplar unter den Eltern (Čf)!

Centaurea phrygia L. (C. pseudo-phrygia C. A. Mey.). Nemtschen oberhalb Leitmeritz (C).

Centaurea paniculata Jacq. Um Kladno überall (Wt). Oberbrenntenberg bei Pomeisl, Petersburg, zwischen Rudig und Kriegern (Čf).

† Centaurea solstitialis L. Brachfeld zwischen Weingärten unter dem Lobosch (C)!

Carduus crispus L. Mceler Wälder gegen Loučeň häufig (Ž). Oupor bei Melnik, häufig (Pl)! Wopparner Thal, Wiesen vor Schönau bei Teplitz (C).

Carduus acanthoides × nutans. Jechnitz: zwischen der Mittelmühle und Brettsäge mit den Eltern; Saaz: hinter Bukovina gegen Lhota (Čf). Vrcovice bei Písek (Ci)!

Cirsium eriophorum Scop. Sehr verbreitet um Waltsch, Duppau bis Schlackenwerth; so bei Waltsch: unter dem Adelsberg, am Hampelberge, Prokopiberg, Ruine Neuhaus; am Dewisch und Stengelberg bei Welchau, Heckelberg bei Klösterle (Čf)!

Cirsium canum Mönch. Östlich: noch bei Skutč! Westlich: um Waltsch und Rudig noch häufig, bei Petersburg selten; Klösterle, zwischen Rodisfort und Schlackenwerth (Čf)!

Cirsium rivulare Link. Böhm.-Skalic: Wiesen zwischen Dubno und Vysokov (Čf)! Skutč: Bergwiese im Walde über dem Krounabache hart unter der Strasse nach Lhotky!

Cirsium heterophyllum All. Zwischen Schlackenwerth und Wickwitz am Wistritzbache; Gross-Spinnelsdorf bei Klösterle

(Čf). Erzgebirge: oberhalb Joachimsthal (α); am Sonnenwirbel bei Gottesgab (Čf)!

Cirsium lanceolatum × eriophorum (C. intermedium Döll). Waldrand bei Vrutic nächst Melnik (Pl)! Oberhalb Welchau am Wege nach Schlackenwerth 1 Expl. mit C. lanceolatum (Čf)!

Cirsium lanceolatum × acaule (f. superacaule, niedrig, dem acaule näher, vom Habitus des canum × acaule, jedoch von diesem besonders durch länger bedornte Hüllblätter verschieden, Blätter oberseits ohne Dörnchen). Zwischen Schlackenwerth und Neudau, 3 Expl. unter den Eltern (Čf)!

Cirsium arvense Scop. var. incanum. Schlackenwerth, am Bistritzbache; zwischen Jechnitz und Woratschen im Gebüsch(Čf)!

Cirsium oleraceum × acaule (C. rigens Wallr.). Dobrovic: in der Pěčicer Fasanerie ziemlich selten (Hz)! Mileschauer: am Bach unweit der Paschkapole (C). Zwischen Rodisfort und Schlackenwerth und zwischen diesem und Wickwitz (Čf)!

Cirsium oleraceum × palustre (C. hybridum Koch). Řečkov bei Weisswasser, bei Debře nächst Jungbunzlau (Hz)! Unhošt (F). Krnčíthal bei Kladno (Wt)! Vyšensko bei Chudenic (Čf)!

Cirsium oleraceum × canum (C. tataricum W. & Gr.). Königgrätz: beim Bahnhof und bei Březhrad (U)! Studánka bei Pardubic (J)! Chrudim: bei Klobásov (Z)! Unhošt (F). Wopparner Thal (C)! Unter dem Kletschen gegen Weiss-Oujezd; Schönau bei Teplitz (ders.). Waltsch, Klösterle (Čf)!

Cirsium oleraceum × heterophyllum (C. affine Tausch). Erzgebirge: Wiesen beiderseits der Grenze zwischen Weipert und Stahlberg (und bei der sächsischen Haltestelle Bärnstein) (F)!

Cirsium canum × acaule (C. Winklerianum Čel.). Leitmeritz: Langes Loch bei Kundratic (C)!

Cirsium palustre × canum (C. silesiacum Schulz bip.) Chrudim: bei der Klobásov-Mühle (Z)! Krnčíthal bei Kladno (Wt)! Wiesen bei Waltsch, Rudig, Klösterle (Čf)!

Cirsium palustre × heterophyllum (C. Wankelii Reich.). Erzgebirge: Wiesen beiderseits des Grenzbachs bei Weipert; bei Eichwald nächst Teplitz einzeln (F)! Böhmerwald: bei Böhm. Eisenstein einzeln (F). Böhm. Röhren an der Strasse nach Kuschwarta (Ha)!

Carlina acaulis L. β. caulescens. Písek: Záduší bei Vrcovic (Ci)! Vitice an der Blánic bei Vodňan (Lehrer Brátka)!

Echinops sphaerocephalus L. Hleďsebe bei Weltrus (Kb).

Trichera silvatica Schrad. (Scabiosa silvatica L.). Waltsch: unter dem Filirschberge; bei Schlackenwerth (Čf).

Scabiosa columbaria L. (genuina). Wald bei Hoch-Oujezd bei Hohenbruck (U). Kladno: im Krnčíthale bis gegen Libušín, im Hochwalde (Wt, als S. lucida, mit blauvioletten und purpurrothen Blüthen)! Kahler Berg bei Borec im böhm. Mittelgeb. Langes Loch bei Kundratic nächst Leitmeritz (C). Pilsen: auch auf dem Abhang am Grossen Teiche bei Bolevec, blauviolett und purpurroth blühend!

Scabiosa ochroleuca L. Podersam, Rudig, Kriegern, seltener bei Waltsch und Duppau; um Klösterle häufig (Čf)!

Scabiosa suaveolens Desf. Prag: Anhöhen bei Vysočan (V). Mšeno bei Budín (Bš)! Říp (Hz)! Im Kokoříner Thal zerstreut; Waldwiese oberhalb Vrutic bei Melnik selten (Pl)! Zwischen Menthau und Skalitz auf Sandstein; „na horách" bei Doxan, Lukavec unweit Lobositz; Tanzberg bei Saidschitz (C)! Liboritzer Wald bei Kriegern; Kalklehne bei Liboritz nächst Měcholup [corrump. Michelob] (Čf).

Valerianella auricula DC. Hopfenfeld am Liboritzer Walde bei Kriegern (Čf)!

Asperula cynanchica L. Um Waltsch, Pomeisl, Oleschau bei Duppau (Čf).

Asperula tinctoria L. Kletschenberg bei Mileschau (C)! Eichberg bei Podersam, Chlumberg bei Pomeisl (Čf).

Asperula galioides MB. Pardubic: Nemošicer Lehne, bei Čivic (J)! Heckelberg und Egerberg bei Klösterle (Čf)!

Galium aparine W. u. Grab. γ) spurium (G. spurium L.). Hopfenfeld unter dem Liboritzer Walde bei Kriegern (Čf)!

Galium tricorne With. Felder um Schlan (Bk)!

Galium cruciata Scop. Ratibořic bei B. Skalic (Čf). Pardubic, Chrudim (J)!

Galium rotundifolium L. Bei Loučeň und Mcel (Hz)! Adelsberg bei Weltsch, Heckelberg bei Klösterle, Wickwitz (Čf)!

Lonicera nigra L. Wildenschwert: Abhänge bei Landsberg (V). Chotěboř (D)!

Sambucus racemosa L. Chrudim: auf der Podhůra u. a. (Z). Kokoříner Thal: unter der Mühle Podhrad (Pl)! Um Waltsch und Duppau, Welchau, Schlackenwerth, Klösterle, Sonnenwirbel bei Gottesgab (Čf)!

Sambucus ebulus L. Chotěboř (D)! Um Hoch-Weselí häufig auf Äckern, besonders bei Zběř (Kb). Granatbach über dem Radelstein, Fuss des Kusov bei Staray (C)! Hackelberg bei Klösterle, Wistrizbachthal zwischen Wickwitz und Schlackenwerth (Čf).

Adoxa moschatellina L. Königgrätz: wilder Park in Správčic (U). Im Háj bei Hochweselí und „Valy" bei Češov (Kb). Um Pardubic, Chrudim häufig (J)! Kuttenberg (F). Park von Weltrus (Kb). Neuhaus (St).

Vinca minor L. Königgrätz: Wald Ouliště oberhalb Piletic, bei Sadová, Hrádek bei Nechanic, Chvojno (U)! Pardubic: auch bei Černá, blühend (J)! Chrudim: Waldrand zwischen Lhota und Sobětuchy (Z). Hochweselí: im Haine bei Stříbrnic viel und jährlich blühend; „Valy" bei Češov nicht blühend (Kb). Laubwald unter dem Wostray bei Mileschau (C)! Gratzen: im Theresienthal beim Badhause im Gebüsch, nicht häufig, aber blühend!

Vincetoxicum officinale Mönch. Bei Königgrätz sehr selten: im Walde Ouliště bei Piletic (U)! Eichberg bei Podersam, Berge bei Pomeisl (Čf).

Menyanthes trifoliata L. Sumpf bei Gross-Bělč mit Calla, Cicuta, Oxycoccos in Masse (hier „vodní jetel" genannt), bei Týniště und Krňovic (U)! Chotěboř (D)! Bach Wlkawa bei Lissa (J). Vrutic bei Melnik (Pl)! Schlan: bei Hnidous mit Carex nutans (Bk)! Um Rudig häufig (Čf). Říčan (CP)!

Gentiana cruciata L. Wostray bei Mileschau; im Wopparner Thal bei der Ruine (C)!

Gentiana pneumonanthe L. Neuköniggrätzer Wald mehrfach (U)! Pěčicer Fasanerie, zahlreich (Hz)! Am Palác-Berge bei Heřmanov-Městec (Z)! Písek: Záduší bei Vrcovic, mit Serratula tinctoria (Ci)!

Gentiana ciliata L. Brandeis a. Adl. auf Kalk, Skrovnice Velká (J)! Javůrka bei Holic auf Kalk (J)! Chotěboř (D). Křivic bei Týniště spärlich (U). Prachovic bei Podol Vápenný (Z)! Welwarn: Kalklehnen nächst Radowic, Kalklehne oberhalb Hleďsebe reichlich (Kb). Bechlín bei Raudnic (Vejdovský)! Horka bei Libochovic (Bš)! Leitmeritz: auch zwischen Malitschen und Miřovic reichlich (C).

Gentiana amarella L. (genuina). Skrovnice Velká bei Brandeis a. Adl. (J)! Hnidous bei Kladno (Wt)!

Gentiana germanica Willd. Chotěboř (D)! Böhm.-Trübau (J)! Mekl bei Duppau (Čf). Písek: zwischen Vlastec und Kašina hora (Ci)!

β) calycina Čel. Waldränder bei Kladno und Libušín (Wt)! Feuchte Wiese am Fuss des Mileschauers (C)!

Erythraea linariaefolia Pers. Oupor und Skuhrov bei Melnik (Pl)! Sumpfgräben an der Bahn zwischen Woleschko und Hrobec (C)!

Erythraea ramosissima Pers. Chotěboř (D)! Am Granatbache unterhalb Starej (C)! Zwischen Rudig und Kriegern (Čf). Chudenic: am Wege vom Badhaus nach Kaniček, spärlich!

Asperugo procumbens L. Svitkov bei Pardubic (J)!

Echinospermum lappula Lehm. Kuněticer Berg bei Pardubic (J)! Um Welwarn häufig (Kb).

Echinospermum deflexum Lehm. Bei Mileschau auch am Wostray, besonders auf der Blösse gegen Leinitz (C)!

Omphalodes scorpioides Schrank. B. Skalic: am Wege nach Ratibořic, vor dem Forsthause (Čf)! „Valy" bei Češov spärlich (Kb).

Myosotis sparsiflora Mik. Chlum bei Jungbunzlau (Hz)! Um Pardubic und Chrudim verbreitet (J)! Libušín bei Kladno (Wt)!

Myosotis caespitosa F. Schultz. Wlkawabach bei Lissa (J). Grosser Teich bei Neudorf bei Waltsch (Čf)! Jechnitz, Petersburg (ders.). Chuděnic: auch beim Šepadler Teiche, am Teiche Lotrov! Neuhaus (St)!

Myosotis versicolor Sm. Chotěboř: am Rande der Pfarrerwiese za Koukalkou (D)! Říčan: Feld beim Teiche Vyžlovka (Čf)!

Lithospermum officinale L. Pardubic: bei Dražkovic, Jesničan (J)! Libušín bei Kladno (Wt)!

Lithospermum purpureo-coeruleum L. Kalklehne oberhalb Hleďsebe, Zádušní háj bei Nelahozeves (Kb). Libušín bei Kladno (Wt)! Berg Lhota bei Mileschau (C).

Cerinthe minor L. B. Skalic: auf Brachen und Bahndämmen (Čf)! Um Königgrätz mehrfach: bei Blešno, Piletic, Hoch-Oujezd; bei Chvojno (U). Um Chrudim nicht selten (Z). Bei Mcel „v hájích" häufig (Hz)! Melnik (Pl)! Unter dem Eichberg bei Podersam gegen Rudig, unter dem Oberbrenntenberg bei Pomeisl (Čf).

Pulmonaria angustifolia L. Jungbunzlau: bei Josefsthal und „v Chobotech", hier zahlreich (Hz)! Thal Vůznice bei Neu-Joachimsthal (Schiffner et Hora)!

Nonnea pulla DC. Um Chrudim zerstreut (Z)! Zwischen Saaz und dem Pertsch, Podersam, zwischen Rudig und Kriegern (Čf).

Symphytum tuberosum L. Chotěboř (D)! Gratzen: auch im Theresienthal sehr häufig!

Solanum nigrum L. γ) luteum (S. humile Bernh.). Pardubic: Waldhau bei Černá (J)!

Atropa belladonna L. Klösterle: am Heckelberg und Schwarzberg, um Waltsch und Duppau häufig (Čf).

Physalis alkekengi L. „V hájích" bei Mcel, selten (Hz)! In einem Weingarten bei Wegstädtel (Pl)! Weingärten unterhalb des Lobosch (C).

Datura stramonium L. Adler-Kostelec: in Synkow einzeln (Hs)! Um Chrudim selten (Z).

Verbascum phoeniceum L. Sandige Hügel bei Nelahozeves (Kb).

Verbascum thapsus × lychnitis (V. spurium Koch). Chrudim (Z)! Abhänge an der Otava unterhalb Vrcovic mit den Eltern (Ci)!

* **Verbascum phlomoides (thapsiforme) × nigrum.** Dünnfilzig. Blätter eiförmig oder eilänglich, obere langzugespitzt, ganz kurz herablaufend, kurzhaarig-schwachfilzig. Stengel stielrund, oberwärts kantig. Blüthenbüschel 7—9blüthig. Staubfadenwolle violett. Griffel keulig, mit deutlich herablaufender Narbe.

Letzteres Merkmal spricht für V. phlomoides (resp. thapsiforme) als die eine Stammart, denn bei V. thapsus × nigrum ist die Narbe am Ende des keuligen Griffels kopfig. Nach dem vom Finder angegebenen Consortium, und nach den langzugespitzten oberen Blättern ist wohl V. thapsiforme bei der Bastardbildung betheiligt, obgleich die Blätter nur wenig herablaufen.

Felsen der Moldau bei der Mühle Saník nächst Podolsko oberhalb Klingenberg, 1 Exempl. mit V. nigrum und V. thapsiforme (Ci)!

Scrofularia nodosa L. β. flor. flavidis. Vyšensko bei Chudĕnic (Čf)!

Scrofularia alata Gil. (a. Ehrharti Stev.). Pardubic bis Elbeteinitz, Holic, Chrudim (J)! Königgrätz: bei Kukleny (U). Wald Chropotín bei Bolehošť (ders.). Jungbunzlau: an der Iser (Hz)! Bäche bei Welwarn häufig (Kb). Ufer des Vruticer Baches bei Skuhrov (Pl)! Wiesengraben westlich von Rudig, zwischen Rudig und Kriegern; bei Neudorf und am Goldbach bei Waltsch (Čf)!

Limosella aquatica L. Jechnitz: Teich zwischen Obermühl und der Brettsäge (Čf).

† Mimulus luteus L. Písek: Otava-Ufer bei Vrcovic (Ci)! Neuhaus: an der Nežárka bei Obermühl [Horní Žďár] (Kh)!

Linaria elatine Mill. Bei Hnidous nächst Kladno, im Graben 1 Expl. (Wt)!

Linaria minor Mill. Pardubic, Holic, Brandeis a. Adl. (J)! Jungbunzlau (Hz)!

Linaria arvensis Desf. Heřman.-Městec (Z)! Welwarn: bei Gross-Bučina, bei Uha und weiter gegen Hleďsebe ziemlich häufig (Kb). Im Hopfenfelde bei Kriegern, Gödesen bei Waltsch (Čf).

Antirrhinum orontium L. Hopfenfeld über dem Liboritzer Walde bei Kriegern (Čf). Písek: bei Čížová (D)!

† Antirrhinum majus L. Jungbunzlau: bei Josephsthal auf Schutt und in Střejnic auf der Friedhofsmauer (Hz)!

Digitalis ambigua Murr. Prachower Felsen bei Jičín selten (Smolař). Königgrätzer Wälder, Hoch-Oujezd (U). Schlackenwerth, Klösterle, Pomeisl, Waltsch, Kriegern (Čf).

Veronica anagallis L. var. glandulifera Čel. (V. aquatica Bernh.). Waltsch: zwischen dem Grossen und Ruster Teiche bei Neudorf (Čf)!

Veronica montana L. Chotěboř: Stadtwald über dem „Horní mlýn" (D)!

Veronica chamaedrys L. δ) Sternbergii Čel. Teichdamm unterhalb Louňovic bei Říčan (Čf)!

Veronica teucrium L. (*a.* genuina). Koloděj bei Pardubic, Holic (J)! Chrudim: Klobásov, Hyksovo peklo (Z). Mirotic: über dem Hořejší mlýn (D).

Veronica longifolia L. Ledec bei Hohenbruck (U)! Melnik (Pl)!

Veronica praecox All. Jungbunzlau: Nemyslovic bei Bezno (Hz)! Um Welwarn häufig: bei Mühlhausen, Lešan, zwischen Uha und Hleďsebe, bei Černuc, Miletic, Volanic, Budohostic (Kb). Motyčín bei Schlan (Bk)!

Veronica triloba Opiz. Jungbunzlau: bei Nemyslovic (Hz)! Welwarn: bei Gross-Bučina, gegen Uha und Hleďsebe (Kb).

Pedicularis palustris L. Hinter Neu-Königgrätz, auch am Teich bei Divec (U). Teich Herout bei Chrudim (Z). Říčan, Louňovicer Teiche (Čf)!

Pedicularis silvatica L. Říčan gegen Tehovec (Čf)! Erzgebirge: Joachimsthal und Abertham! Chudenic: am Šepadler Teiche! Theresienthal bei Gratzen!

Rhinanthus hirsutus Lamk. Neuhaus (St).

Melampyrum cristatum L. Hain Kalthaus bei Černilov nächst Smiřic (U)! Waldränder des „Háj" bei Hoch-Weselí nicht häufig (Kb). Eisberg bei Tlutzen, Kletschenberg bei Mileschau *α* und *β* (C).

Melampyrum silvaticum L. Erzgebirge: bei Joachimsthal, am Sonnenwirbel; Schlackenwerth, Welchau, Wickwitz, Prokopiberg bei Waltsch (Čf)!

Lathraea squamaria L. „Valy" bei Češov (Kb). Chrudim: bei Slatinan (J)! im Hyksovo peklo, bei Ouřetic, Ctětín bei Nassaberg (Z). Theresienthal bei Gratzen (T)!

Orobanche pallidiflora W. Gr. (O. Cirsii Fr.) Pardubic: auf der Nemošicer Kalklehne, auf Cirsium arvense, 1883 in Mehrzahl (J)! In der Pěčicer Fasanerie bei Dobrovic auf Cirs. arvense, 1883 nur 1 Expl. (Hz)!

Orobanche caryophyllacea Sm. Janderov bei Chrudim (J)! Kladno: im Krnčíthale (Wt)! Leitmeritz: auch Mastná hora (F)!

Orobanche rubens Wallr. Chrudim: Mühlen Valcha und Klobásov, bei Vestec (Z)! Hyksovo peklo (J)! Leitmeritz: auch Weisse Lehne (F)!

Orobanche Kochii F. Schultz. Kalkabhang am Eingang des Bilichover Thales nächst Pochwalow, im Felde auf Centaurea scabiosa, mehrfach! Fasanerie bei Chotěschau bei Budin (C)! Abhang über dem Schreckenstein bei Aussig!

Orobanche Picridis F. Schultz. Am Mileschauer (C)!

Thymus Marschallianus Willd. Saaz: sandige Abhänge zwischen Gross-Holetic und Bukovina (Čf)!

Thymus humifusus Bernh. Ředhošť bei Budin (Bš)! Kladno (Wt)! Abhang über dem Schreckenstein!

Thymus angustifolius Pers. Sandfluren westlich von Rudig (Čf)!

† Hyssopus officinalis L. Königgrätz: auf einer Mauer der schlesischen Vorstadt seit mehreren Jahren verwildert (U). In Krpy bei Hoch-Lieben verwildert (Hz)!

Salvia verticillata L. Kalklehnen nördl. von Skutč! „Na Křivině“ unter Vyhnanic bei Týniště, bei Potenstein und Litic (U)! Um Welwarn, Mühlhausen, Hleďsebe häufig (Kb). Saaz: gegen Pertsch; Schelesen bei Měcholup (Čf).

Salvia silvestris L. Krpy bei Hoch-Lieben (Ž). Chrudim selten (Z)! Um Welwarn häufig (Kb).

Salvia pratensis L. γ. stenantha (Knaf). Radobyl bei Leitmeritz (F)!

Salvia glutinosa L. Ruine Maidstein vor Krumau (Ha)!

Nepeta cataria L. Wostray bei Mileschau, Košťál, Hasenburg (C)! Chrudim (Z)!

Nepeta nuda L. (N. pannonica Jacq.). Chrudim: bei Topol, nicht häufig (Z)!

Melittis melissophyllum L. Böhm.-Skalic gegen Ratibořic (Čf)! Chvojno bei Holic (J)! Hain „Háj“ bei Hoch-Weselí, spärlich (Kb). Chrudim selten (J)! Bilichover Wälder seltener! Suttomer Berg bei Lobositz, Lhota-Berg bei Mileschau (C). Kriegern: im

Thalgrund zwischen dem Kirchberg und Liboritzer Wald (Čf). Písek: auch „v Záduší“ bei Vrcovic (Ci)!

Galeopsis versicolor Curt. Königgrätzer Wälder, Rolehošť, Týniště, Hohenbruck, Sadová (U)! Turnau an der Iser (Kb). Südl. Moldauthal: bei Křenek (Ci)!

Stachys germanica L. Neudorf bei Welwarn (Kb). Drnov bei Schlan (Bk)!

Stachys annua L. Am Chlomek bei Melnik (Hz)! Um Welwarn auf Kalkboden häufig (Kb).

Stachys recta L. Chrudim: Skřivánka, Klobásov, Hyksovo peklo (Z).

Chaeturus marrubiastrum Rchb. Jungbunzlau: in Jemník am Wege, im Felde auf der Bába beim Dorfe Brejlov (Hz)!

Marrubium vulgare L. Lischwitz und Schelesen, Lettau bei Podersam (Čf).

Scutellaria hastifolia L. Um Pardubic ziemlich häufig (J)! Jungbunzlau: beim Schiesshaus sehr selten (Hz)!

Prunella laciniata L. α) alba et β) violacea: Lehne hinter Výrava bei Smiřic (U)!

Prunella grandiflora Jacq. Im Wald bei Hoch-Oujezd selten (U)! Welwarn: bei Radowic auf Kalk, hinter Uha auf Sandboden (Kb). Újezd bei Melnik, selten (Pl)! Häufig um Waltsch, Chlumberg bei Pomeisl, Eichberg bei Podersam, zwischen Měcholup und Schelesen, Rodisfort, Welchau (dort auch weissblühend), Klösterle (Čf)! Pilsen (Zd. Jahn)! Písek: bei Purkratic (D)! Bergwiese bei Křenek nächst Podolsko im Moldauthale (Ci)!

Ajuga chamaepitys Schreb. Welwarn: Sandfeld bei Gross-Bučina, oberhalb Radovic und gegen Uha, überall ziemlich reichlich (Kb).

Teucrium scorodonia L. Bei Eichwald im Erzgebirge bei Teplitz, und zwar an der Strasse gegen die Soldatenhöhe im Buchwald, zahlreich (F)! (so ziemlich derselbe Standort, an dem v. Uechtritz sen. im J. 1806 bereits die Pflanze antraf).

Teucrium botrys L. Pardubičky bei Pardubic (J)! Tuněchody bei Chrudim (ders.)! Pomeisl [Nepomyšl]: am Oberbrenntenberg und Chlumberg oberhalb Gödesen zahlreich (Čf)! Basaltfelsen bei der Liná-Schäferei bei Waltsch (ders.). Pilsen (Zd. Jahn)!

Litorella juncea Berg. Am Langenbrucker Teich bei Schwarzbach (Ha)!

Plantago major L. β uliginosa Schmidt, Tausch. Kalklehne südlich von Kl. Bilichov (C)!

Pinguicula vulgaris L. Vrutice bei Melnik (Pl)! Sonnberg bei Gratzen (T)!

Utricularia vulgaris L. Schlan: im Teiche bei Hřešic blühend (Bk)!

Utricularia neglecta Lehm. Pardubic: bei Černá hinter Bor (J)! Chotěboř: hinter dem Bahnhof (D)! Lissa: im Wlkawabache bei Dvorce und unter dem Hrabanov (J)! Im „Garrasch" bei Lobositz (C)!

Utricularia minor L. Wassergraben nächst Borkovic (Wm)!

Glaux maritima L. Wiesen bei Welwarn nächst der Zuckerfabrik, mit Triglochin maritima, ungemein häufig! Schlan: Wiese bei Beřovic (Bk)!

Centunculus minimus L. Chotěboř: feuchte Sandstellen unter dem Felsen vor „Obolce" (D)!

Anagallis coerulea Schreb. Um Welwarn sehr häufig (Kb).

Lysimachia nemorum L. Libáň bei Chrudim, Potenstein (J)! (D)! Radelstein im Mileschauer Mittelgebirge (C).

Trientalis europaea L. Im Walde zwischen dem Bahnhof von Chotěboř und Příjemky (D)! Skutč: Waldschlucht über dem Krouna-Bache (Guido Polák).

Cyclamen europaeum L. Am Kuchelbader Berge unter der Kirche mehrere Exempl. (Kh)! jedenfalls gepflanzt. Am „Tábor" bei Mcel nächst dem Schlossparke unter Baumgruppen (Žára), wahrscheinlich gepflanzt. — Von allen Angaben spontanen Vorkommens dieser Art in Böhmen sind nur die aus dem südlichsten Krumauer Zipfel sicher; alle übrigen, namentlich alle aus der Nordhälfte des Landes sind sehr problematisch.

Soldanella montana Mik. Bei Gratzen bereits im Theresienthale, aber spärlich und 1885 nicht blühend!

Primula elatior Jacq. Wildenschwert (V). Um Pardubic häufiger als P. officinalis: Nemošic, Černá, Čivice, Holice (J)! Chotěboř (D). Hoher Reinstein bei Waltsch, Oedschlossberg bei Duppau, Egerberg bei Klösterle (Čf).

Hottonia palustris L. Lissa: bei Dvorce (J). Genie-Übungsplatz bei Theresienstadt (C).

Armeria vulgaris Willd. Warta: vor Waffenhammer an der Eger (Čf); um Waltsch, Rudig nicht gesehen (ders.).

Erica herbacea L. In der Rauschenbacher Haide bei Marienbad am 6 Septemb. mit weissen Corollen blühend (Ha)!

Vaccinium uliginosum L. Torfe bei Abertham, mit Eriophor. vaginatum und Andromeda!

Oxycoccos palustris Pers. Königgrätz: im Sumpfe bei Gross-Bělč sehr häufig (U)! Torfige Ufer der Teiche bei Padrť (J). Neuhaus: auch am Wajgarteiche (St).

Monotropa hypopitys L. Um Königgrätz, Bělč, Hohenbruck, Týniště, Sadová (U). Ctětín, Podol Vápenný, Kostelec bei Heřman-Městec (Z). Tannenberg bei Jechnitz, Egerburg bei Klösterle (Čf).

β) glabra (M. hypophegea Wallr.). Gehänge zwischen Kladno und Libušín (Wt)!

Pirola media Sw. Im Woleschkathale bei Kladno, selten (Wt)!

Pirola chlorantha Sw. Říčan: Waldrand unter dem Berge Tehov (Čf)! Gratzen: Wälder bei Kropfschlag (T)! Chotěboř „v Obolcích (D)!

Pirola rotundifolia L. Chotěboř: feuchter Kieferwald hinter der Pfarrerswiese (D)! Pardubic, Holic (J)! Chrudím: na Podhůře (ders.)! Königgrätzer Wald, Sadová (U). Im Háj bei Hoch-Weselí (Kb). Im zweiten Bilichover Parallelthal hinter dem Forsthause häufig, an feuchten Waldstellen!

Pirola uniflora L. Chotěboř: „na Břevnici" (D)! Berg Strádov bei Libáň (Z)! Pilsen: na Borech (Zd. Jahn)!

3. *Choripetalae.*

Thalictrum aquilegiaefolium L. Wald Chropotín bei Bolehošť (U). Sonnenwirbel bei Gottesgab; über Joachimsthal bei den Bergschächten (Čf).

Thalictrum angustifolium W. & Gr. Ratibořic, Náchod (Čf)! Um Hoch-Weselí häufig (Kb).

β) angustissimum. Zwischen Bauschowitz und Brňan (C)! Melnik (Pl)!

Pulsatilla vernalis Mill. Pilsen: na Borech (Zd. Jahn)! Lomnic: Hügel im Waldschlag „na Žabicích" (Wm)!

Pulsatilla pratensis Mill. Welwarn: Chržín, Hleďsebe (Kb). Zámrsky bei Hohenmauth (J)!

Anemone silvestris L. Jungbunzlau mehrfach (Hz)! Zádušní háj bei Mühlhausen (Kb). Kahler Berg bei Borec (C).

Adonis vernalis L. Um Mühlhausen mehrfach (Kb). Ruine Skalken; am Wege von Režný Oujezd gegen die Mokray bei Lobositz; zwischen Kosel und Saidschitz (C).

Adonis aestivalis L. var. citrina. Slavostic spärlich, Welwarn (Kb).

Adonis flammeus Jacq. Welwarn (Kb). Hnidous bei Kladno (Wt)!

Myosurus minimus L. Jungbunzlau häufig (Hz)! Lissa: mit Astrag. arenarius reichlich und stattlich (J).

Ranunculus paucistamineus Tausch. (α. trichophyllus). Erzgebirge: im Waldteichel oberhalb Joachimsthal!

Ranunculus Petiveri Koch. Teich Hluboký bei Podhráz nächst Holic (f. terrestris, J)! Říčan: trockener Uferrand des mittleren Louňovicer Teiches, mit Coleanthus, in Menge (f. terrestris, Čf)! Gräben bei Dobrá bei Kladno (Wt als R. paucistam.)!

Ranunculus circinatus Sibth. Wlkawa-bach zwischen den Hrabanov-Torfen und Alt-Lissa! Stein-Žehrovic bei Lahna (Wt)! Rudig: Wiesenteichel an der Bahn (Čf)!

Ranunculus lingua L. Gräben der Hrabanov-Torfe bei Lissa! In den oberen Teichen des Kokořiner Thales häufig (Pl)! Podhradec bei Libochovic (Bš)! Teich bei Hřešic im Srbečer Thale bei Schlan (Bk)!

Ranunculus Steveni Andrz. Teplitzer Schlossgarten: im hinteren Theile gegen die Felder (F)!

Ranunculus nemorosus DC. Um Waltsch, Petersburg (Čf)! Südliches Moldauthal: bei Podolsko (Ci)! Hügel vor Gratzen (Křížek)

Ranunculus polyanthemus L. Kačina bei Kuttenberg (F)!

Ranunculus sardous Cr. Gratzen: zur Bahnstation herab sehr reichlich! Moldauthal bei Podolsko (α. tuberculatus Ci)!

Trollius europaeus L. B. Skalic: zwischen Dubno und Vysokov (Čf)! Königgrätz, Chvojno, Nechanic, Třebechovic (Uz)! Chotěboř (D)! Um Chrudim häufig (J)! Kačina bei Kuttenberg (F)! Alt-Lissa reichlich (J). Erzgebirge: auf der Höhe von Abertham bis Joachimsthal nicht selten! dessgleichen in der Ebene am Fusse des Gebirges bei Schlackenwerth häufig! Klösterle: bei Gross-Spinnelsdorf (Čf)!

Isopyrum thalictroides L. Wäldchen Chropotín bei Bolehošť, Wald bei Hoch-Oujezd (U)! Chrudim: im Hyksovo peklo (J)!

Nigella arvensis L. Chotěboř (D)! Chrudim (J)! Prag: Hodkovička (C). Um Welwarn häufig (Kb). Skuhrov, Vehlovice bei Melnik (Pl)! Gross-Černosek (C). Pilsen (Zd. Jahn)!

Aquilegia vulgaris L. Fasanerie bei B. Skalic (Čf)! Adler-Kostelec: Hain unter dem Hofe Závrš, spärlich, nicht blühend (Hs)! Holic, Černá bei Pardubic, bei Chrudim im Hyksovo peklo

häufig (J)! Prokopiberg bei Waltsch, Schwarzberg bei Klösterle (Čf). Gratzen (T)!

Actaea spicata L. Fehlt um Königgrätz; ist erst bei Chvojno (U).

Berberis vulgaris L. Suttomer Berg (C).

Nymphaea alba L. (genuina). Königgrätz: bei Krňovic und Stěnkov bei Hohenbruck, auch bei Gross-Bělč (mit Nuphar luteum) (U)!

Nuphar luteum Sm. Hoch-Weselí: in der Cidlina, besonders viel bei Hrobyčan (Kb). Im Garrasch bei Lobositz (C).

Nuphar pumilum Sm. Teich bei Neuhaus (Rundenst.)! dann im Bache zwischen Blauenschlag und Heinrichschlag (St).

Papaver dubium L. Pardubic: am Eisenbahndamm (J)! Malá Kvíce bei Schlan (Bk)! Rudig (am Bahndamm), Waltsch, Duppau, Welchau (Čf).

Glaucium phoeniceum Cr. An der Bahn von Kralup nach Welwarn, spärlich (C). Zwischen Saaz und Weletitz bei der Ziegelhütte, nur 1 Expl. (Čf)!

Corydalis cava Schweig. Königgrätz: im wilden Park bei Správčic (U)! Wäldchen Chropotín bei Bolehošť (U). Im „Háj“ bei Hoch-Weselí und Wälle [Valy] bei Češov reichlich (Kb). Chrudim: Hyksovo peklo, Drei Trommeln (Z). Oupor bei Melnik (Pl). Zádušní háj bei Nelahozeves (Kb).

Corydalis digitata Pers. Königgrätz: na Zámečku und auf der Wiese vor Střebeš, auch beim Forsthaus bei Ledec (U)!

Corydalis pumila Rchb. Selský háj bei Lešan, Zádušní háj bei Nelahozeves (Kb).

Corydalis fabacea Pers. Im Háj bei Hoch-Weselí, minder häufig; Weltruser Park, spärlich (Kb). Oupor bei Melnik, mit C. cava, häufig (Pl)! Neugebäu bei Gratzen (T)!

Fumaria rostellata Knaf. Kartoffelfeld bei Duppau (Čf)! Oberhalb Joachimsthal bei der Pulvermühle im Kartoffelfelde (ders.).

Fumaria Vaillantii Lois. Welwarn (Pk)!

† Fumaria parviflora Lamk. Schlosswälle in Pardubic, verwildert (J)!

Teesdalea nudicaulis R. Br. Gratzen: auch bei Sonnberg, selten (T)!

Lepidium campestre R. Br. Saatfelder bei Sonnberg bei Gratzen, selten (T)!

Thlaspi perfoliatum L. Kuttenberg: Strasse gegen Kouřím (F). Welwarn, Hleďsebe, Roztok, Selc (Kb).

Thlaspi alpestre L. Prag: Wälder bei Hodkovička (V). Weltruser Park, reichlich (Kb). Oupor bei Melník (Pl)!

Coronopus Ruellii All. Gässchen in Skutč, mit Chenopodium vulvaria! Chrudim (Z)! Jungbunzlau: bei Nepřevazka; bei Pěčic (Hz)!

Cardaria draba Desv. Um Chrudim häufig (Z). Zwischen Saaz und dem Perčabhang bei der Ziegelei (Čf).

Alyssum montanum L. Sandige Abhänge bei Mühlhausen (Kb). Chlumberg bei Měcholup saaz. (Čf). Čimelic, Cerhonic bei Mirotic (D)!

Alyssum saxatile L. Heckelberg bei Klösterle, Basalt des Dewisch gegenüber Welchau (Čf).

Berteroa incana DC. Saaz, Rudig (Čf).

Lunaria rediviva L. Duppau: am Ödschlossberg (Čf).

Cardamine bulbifera R. Br. Hohenbruck (U). Wald zwischen Holic und Týniště (J)! Oberhalb Vranov bei Trhová Kamenice selten (Z). Říčan: Abhänge über den Teichen von Budy nach Jevan (Čf).

Cardamine enneaphyllos R. Br. Jungbunzlau: auch bei Josephsthal (Hz)! Říčan, mit voriger (Čf)!

Cardamine amara L. (genuina). Iserthal bei Jungbunzlau (Hz)! Miletín bei Lomnic (Wm)!

Cardamine pratensis b) dentata (Schult.). Hrabanov-Torfe bei Lissa, schön und reichlich! Am „Bache“ bei Kuttenberg (F).

Arabis brassicaeformis Wallr. Krnčíthal bei Kladno (Wt)! Heckelberg und Schwarzberg bei Klösterle, häufig (Čf)!

Arabis hirsuta Scop. Klösterle, Welschau, Duppau (Čf)!

Arabis auriculata Lamk. Am Berge Strážiště bei Korno unweit Karlstein (C).

Barbarea stricta Andrz. Lissa häufig (J).

Nasturtium officinale R. Br. Wassergraben bei der Flusárna bei Heřmanův Městec und im Bache hinter Klešic häufig (Z)!

Roripa barbaraeoides Čel. Ottenschlag bei Neuhaus (Kh)!

Roripa amphibia Bess. Chrudim: bei Ouřetic, mit Oenanthe phellandrium, Iris pseudacorus (Z)!

Camelina foetida Fr. Im Lein bei Skutč α. und β.! Chrudim α. (Z)!

Hesperis matronalis L. (genuina). Verwildert am linken Adlerufer zwischen Königgrätz und Malešov, bei Neu-Königgrätz (U). Verw. am Aubach vor Olleschau bei Duppau, auch im Petersburger Park (Čf).

Sisymbrium strictissimum L. Strassengraben bei Rousovic nächst Melnik (Pl)! Elbegebüsch bei Lobositz (C).

Sisymbrium Loeselii L. Welwarn (Kb). Chrudim häufig (Z).

Erysimum repandum L. Um Welwarn gemein (Kb).

Erysimum crepidifolium Rchb. Heckelberg und Egerberg bei Klösterle (Čf)!

Erysimum durum Presl. Schlan! Mauern in Welwarn (Kb). Um Saaz häufiger, Holetitz (Čf)!

Conringia orientalis Andrz. Dreitrommeln bei Chrudim (Z)!

Diplotaxis muralis L. Pardubic unter der Vinice, am Wiesendamme bei der Chrudimka reichlich (J)! Chrudim (Z)! Jungbunzlau, Dobrovic selten (Hz)! Welwarn: Hof der Zuckerfabrik (Kb).

Rapistrum perenne All. Unter der Hasenburg gegen Slatina; um Saidschitz und Kosel; Plateau oberhalb Lukavec bei Lobositz (C).

Reseda lutea L. Mcel (Hz)!

Reseda luteola L. Uha bei Welwarn (Kb). Chrudim (J)!

Drosera longifolia L. Riesengebirge: im Elbgrund zwischen dem Pantschefall und dem zur Elbbaude führenden Wege etwa in der Mitte der Lehne an nassen Stellen über den grossen Steinplatten (J. Paul)! Neuhaus: auch gegen Oberbaumgarten, beim sog. Federbusch (Kh)!

Drosera obovata M. K. Neuhaus: am Standort der vorigen (Kh)!

Parnassia palustris L. Veležic und Zběř bei Hoch-Weselí (Kb). Dvorce bei Lissa häufig (J). Welwarn: unterhalb Chržín nicht häufig (Kb). Rudig, Waltsch, Jechnitz, Klösterle (Čf). Neuhaus (St)!

Viola palustris L. Prag: Říčan (CP)! Neuhaus (St). Chotěboř (D)!

Viola collina Bess. Woleschkathal bei Kladno, selten (Wt)! Shlossberg bei Häusles nächst Schweidnitz (T)!

Viola mirabilis × Riviniana. Bába bei Kosmanos, nur 1 Expl. (Hz)!

Viola arenaria DC. Um Jungbunzlau häufig (Hz)! Bei Kladno selten (Wt)!

Viola stagnina Kit. Waldblössen im Háj bei Hoch-Weselí (Kb).

Viola pratensis M. et K. Hoch-Weselí: am Graben nächst dem Wege von der sog. Fasanerie nach Hradisko sehr zahlreich (Kb).

Viola tricolor L. a) montana. Erzgebirge: bei Abertham, Joachimsthal!

Portulaca oleracea L. (a. silvestris). In und um Lobositz sehr häufig (C).

Montia rivularis Gmel. Tábor: bei der Pulvermühle (S). Chotěboř (D)! Wiesengraben westlich von Rudig (Čf)!

Corrigiola litoralis L. Leitmeritz: auch zwischen Pistian und Gr. Černosek, und bei Welhotta (C)!

Spergularia marginata Kittel. Graben bei den Bitterquellen von Seidschitz (C)!

Spergula Morisonii Bor. Lissa: Sandflur im Walde nächst Dvorce, mit den Botrychien (J)! Holzschlag im Krnčíthale bei Kladno (Wt)!

Sagina nodosa Mey. Königgrätz: auf den Stadtwällen und auf der Wiese vor Roudnička spärlich (U)! Heřman-Městec (Z)! Skuhrov bei Melnik (Pl)!

Holosteum umbellatum L. β) viscosissimum Čel. Kuttenberg (F).

Cerastium glomeratum Thuill. Kalmwiese bei Bodenbach (F).

Stellaria nemorum L. Theresienthal bei Gratzen sehr häufig! Am Aubach bei Duppau (Čf).

Gypsophila fastigiata L. Sandhügel bei Drnov bei Schlan (Bk)!

Vaccaria parviflora Mönch. Bei Hoch-Lieben selten (Hz)! Černiv bei Chotěschau (C)! Saaz: über Bukovina gegen Welhütten (Čf).

Kohlrauschia prolifera Kunth. Lehne über Nepasic bei Hohenbruck (U)! Stengelberg zwischen Rodisfort und Welchau, Wickwitz, Warta (Čf).

Dianthus armeria L. Königgrätz: Hain Ouliště bei Piletic, Hoch-Oujezd, Nepasic, Unter-Přimer Fasanerie bei Nechanic (U). B. Leipa: auch am Vogelbusch (C).

Dianthus silvaticus Hoppe (D. Seguieri Autt. boh.) Kladno: im Krnčí und im Woleškathale einzeln (Wt)!

Dianthus superbus L. Haine um Hoch-Weselí häufig (Kb.) Hohenbruck, Sadová, Unter-Přim bci Nechanic (U).

Cucubalus baccifer L. Königgrätz: vor Střebeš; zwischen der Schles. Vorstadt und Malšovic, Festungswälle an der Adler (U)! Hoch-Weselí: rechtes Cidlinaufer, spärlich (Kb). Heřman-Městec, nicht häufig (Z)! Zwischen Vrutic und Košátek am Wiesenbache (Hz)!

Silene nutans L. β) **glabra***) (S. infracta WK.). Häufig in der

---

*) Jedoch selten vollkommen kahl, gewöhnlich auf Blüthenstielen und Kelchen mehr oder weniger drüsenhaarig, auch mit auf unteren Blättern spärlich behaarten Übergangsformen zur ganz flaumigen Grundform.

Gegend zwischen Jechnitz und dem Egerflusse: bei Klösterle am Schwarzberg und Heckelberg, bei Warta auf Felsen, Wickwitz gegen Schlackenwerth, zwischen Welchau und Rodisfort an den Egerfelsen, Walkmühle bei Duppau, Chlumberg bei Pomeisl; Waltsch: am Adelsberg, Hampelberg, hinter dem Parke, Felsen bei der Liná-Schäferei; Jechnitz über der Brenntenmühl (Čf).

Melandryum noctiflorum Fr. Rudig, Oleschau bei Duppau (Čf). Mirotic: Lehne unter dem Kněžský les (D)!

Melandryum silvestre Röhl. Wald Chropotín bei Bolehošt, Wald oberhalb Staňkov, Hain hinter Gross-Bělč (U).

† Malva crispa L. Königgrätz: in Rosnic verwildert (U).

Malva alcea L. Jechnitz, Wickwitz, Klösterle (Čf). Um Neuhaus mehrfach (St).

† Malva moschata L. Duby bei Kladno: 1 Expl. an der Bahn eingeschleppt (Wt)!

Althaea officinalis L. Pardubic: am Kanal 3 Stöcke (J)! wohl verwildert.

Tilia platyphylla Scop. Adelsberg bei Waltsch, Giesshübler Sauerbrunn (Čf).

Hypericum humifusum L. Zdechovic, Nerozhovic bei Heřman-Městec (Z).

Hypericum tetrapterum Fr. Teiche bei Waltsch und Petersburg (Čf).

Hypericum montanum L. Eichberg bei Podersam, Adelsberg bei Waltsch (Čf).

Hypericum hirsutum L. Königgrätz, Hoch-Oujezd, Bolehošť (U). Chrudim: bei Ouřetic, Hyksovo peklo (Z)! Kornhaus bei Schlan (B)! Galgenberg bei Waltsch (Čf). St. Benigna, Padrť (J). Podolsko im südlichen Moldauthal (Ci)!

Elatine hexandra DC. Am nordwestlichen Winkel des Grossen Teichs bei Bolevec in Menge, dicht gesäet (1885)!

Oxalis acetosella L. β) **rosea** Hartm. Im Neuköniggrätzer Wald auf der Černá stráň unter der weissblühenden Form ziemlich häufig (U)!

Oxalis stricta L. Schlosswälle in Pardubic (J)! Chrudim und Heřman-Městec in Gärten (Z)! Aecker bei Skuhrov bei Melnik (Pl)! Tábor: häufiges Gartenunkraut (S).

† Impatiens parviflora DC. Weisswasser: im Graben nächst dem Bräuhause zahlreich, wohl aus dem Garten der Forstlehranstalt entkommen (Hz)! In Kelštic bei Melnik massenhaft (Pl)!

Insel bei Lobositz (C). Bei Salesl an der Bahn (Wiesbaur Öst. B. Z. 1885 N. 11). (Die Elbstandorte wohl von Prag aus durch das Moldauwasser entstanden).

Geranium columbinum L. Neuköniggrätzer Wald; Wald Habřina über Nepasic (U). Chotěboř (D)!

Geranium phaeum L. Wildenhchwert: Wiesen bei Landsberg (V). Zdechovice bei Přelouč (J)!

Linum tenuifolium L. Kladno: im Woleškathale (Lichtnecker). Schlan: auf Felsen im Přelicer Thal (Bk)! Kalklehne am Eingange in das Bilichover Thal bei Pochwalow, auf kleiner Fläche, nicht viel! Leitmeritz: auch Weingartenränder bei Čalosic (F)!

Linum flavum L. Gehänge zwischen Kladno und Libušín (Wt)! Leitmeritz: auch auf dem Weissen Berge bei Podivín, massenhaft (C)!

Radiola linoides Gmel. Am unteren Padrť-Teiche (J)! Záblatský-Teich bei Lomnic (Wm)!

Polygala amara L. Sumpfwiesen unterhalb Chržín bei Welwarn ziemlich zahlreich (*b.* uliginosa, Kb). Kladno: nasse Wiese bei Hnidous, sowie zwischen Kladno und Dobrá (Wt *b*)! Lehne zwischen Kladno und Libušín, (*a.* genuina Wt)!

† Rhus cotinus L. Burg Wostray bei Mileschau, mit R. typhina, mehrere Bäume, gepflanzt (C).

Dictamnus albus L. Auf dem Chlum bei Jungbunzlau (Hz)! Lobosch; Hügel zwischen dem Kubačka und dem Debus bei Praskowitz massenhaft (C). Am Eichberge bei Podersam oben in Menge (Čf)! Am Skytalberge selten (ders.)!

Oenothera biennis L. Königgrätz, Hohenbruck (U)!

Oenothera muricata L. Am Egerflusse unterhalb Saaz, in Menge, auch mit O. biennis zusammen (Čf)!

Oenothera muricata × biennis (O. Braunii Döll). An der Eger mit den vorigen (Čf)!

Epilobium hirsutum (L.) Jacq. Měcholup bei Saaz, Waltsch, Duppau (Čf.)

Epilobium Lamyi F. Schultz. Skytalberg bei Waltsch (Čf)!

Epilobium obscurum Schreb. (E. virgatum Fr.). Um Rudig, Waltsch, Petersburg (Čf)! Vrcovice bei Písek (Ci)!

Epilobium parviflorum × roseum (E. Knafii Čel.). Bäder bei Písek (Ci)!

Epilobium parviflorum × palustre (E. sarmentosum Čel.). Bach im Záduší bei Vrcovic bei Písek (Ci)!

Epilobium roseum × montanum. Beim Hofe Sworeschau bei Gratzen in Wiesengräben, selten (T)!

Circaea lutetiana L. Hoch-Oujezd zahlreich (U)! Kuňovic bei Hohenbruck; auf der Křivina bei Vyhnanic nächst Týniště, Chropotín-Wald bei Bolehošť, Fasanerie bei Unter-Přím (ders.), „Valy" bei Češov (Kb). Kleštice bei Melnik (α. Pl)!

Circaea intermedia Ehrh. An der wilden Adler bei Potenstein und bei Litic (U)! Oedschlossberg bei Duppau, Hoher Reinstein bei Waltsch (Čf)! Bei Klösterle im Thal über Ketwa (Čf).

Circaea alpina L. Königgrätzer Wald, Krňovicer Wald (U). Chrudim: an der Chrudímka bei der Klobásov-Mühle (Z)! Hoher Reinstein bei Waltsch (Čf)!

Myriophyllum verticillatum L. Trockene Gräben der Königgrätzer Wälle (Landform, U)! Pardubic: auch beim Nordwestbahnhof, zahlreich (J)!

Myriophyllum spicatum L. Alt-Lissa: im Wlkawabache (J)! Lobositz (C)! Chudenic: Ouňovicer Teich! Tümpel bei Hráz bei Merklín (Čf)!

Eryngium campestre L. Königgrätz: nur bei Černilov bei Smiřic (U)! Waltsch, Pomeisl, Rudig, Podersam (Čf).

Sanicula europaea L. Chotěboř (D)! Fasanerie bei Ratibořic (Čf)! Chvojno, Třebechovic [Hohenbruck], Bolehošť (U)! „Valy" bei Češov, Hain Liškov bei Slavostic (Kb). Um Chrudim, Heřman-Městec, Ctětín bei Nassaberg häufig (Z)!

Astrantia major L. Königgrätzer Wälder, bei Hoch-Oujezd, Hain Chropotín bei Bolehošť (U)! Holic (J)! Im Háj bei Hoch-Weselí spärlich (Kb). Budíner Hain (Bš)! Chlumberg bei Pomeisl, zwischen Rodisfort und Giesshübel-Puchstein; Klösterle; zwischen Okenau und Stengles (Čf).

Cicuta virosa L. Kokoříner Thal: im Teich unterhalb der Mühle Podhrad (Pl)! An der Lužnic bei Alt-Tábor (S).

Berula angustifolia Koch. Chrudim und Heřman-Městec, häufig (Z)! Skuhrov bei Melnik (Pl)! Stein-Žehrovic bei Lána (Wt). Waltsch, Rudig (Čf)!

Falcaria vulgaris Bernh. Um Podersam, Jechnitz, Welchau, Wickwitz, Klösterle (Čf). Mirotic (D)!

Bupleurum rotundifolium L. Welwarn: Feld unter Radovic um die Kapelle (Kb).

Bupleurum longifolium L. Leitmeritz: Gebüsche bei Menthau, einzeln (F). Waltsch: Anhöhe hinter dem Parke, reichlich (Čf)!

Chlumberg über dem Dorfe Goedesen bei Pomeisl (ders). (Westlichste Standorte).

Bupleurum falcatum L. Hohenbruck: bei Hoch-Oujezd und bei Jenkovic (U)! Waltsch: Anhöhe hinter dem Parke, mit vorigem (Čf). Klösterle: am Egerberg; zwischen Woselwitz [Oslovice] und Ketwa [Kotvina] (ders.).

Seseli coloratum Ehrh. Jičín: am Nordfusse der Prachower Felsen (Smolař). Beim Jabkenicer Thiergarten (Ž). Am Košťál, Steinanger oberhalb der Seidschitzer Bitterquellen (C)!

Seseli Libanotis Koch. Mauer der Klobásov-Mühle bei Chrudim, einige Exempl. (Z)!

Silaus pratensis Bess. Pilsen: an der Strasse unter dem Weissen Berge 1 Expl., offenbar eingeschleppt!

† Foeniculum capillaceum Gil. Weinberge beim Lobosch; unter der Sovice bei Raudnic (C).

Pastinaca opaca Bernh. Oberbrenntenberg und Chlumberg bei Pomeisl zahlreich (Čf)! Ziegenberg bei Petersburg (ders.). Chudenic: auch in Balkov und Grillendorf!

Peucedanum cervaria Cuss. Javůrka bei Holic (J)! Anhöhe hinter dem Parke bei Waltsch, Chlumberg bei Pomeisl, Berg Debisch bei Welchau (Čf)!

Peucedanum oreoselinum Mönch. Raudnitz: unter der Sovice; Fuss des Eisbergs bei Kamajk (C)! Um Rudig häufig (Čf)!

Peucedanum palustre Mönch. Chrudim: Teich na skalách (Z)!

Imperatoria ostruthium L. Erzgebirge: bei Abertham auf Wiesen gegen Bäringen und selbst am Bache im Modergrunde, offenbar wild!

Laserpitium prutenicum L. Am Palác bei Heřman-Městec (Z)!

Caucalis daucoides L. (genuina). Bei Chrudim selten (Z)! Zwischen Saaz und Pertsch, vor Kl.-Holetitz, bei Waltsch, am Chlumberg bei Pomeisl (Čf).

Scandix pecten Veneris L. Netovic bei Schlan (Bk)!

Chaerophyllum bulbosum L. Chrudim: auch bei Ouřetic, Vestec, Hyksovo peklo (Z)! Waltsch; Mekl und Rednitz bei Duppau (Čf)!

Chaerophyllum aromaticum L. Schlackenwerth gegen Wickwitz; um Jechnitz (Čf).

Chaerophyllum aureum L. Schlackenwerth: in der Ebene und im Erzgebirge bis Joachimsthal, auch bei Abertham, sehr häufig! Waltsch (Čf).

Meum athamanticum Jacq. Erzgebirge: auch auf Waldwiesen zwischen Abertham und Joachimsthal! zahlreich auch bei Weipert (F). Eichwald oberhalb Teplitz, einzeln (F).
Conium maculatum L. Oupor bei Melnik häufig (Pl)! Waltsch (Čf). Vyšensko bei Chudenic (Čf)!
Hedera helix L. Bei Boskov bei Semil „v kopaninách" in grosser Menge auf Felsen (S). Auf dem Hügel zwischen dem Kubačka und dem Debus bei Praskowitz blühend (C). Schlackenwerth: am Felsen des Berges nördlich von Wickwitz klimmend und reichlich blühend (Čf).
Cornus mas L. „Na kozince" bei Königgrätz (U)! Am Chlum bei Jungbunzlau auf kleiner Strecke häufig (Hz)! Feuchter Hain bei Lešan, unter der Lehne bei Hleďsebe, Hain bei Roztok (Kb).
Ribes grossularia L. Waltsch: am Adelsberg, Galgenberg, Ruine Neuhaus, Liná-Schäferei u. s. w. (Čf). Neuhaus: bei Rudolfsau, Schmid's Mühle am Abhang (St).
Ribes rubrum L. Fasanerie bei Ovčár bei Kuttenberg (F).
Saxifraga aizoon Jacq. Radotíner Thal gegenüber Hinter-Kopanina auf Felsen nächst dem Standort der Daphne cneorum (C).
Saxifraga caespitosa L. (S. decipiens Ehrh.). Lhota-Berg bei Mileschau (α), Langes Loch bei Kundratic (β. villosa) (C).
Saxifraga tridactylites L. Bei Jungbunzlau häufig (Hz)! Auf Wiesen bei Lissa sehr häufig, mit Phyteuma orbiculare (J).
Chrysosplenium alternifolium L. Waldstein bei Turnau (Kb). Libušín bei Kladno, selten (Wt). Modergrund unterhalb Abertham! Wälder zwischen Říčan und Schwarz-Kostelec (Čf)! Tábor: in der Pintovka (S).
Chrysosplenium oppositifolium L. Chotěboř: im Walde vor dem Horní mlýn (D)!
Sedum purpureum Schult. Erzgebirge: bei Eichwald im Holzschlag auf der Soldatenhöhe, im Gestein, auch bei Tellnitz (F). Warta: vor Waffenhammer im Steindamm an der Strasse (Čf)!
Sedum album L. Saaz (Čf).
Sedum villosum L. Torf am Padrťbache bei Strašic, reichlich (J)!
Sedum rupestre (α. glaucum). Klösterle, Warta, Duppau, Eichberg bei Podersam, Chlumberg bei Pomeisl, Mittelmühle bei Jechnitz, Gross-Holetitz bei Saaz (Čf).
Sempervivum tectorum L. Hausdächer in Bilichau! Steindamm unterhalb des Lobosch, Mauern in Lobositz (C). Mauer von Měcholup bei Saaz, blühend (Čf).

Sempervivum soboliferum Sims. Litic bei Potenstein (U). Abhänge der Otava bei Vrcovic, blühend (Ci)!

Cotoneaster vulgaris Lindl. Velký háj bei Lešan, Zádušní háj bei Nelahozeves, Hain Lutovník bei Kralup (Kb). Oberbrenntenberg und Chlumberg bei Pomeisl; Waltsch: im Thale zwischen Goedesen nnd der Worschka-Schäferei; Heckelberg bei Klösterle (Čf).

Pirus communis L. Basaltfelsen des Debischberges gegenüber Welchau bei Schlackenwerth (Čf).

Pirus torminalis Ehrh. Chvojno bei Königgrätz, als Unterwuchs (U)!

† Pirus sorbus Gärtn. Leitmeritz: um die Weingärten bei Malitschen, fruchttragend (C)! Unterhalb des Košťál bei Trebnitz (ders.).

Rosa gallica L. Písek: Kirchlein bei Vrcovic (Ci)!

Rosa trachyphylla Rau. *a)* glabra. Abhänge bei Libušín bei Kladno (Wt)!

b) Jundzilliana (Bess.). Moldauufer bei Podolsko oberhalb Klingenberg (Ci)!

Rosa alpina L. Kalkmergelabhänge an der Aupa zwischen Böhm.-Skalic und Ratibořic (Čf)! Lomnic a. Lužn.: Erlengebüsche bei Přeseka (Wm);

Rosa cinnamomea L. Im Bachufergebüsch bei Rudig, wohl gepflanzt oder verwildert (Čf)!

Rosa glauca Vill. Zwischen Saaz und Holetitz, Rudig (Čf). Abhänge der Otava unterhalb Vrcovic (Ci)!

Rosa coriifolia Fr. (R. mollis Presl). Zwischen Saaz und Holetic an der Strasse, Rudig (Čf)! Říčan (Čf)!

Rosa rubiginosa L. *α)* laevis (R. sepium Thuill.). Zwischen Saaz und Holetic (Čf)! Rudig, Pomeisl, Waltsch, Welchau (ders.). Písek: Otavafluss bei Vrcovic; Felsen der Moldau bei Podolsko (Ci)!

Rosa tomentosa Sm. *a)* vulgaris (R. umbelliflora Sm.). Kladno: im Krnčíthale u. a. (Wt, f. scabriuscula, als mollissima)! Südliches Moldauthal bei Podolsko (Ci)! Lomnic a. Lužn.: unter dem grossen Abfluss des Rosenbergteiches (f. scabriuscula, Wm)!

Poterium muricatum Spach (P. polygamum W.K.). Breitet sich besonders durch die Bahnen bei uns immer mehr aus. Wiesenrand vor der Fasanerie bei B.-Skalic, nächst dem Bahndamme (Čf)! Eisenbahndämme bei Kostomlat a. Elbe (V). Prag: Eisenbahndamm in Hlubočep, in Menge (Čf)! Am Bahndamm bei

Říčan zahlreich und im Parke von Schwarz-Kostelec (ders.)! Am Radobyl bei Leitmeritz zahlreich (F)! Waltsch: über dem Liná-Teiche im Luzernerklee; bei Rudig und bei Klösterle an Bahndämmen (Čf).

Geum rivale L. Böhm.-Skalic häufig (Čf)!

Potentilla procumbens Sibth. Chrudim: bei Nerozhovic, im Waldschlage, selten (Z)!

Potentilla alba L. Lissa (J). Chlumberg bei Pomeisl (Čf)!

Potentilla canescens Bess. Chrudim: Burg Rozpakov bei Ouřetic (Z)! Pozdeň bei Schlan (Bk)! Waltsch (Čf).

Potentilla recta L. Duppau: hinter Neumühle am Strassendamme (*β*. obscura) (Čf). Klingenberg im Moldauthale *β*. (Ci)!

Potentilla supina L. Jungbunzlau nicht selten (Hz)! Říčan! Uferdamm des Grossen Teiches bei Vyžlovka (Čf)!

Comarum palustre L. Říčan gegen Schwarz-Kostelec (CP)! Östliche Ufer der Padrťer Teiche häufig mit Oxycoccos und Eriophorum vaginatum (J). Rudig; Torfe bei Gottesgab (Čf).

Rubus saxatilis L. Radotíner Tnal gegenüber Kopanina: auf Felsen mit Polypod. Robertianum, unweit der Daphne cneorum (C & Ha)! Leitmeritz: Longes Loch bei Kundratitz (C).

Rubus suberectus Anders. Theresienthal bei Gratzen! Lomnic a. Lužn.: Erlengebüsche bei Černičný (Wm)!

Rubus thyrsoideus Wimm. Wälder zwischen Holic und Týniště (J)! Verbreitet zwischen Chrudim und Chrast an der Bahn!

β) virescens. Kladno: im Krnčíthale (Wt)! Holzschläge im Peiperzer Revier bei Bodenbach gegen den kalten Born (F)!

Rubus radula Sendtn. *a*) cinerascens. Skutč: Wälder über dem Krounabache unweit Richenburg!

b) viridis Čel. Peiperz bei Bodenbach (F)! Lomnic a Lužn.: „na Žabicích“ (Wm)!

Rubus glandulosus Bell. *b*) Schleicheri. Piberschlag bei Gratzen (T)!

c) hirtus. Wälder bei Skutč! Theresienthal bei Gratzen!

Rubus dumetorum W. N. var. tomentosus. Kriegern: zwischen dem Ziegenberg und dem Liboritzer Wald (Čf)! Eugensberg bei Chudenic (ders)!

Rubus tomentosus Borkh. Am Abhange über dem Schreckenstein häufig; Waltsch: am Hrušinaberg, Anhöhe zwischen dem Park und Ruine Neuhaus (Čf)!

Spiraea aruncus L. Čertův stůl bei Chotěboř (D)! Theresienthal bei Gratzen, häufig!

Spiraea ulmaria L. α) discolor. Wälder bei Neu-Königgrätz, Hoch-Oujezd und Hohenbruck (U)!

† Amygdalus communis L. Unter dem Lobosch bei der Weinpresse viele starke, fruchttragende Bäume (C)!

Prunus chamaecerasus Jacq. Wopparner Thal bei Lobositz, gegenüber der Kaisermühle (C)!

Sarothamnus vulgaris Wimm. Alt-Lissa (J). Neuhaus häufig (St)

Cytisus capitatus Jacq. (a. vulgaris). Bei Skutč häufig! Podhůra und Palác bei Chrudim (Z)! Theresienthal bei Gratzen, beim Badhaus nicht häufig!

Cytisus austriacus L. Bei Hoch-Lieben: rechts an der Strasse nach Byšic, Graben am Ende eines Kiefernwaldes (Žára)!

Cytisus biflorus l'Hér. Wald zwischen Hohenbruck und Librantic und bei Jenkovic (U)! Dvakačovic bei Chrudim (Z)! Neuhaus: Remise hinter Rudolfsau (St).

Cytisus nigricans L. Skutč! Podersam, Rudig, Kriegern, Pomeisl (Čf).

Genista germanica L. Kotěschau bei Petersburg (Čf).

* **Genista pilosa** L. Gratzen: im Theresienthal: auf dem niedrigen, sandigen Heideabhang hinter Neugebäu, wie gewöhnlich sehr gesellig in dicht stehenden Rasen!

Dies der erste sichergestellte Standort, denn der von Brorsen früher angegebene hat sich, trotz Reinerz, nicht bestätigt, indem ich 1880 und mein Sohn heuer zur Blüthezeit die ganze Umgegend von Ratibořic abgesucht haben, ohne eine Spur dieser doch immer gesellig wachsenden und somit nicht zu übersehenden Pflanze entdecken zu können. Die Blüthezeit ist übrigens bei uns nicht Juni, Juli (wie im Prodr. nach einer fremden Quelle angegeben), sondern Mai (vielleicht schon April), Anfang Juni. Mitte Juni fand dort H. Křížek die Art schon verblüht.

Ononis spinosa L. Lischwitz bei Měcholup, Podersam, Petersburg (Čf).

Medicago falcata L. Bei Skutč!

Melilotus altissimus Thuill. Am Bache bei Suchomast unweit Liteň (Frau Jelínek-Doubek)!

Trifolium spadiceum L. Erzgebirge: auch oberhalb Joachimsthal (Čf) und bei Weipert (F)! Waltsch: unterhalb Neuhaus, Kohlenhäusel (Čf)! Chotěboř (D)!

Trifolium hybridum L. β) parviflorum Čel. Waltsch: Basaltfelsen bei der Liná-Schäferei (Čf)!

Trifolium fragiferum L. Welwarn! Loukořan bei Třiblic (Bš)! Saaz: zwischen Lischwitz uud Lettau; bei Kriegern (Čf)!

Trifolium striatum L. Schlan: Anhöhe bei Knovíz (Bk)!

Trifolium arvense L. β) brachyodon Čel. Saaz: Sandflur zwischen Gr. Holetitz und Bukovina, Walkmühle bei Duppau, Stengelberg zwischen Welchau und Rodisfort (Čf).

† Trifolium incarnatum L. Říčan: Feld bei Tehovec (Čf)! Egermühle bei Schlackenwerth (ders.)! Bei Tábor selten gebaut und verwildert (S). In Nieder-Baumgarten bei Neuhaus verwildert (Kh)!

Trifolium rubens L. Königgrätz: Wald Ouliště über Piletic (U)!

Trifolium ochroleucum Huds. Jungbunzlau: na Radouci (Hz)! Kladno: im Woleškathale (Wt)! Fuss des Kletschenberges an der Paschkapole (C)!

Anthyllis vulneraria L. Hohenbruck: bei Gross-Bělč und bei Hoch-Oujezd (α. U)! Abhänge des Woleškathals bei Kladno (β. Wt)! Saaz: oberhalb Pukva gegen Welhütten, Weltsch: beim Köhlerhäusel, Chlumberg bei Pomeisl (Čf). Liboritzer Wald bei Kriegern (α. Čf)! Ufer des oberen Karezský Teiches bei Strašic (α. J).

Lotus corniculatus L. b) tenuifolius L. Wiesen bei der Welwarner Zuckerfabrik, mit Triglochin maritima!

Lotus uliginosus Schk. Duppau, Klösterle, Joachimsthal [nicht aber in der Gegend von Saaz, Waltsch, Jechnitz] (Čf). Tábor: Radimower Wiese, ehemaliger Teichgrund, aber spärlich (S).

Tetragonolobus siliquosus Roth. Chržín bei Welwarn (Kb). Melnik: von Wrutic bis Rousovic am Bache (Pl)!

Oxytropis pilosa DC. Hasenburg bei Libochovic (C)!

Astragalus exscapus L. Tanzberg bei Saidschitz (C)!

Astragalus cicer L. Kamence bei Holic (J)! Chrudim (Z)! Lischwitz und Liboritz bei Měcholup nächst Saaz (Čf)!

Astragalus danicus Retz. Schlan: grasiger Abhang bei Lidic (Bk)! Steinanger oberhalb der Saidschitzer Bitterquellen mit Plantago maritima, Scabiosa suaveolens, Seseli coloratum (C)!

Astragalus onobrychis L. Prag: im Baumgarten 1 Expl. (F). Schlan: grasiger Abhang bei Dřínov (Bk)!

Astragalus arenarius L. Lissa: auf sandiger Lehne beim Parke (J)! (Wiederauffindung von Tausch's Standort.)

Astragalus austriacus Jacq. Lehnen bei Lukavec bei Leitmeritz; zwischen Poplz und Ejvan bei Libochovic; Tanzberg bei Saidschitz (C).

† Ornithopus sativus Brot. Schlosswälle in Pardubic, unter gebauter Esparsette, spärlich (J)!

Onobrychis viciaefolia Scop. Im Walde bei Hoch-Oujezd wildwachsend (U).

Vicia sepium L. var. eriocalyx Čel. Klösterle: am Heckelberg bei der Ruine (Čf)!

Vicia dumetorum L. Wald bei Hoch-Oujezd nächst Hohenbruck, mit V. silvatica (U). Chrudim: auch auf der panská stráň bei Ouřetic und im Hyksovo peklo (Z)!

Vicia pisiformis L. Lhota-Berg bei Mileschau (C). Klösterle: am Heckelberg; Waltsch: Fuss des Neuhausberges, und im Thale zwischen Goedesen und der Worschka-Schäferei (Čf).

Vicia silvatica L. Wald bei Hoch-Oujezd (U). Tannenberg bei Jechnitz (Čf).

Vicia tenuifolia Roth. Kleštičer Wiesen bei Melnik (Pl)! Am Debus bei Praskowitz mit Linum flavum (C). Am Abhang über dem Schreckenstein bei Aussig häufig!

Vicia villosa Roth. Melnik: nur in einem Kornfeld bei Kleštic (Pl)!

Vicia tetrasperma Mönch. Eichberg bei Podersam (Čf)!

Vicia monanthos Desf. Um Duppau, Rudig nicht selten (Čf)! Zwischen Petersburg und Woratschen (ders.).

Lathyrus silvestris L. Prag: Kiefernwald zwischen Hodkovičky und Lhotka (C). Leitmeritz: zwischen Nemtschen und Čersing; auf einer Schleusse am Radelstein (C)! Um Waltsch, Duppau häufig, Klösterle (Čf). Neuhaus: Thal von Heinrichschlag, häufig (St).

Lathyrus heterophyllus L. Leitmeritz: auch im Langen Loch bei Kundratic, mit Arctostaphylos (C)! und am Rabenstein bei Sebusein (Kh)! Südabhang des Eichbergs bei Podersam (Čf)! Berg Krušina bei Rudig, Südabhang und Gipfelplateau, in grosser Menge (Čf)! Oberbrenntenberg bei Pomeisl, Südabhang im Gestein, spärlich (ders.).

Variirt nach vorliegenden Exemplaren der Waltsch-Podersamer Gegend mit breiteren, kürzeren Blättchen, davon die der unteren Blätter oval, und mit schmäleren, länglich-lanzettlichen bis lanzettlichen, verlängerten Blättchen.

Lathyrus tuberosus L. Königgrätz, Smiřic, Hohenbruck (U). Saaz gegen Weletitz, Lettau bei Podersam (Čf).

Lathyrus montanus Bernh. Erzgebirge: auch oberhalb Joachimsthal! und bei Weipert (F).

Lathyrus niger Bernh. Böhm. Skalic: Lehne an der Aupa gegen Ratibořic (Čf)! Park von Heřman-Městec, Podhůra bei Chrudim (Z)! Eichberg bei Podersam (mit L. vernus), Kriegern: beim Liboritzer Wald, Chlumberg bei Pomeisl, Dewischberg bei Welchau, Heckelberg bei Klösterle (Čf)!

7.

Dodatky ku fauně českých hub sladkovodních.

Studie faunistická.

Podává **Fr. Petr**, přednešeno dne 29. ledna 1886.

(Práce z české university s 1 tabulkou.)

Neúplné dosud jsou vědomosti naše o biologických poměrech a geografickém rozšíření hub sladkovodních. Neobyčejná proměnlivosť jich, podmíněná hlavně vlivem okolností vnějších, znesnadňuje velice stanovení znaků druhových a tím i veškero pozorování jednotlivých, v přečetných varietách a různých odstínech se objevujících forem. Domnívám se tudíž, že každý příspěvek, obohacující známosti naše ve směrech naznačených, přispěje k objasnění záhadné povahy řečených organismů. V přítomné práci podávám výsledky nových pozorování svých, konaných v roce 1885. jednak v rodišti svém (Německém Brodě), jednak v Praze, na materialu konservovaném.*) Pozorování týkají se především dvou, pro Čechy nových druhů, z nichž jeden i pro vědu novým jest, jakož i některých, zvláštním rozšířením svým anebo velikou svou měnivostí zajímavých forem.

Roku 1877. známo bylo z Čech 5 druhů hub sladkovodních, — mezi nimiž jeden (Spongilla jordanensis Vejd.) nově popsaný, — jež r. 1883. prof. *Vejdovským* ve 4 variety rozlišeny; z nich pak jedna (Ephydatia Mülleri Forma *B)* za „dobrý“ druh, jménem Ephydatia amphizona Vejd. označena. Objevením Spongilla fragilis Leidy r. 1884 vzrostl počet českých druhů na 7, který letošním (1885) nalezením Carterius Stepanowii mihi a Ephydatia bohemica nov. sp. na číslo 9 doplněn. — Stejné poměry číselné (mimo dvou posléze jmenovaných druhů) jeví se také v zemích sousedních, v Německu (Retzer) a Haliči (Dr. Wierzejski).

---

*) Milou povinností jest mi projeviti vroucí dík p. prof. Dr. Vejdovskému za všestranné účastenství a laskavou pozornosť této práci mé věnovanou a za mnohou vzácnou radu, kterou ji obohatil.

Hranice rozšíření jednotlivých druhů hub sladkovodních nelze ovšem na ten čas pro nedostatek srovnávacího pozorování udati, jest ale pravdě podobno, že tato zajímavá skupina živočišná mnohem většího v Evropě má rozšíření a pestřejší rozmanitosti forem, než se obyčejně považuje. Oprávněnou zajisté jest domněnka, že v Čechách jiné ještě vzácné tvary se objeví, až jen ve všech částech a poměrech svých prozkoumána bude naše vlasť!

Carterius Stepanowii mihi.

Naleziště a popis.

Velice památný tento druh naleznul jsem v měsíci červenci (poprve dne 18.) r. 1885 ve dvou, nad sebou ležících rybnících okolí Německobrodského — prvé to naleziště nejen v Čechách, ale i ve střední a západní Evropě vůbec. Zvláště v rybníce hořením, t. zv. „U doubku“, objevuje se v množství neobyčejně hojném, kdežto v dolením, t. zv. „Slavíkově“, jen v několika málo exemplářích nalezena.

Trsy její, v oněch místech sbírané, jsou celkem útlé, polehavé, něžně, často až vláknitě rozvětvené a povlékají u vzájemném proplétání četné, zvláště odumřelé stonky, listy a kořeny různých travin a sítin, tvoříce tak husté, hnízdovité zmotaniny a uzliny nebo tvary síťovité (Fig. 1.). Jednotlivé jich větévky bývají sploštilé, řídčeji oblé, na povrchu více méně hrbolaté a velmi jemnou, sotva znatelnou mázdrou, v níž nehojné jehlice parenchymové roztroušeny, jako by opředena. Nezřídka bývají také bezprostředním podkladem rourky mechovek (zvl. Plumatella repens L.), jež pak trsem této houby sladkovodní jsou obaleny, takže jen konce jednotlivých rourek volně vyčnívají. — Velikosť trsů je velice různou, což jest ovšem v poměru s podkladem, na němž se usazují. Průměrná délka jich bývá 8—12 cm, šířka pak 2—4 cm.

Za živa jest houba tato měkkou, ohebnou, barvy krásně smaragdově zelené, někdy až do skvostně modravé přecházející. Zelenosť tato podmíněna jest přítomností četných jednobuněčných řas (Zoochlorella parasitica Brandt) z rodů Palmella, Tetraspora, Gleocystis, Pleurococcus, Protococus, Raphidium a mn. j., jakož i vyšších: Pediastrum, Closterium, Cosmarium, Polyedrum *(trigonum, tetragonum, lobatum)*, Scenedesmus (*obtusus, acutus, quadricaudatus, dimorfus*) a p., jež v těle houby *zcela samostatně* vegetují. Co se fysiologické funkce těchto řas a vzájemného jich poměru k vlastním houbám sladkovodním týče, nemnoho lze udati. Příspěvky *K. Brandtovy, G. Entzovy, O. Hammanovy* a j. jsou celkem nedosti úplny a četných dodatků potřebují.

Exempláře v líhu uschované jsou nelámavé, špinavě žluté nebo zelenavé až šedé. Za sucha jest silně seschlou, kruchou, barvy tmavozelené s nádechem modravým, který později v matný přechází.

Oscula jsou velice řídká, nepatrná, nahodile rozestavená, tvaru kruhovitého nebo nepravidelně vejčitého, velikosti 0·5—0·2 mm; *břeh* jich jest vždy plochým, skoro neznatelným. Rovněž spoře vyskytují se malé, nezřetelné pory. — *Dybowski,* jenž několik jen malých trsků tohoto druhu ku prozkoumání obdržel, podotýká toliko, že „houba tato obrůstá povrch různých těl, jako: listy a stonky travin, kousky kůry, tenké proutky. Exempláře líhové podobají se kouskům rozmočeného chleba“ *).

Kostra houby tvořena jest z dlouhých, často dichotomicky se dělících vláken, jež složena jsou z jehlic rovných anebo poněkud zakřivených, hladkých, ku konci krátce nebo dlouze kopinatých, délky 0·27—0·31 mm. a tloušky 0·011 mm. (obr. 2.); vnitřní structurou svou souhlasí úplně s jehlicemi hub ostatních. Zrůdy jich vyskytují se poměrně dosti spoře. Abnormitou nalezeny jehlice na obou nebo toliko jednom konci zakulacené a na povrchu malými osténky opatřené. U r u s k ý c h trsů jsou všechny jehlice skelettové jemně řídce ostnité.

Mezi jehlicemi skelettovými roztroušeny jsou ve velikém množství jehlice parenchymové, mírně zahnuté, řídčeji rovné, k oběma koncům volně zúžené, délky 0·04—0·07 mm. a četnými, často dosti dlouhými výhonky opatřené (fig. 3, 4 *A*). Tyto bývají uprostřed jehlice nejmohutnější, k oběma koncům pak stávají se značně menšími a hojnějšími; tvaru jsou válcovitého, někdy kuželovitého a malou, obyčejně v jemný hrotek vybíhající naduřeninou zakončeny a často ještě menším osténkem po straně označeny. Přesné rozlišení těchto výhonků ve trojí druh, jak *Dybovski* uvádí,**) zdá se dle hojných modifikací a přechodů pouze nahodilým. — Zvláštností vyskytují se jehlice parenchymové hladké, nebo blíže obou konců terčem obdané (fig. 4 *B*, 5 *ab*), čímž tvoří jakýsi přechod ku vlastním amphidiskům, kryjícím vnitřní schránku gemmulae.

Z i m n í p u p e n y (g e m m u l a e), jež značným množstvím po celé léto i podzim veškerá pletiva houby volně pronikají, jsou neprůhledné, za živa lesklé, barvy v mládí světle plavé nebo žluté, po-

*) Замѣтка о бадягахъ южной россiн В. И. Дыбовскаго. Харьковъ 1884, pag. 2. Отдѣльные оттиски изъ »Трудовъ Общества испытателей природы при Харьковскомъ Университетѣ« Tom. XVI.

**) l. c. pag. 3.

zději hnědavé. Tvar jich jest kulovitým, někdy ellipsoidním, velikosti v dospělém stavu 0·48—0·55 mm. Na povrchu bývají trochu hrbolaté a vyniklými amphidisky ostnité (fig. 9). Za sucha jsou mdlé, špinavě žlutavé nebo šedé, poněkud seschlé, při čemž hoření pol gemmulae, z něhož vzdušná rourka s korunkovitou ozdobou vyniká, dovnitř se vchlipuje, tak že celá gemmule útlému člunku*) s mohutným, vždy nahoru směřujícím stožárem se podobá. Podobné, leč mírné vchlípení objevuje se také na čerstvých, úplně zralých gemmulích.

Vnitřek dospělé gemmulae vyplněn jest zárodečným tělesem, jež v kuželovitý cípek proti vyvýšenině hořeního polu vybíhá a z dosti velikých, polygonálních, zřetelnými, ploskými nebo kulovitými jádry opatřených buněk se skládá (fig. 8 *a*). Stěny jich jsou útlé a na svých hranách často trochu kolenchymaticky stlustlé; působením pikrokarminu barví se, podobně jako jádra buněčná, pěkně na červeno; jodem zbarvuje se veškeren obsah gemmulae stejnoměrně žlutě.

Těleso zárodečné uzavřeno jest v pevnou, as 0·005 mm. tlustou otočku chitinovou, barvy hnědavé nebo plavé (fig. 8 *b*). Tato jest v obrysu svém pravidelně okrouhlou neb elliptickou; jediné na hořením polu zvedá se z pravidelného obvodu vyvýšenina, přecházející v rovnou, řídčeji poněkud zahnutou a k volnému konci kuželovitě zúženou vzdušnou rourku (**Поровая трубка** Dyb.) délky 0·105 až 0·143 mm. a průměru 0·03—0·04 mm. (fig. 8 *f*). Rourka tato, jež za normálních poměrů vzduchem naplněna bývá, jest od nitra gemmulae slabou přehrádkou oddělena (fig. 8 *h*) a na hořením konci svém jemnou, souvislou a mocně vydutou stěnou překlenuta (fig. 8, 11 *j*). Otvor, který prý, dle udání *Dybowského*,**) na vrcholu rourky se nalézá, nemohl jsem ni v jednom případě postřehnouť; podobně i vzdušná rourka četných druhů amerických jest na vrcholu svém úplně uzavřena. Stěny její bývají o něco slaběji vyvinuty než vnitřní otočky chitinové, ač nikdy ne tak nápadně, jak badatel onen v pojednání svém naznačuje***).

Na hořením konci rourky, těsně pod vrcholem její, vypíná se nepravidelně hvězdovitá ozdoba chitinová (obr. 8, 9), jež korunkovitě

---

*) Na tuto podobnosť upozornil poprve prof. Vejdovský ve svých: Bemerkungen über einige Süsswasserschwämme. (Sitzungsber. der k. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften) pag. 57.

**) Дополнительныя свѣдѣнія къ познанію прѣсноводной губки Dossilia Stepanowii. Д-ра В. Дыбовскаго. Харьковъ 1884. — Отдѣлные оттиски изъ »Трудовъ Общества испытателей природы при Харьковскомъ Универ.« Tom. XVIII.

***) l. c. Tom. XVIII. fig. 7 *c*.

(obr. 10) na ni přisedá. Korunka tato (Придатокъ Dyb., cirrous appendages Carter, Porusanhang Dyb.), sestávající v dospělém stavu z vlnitého, na okraji svém nepravidelně laločnatého nebo paprskovitého terče (obr. 11, 12), jest s délkou rourky vzdušné *v úzkém poměru korrelace:* čím delší rourka, tím menší korunka a naopak; průměr této bývá 0·067—0·105 mm., nikdy však nepřesahuje délku rourky. Počet a vzájemné postavení jednotlivých laloků (obr. 11, 12 *p)* jest měnivým; obyčejně 5—8 paprsků hlavních, širších, mnohdy kraji svými do vnitř trochu vchlípených a několik (as 2—6) vedlejších, více oblých a často jako by uzlinatě zohýbaných; mohou však buď vedlejší, buď hlavní paprsky scházeti. — U forem ruských jest prý korunka skoro pravidelně čtyrhranná, na jednotlivých hranách pak štěpí se v několik (3—5) různě dlouhých a silných větévek.

Ku vnitřní otočce chitinové přikládá se mohutná vrstva vzduchonosná (obr. 8, *c)*, jež stejnou silou celou gemmuli obejímá. Toliko na vrchním polu sklání se v kotlinovitou prohlubinu, z níž vzdušná rourka vyniká. Vrstva ta sestává z mnohobokých, namnoze v dosti pravidelné řady urovnaných komůrek, velikosti 0·002—0·003 mm. Stěny jejich jsou velice jemné (fig. 13), pružné, takořka bezbarvé; na straně, kde ku zevnější, je pokrývající otočce chitinové (*e*) přistupují, poněkud mohutní čímž zároveň ku pevnosti její vydatně přispívají. *Dybowski* udává,*) že „vrstva vyplňovací (**Промежуточное образованіе**) sestává z okrouhlých buněk bezjaderných, velikosti rozličné, . . . větší z nich jsou nepravidelně roztroušeny mezi menšími.“ U našich tvarů však nejsou rozměry jednotlivých komůrek valně rozdílny.

Do vrstvy vzdušných komůrek vloženy jsou, kolmo na vnitřní otočku chitinovou, přečetné amphidisky (fig. 8 *d*). Osy jejich spojující terčovité štítky, jsou oblé, velice štíhlé a kolmými, ostře špičatými ostny a hroty hojně opatřeny (fig. 5, 6). Uvnitř prostoupeny jsou kanálkem, který zvláště u pálených dvojštítků zřetelně vyniká. Jednotlivé štítky, jichž průměr bývá 0·014—0·017 mm., jsou hvězdovité, obyčejně se 4—6 hlouběji dělenými paprsky hlavními, které pak v několik vedlejších jsou rozeklány; na okraji jsou jemně zoubkaté nebo vroubkované (fig. 7). Dle délky možno rozeznati amphidisky dvojího spůsobu: delší a kratší. Délka těchto rovná se z pravidla výšce vrstvy vzduchonosné, dosahujíc až 0·047 mm., tak že zevnější otočka chitinová (tloušťky 0·002—0·003 mm.), která pokrývá vrstvu onu, zároveň i je povléká. Mezi těmito kratšími amphidisky jsou

---

*) l. c. Tom. XVIII. pag. 4.

rozestaveny nepravidelně, v množství poměrně (asi třikráte) menším dvojštítky delší, velikosti 0·052—0·063 mm., jež ze společného obalu komůrkového volně (třetinou až polovinou celé délky své) vyčnívají a představují tak zároveň s korunkou na vzdušné rource umístěnou apparát zachycovací, jaký bývá v plné mohutnosti u gemmulí některých amerických hub sladkovodních (Carterius latitenta, Cart. tenosperma a j.) vyvinut, a jehož analoga též u statoblastů mnohých mechovek sladkovodních nacházíme. Jest tedy tento druh prvým a dosud jediným evropským, u něhož samostatný apparát zachovací jest vyvinut.

Vývoj jednotlivých částí gemmulae. Zcela mladé pupeny zimní jsou tvaru ellipsoidního, s vysokým kuželovitým polem hořením, na němž u dospělých zvedá se vzdušná rourka. Tato nejeví se hned v prvém stadiu vývinu gemmulae, nýbrž povstává teprve později jako nízká, často jednostranná ovruba (fig. 14), jež zvenáhla do výše se prodlužuje (fig. 15), až konečně na volném konci svém útlou stěnou se uzavře. V době té počne se tvořiti také korunka ve tvaru úzkého, nepravidelného terče (fig. 16), jehož laločnaté paprsky teprve dalším vzrůstem se vyvinou. Řídčeji postupuje vývoj korunky tím spůsobem, že nejprve povstávají jednotlivé paprsky, které později na basi své v souvislý terček se spojují. Stěny vnitřní otočky chitinové jsou z počátku slabounké, barvy jasně bledožluté a ze dvou na sobě ležících vrstev složeny, jež však později obyčejně zcela beze stopy srůstají. Amphidisky, které takořka současně s vnitřní schránkou se objevují, jeví hned od počátku rozdíl dvojí délky. Vrstva komůrek vzduchonosných vystupuje zřetelně teprve později, ač zajisté již zároveň s ostatními obaly se vyvijí. Zevnější otočka chitinová jest při vzniku svém velice jemnou, sotva znatelnou, barvy světle plavé, později v žlutou se měnící. Mohutným vzrůstem jednotlivých vrstev spěje pak gemmule ku své dospělosti.

Úvahy.

Přirovnáme-li formy české ku tvarům ruským, vystupují některé, na pohled dosti závažné rozdíly, jež však při známé proměnlivosti hub sladkovodních vůbec jsou rázu toliko podřízeného.

Dle udání *Dybowského* jeví se totiž u ruských tvarů skelettové jehlice „při bližším ohledání pokryty krátkými a ostrými ostny; ostny ty jsou tak útlé, že lehce mohou býti přehlednuty“ *). Jehlice

*) l. c. pag. 3. Tom. XVI.

takové u našich forem se nenacházejí, leč abnormitou; rozdíl tento jest ale toliko relativním, neboť četné, u jiných druhů (ku př. Ephydatia Mülleri Lbk.) vyskytující se přechody mezi jehlicemi zcela hladkými a ostnitými poukazují na nespolehlivou význačnosť znaku tohoto.

Podobně není u našich forem onoho přesného zrůznění ve trojí spůsob ostnů u jehlic parenchymových, jak Dybowski u ruských tvarů vyličuje.

Gemmulae českých exemplářů shodují se celkem s ruskými, jsou však značně větší; korunka pak chitinová, jež u našich gemmulí kruhovitě terčovitou s hojnými, nepravidelně rozestavenými laloky se objevuje, jest u ruských forem skoro pravidelně čtyrhrannou s četnými výhonky v rozích, „jež číslem i formou netoliko u rozličných exemplařův ale i u jednoho a téhož různě se jeví.“

Dle znaků uvedených vyzbrojeny jsou gemmulae Carterius Stepanowii mihi přístrojem i aërostatickým i zachycovacím — důležitými to faktory při rozšiřování se druhu. Funkce přístroje aërostatického, k němuž náleží vrstva komůrek vzduchonosných a vlastní rourka vzdušná, záleží, jak známo, ve zmenšení váhy gemmulae, což rozšiřování se druhu hlavně proudem vody nebo větrem valně napomáhá, úkol pak apparátu zachycovacího — vyniklých to amphidisků a korunky na vzdušné rource upevněné — jeví se zvláště při rozšiřování pomocí živočichů (hlavně ptáků), jakož i při usazování se gemmulí. Tím lze také vysvětliti přicházení druhu tohoto v rybníku, v němž se právě vyskytuje; rybník ten jest totiž ode dávna, jak mně známo, obvyklým stanovištěm mnohých tažných, zvláště bahenních ptáků, kteří zajisté na měkkém peří svém anebo vrásčitých nohách svých zachycené gemmulae tohoto památného druhu hub sladkovodních z cizích krajů do vlasti naší přinesly.

Mimo uvedených způsobů rozšiřování možno také předpokládati, že i trusem ptačím přenášeny bývají jednotlivé gemmulae hub, jež zároveň s potravou do ústrojí zažívacího se dostaly, na místa odlehlá. Křemitý obal jejich zabraňuje totiž, že ostré šťávy žaludeční a střevní nemohou stráviti zárodky v gemmulích obsažené; tyto pak vycházejí zároveň s exkrementy ven, aby na příhodném místě v trsy se vyvinuly.

Rozšíření a poměry příbuznosti.

V Evropě nalezen byl poprve Carterius Stepanowii roku 1884., a sice v jižním Rusku, v jezeře t. z. „Velikém“ v okresu Lebedin-

ském; později také objeven v jezírku u Donce, nedaleko dědiny Kočetòk v gubernii Charkovské a *Dybowským* pode jménem ?Dossilia Stepanowii vylíčen. Zajímavo jest, že Dybowski nejdříve pouze jehlice (skelettové i parenchymové) a amphidisky, později teprve charakteristické gemmulae druhu tohoto popsal. Druhým nalezištěm evropským (r. 1885) jsou rybníky u *Německého Brodu* v Čechách; v jiných zemích evropských druh tento dosud neobjeven.

V Americe známa byla prý tato houba sladkovodní již r. 1863, z řeky u Canterbury Road, West-Point, New-York a *Bowerbankem* pode jménem Spongilla Baileyi označena*). Diagnosa jeho zní: „Houba sladkovodní tvořící povlaky; povrch hladký. Oscula a pory nezřetelné..... Jehlice parenchymové vřetenovité, kopinaté, celé ostnité; ostny středu válcovité, tupé, velmi dlouhé a hojné. Jehlice skelettové protáhle vřeténkovité, šídlovité, mírně štíhlé..... Zimní pupeny jsou kulovité, hladké s četnými jehlicemi (t. dvojštítkovitými); amphidisky kupí se v řady ode středu k obvodu gemmulae paprskujícími. Štítky na krajích nepravidelně a hluboce klané, zahnuté, osa velmi dlouhá, válcovitá, celá ostnitá, ostny kuželovité. — Barva za sucha tmavozelená."

*Carter***) vřadil pak tento druh v rod Meyenia***) s označením Meyenia Baileyi. Znaky jeho jsou zcela souhlasné s diagnosou *Bowerbankem* udanou. Leč popisy ty pro povšechnosť a neúplnosť svoji — nečiníť se v nich žádné zmínky o vzduchonosné rource a korunce její, ni o dvojím spůsobu amphidisků — připouštějí toliko domněnky o stejnosti obou druhů, jež teprve přímým pozorováním odůvodniti nutno.

Carter, jenž na identitu Dossilia Stepanowii (dle pojednání Dybowského) s Meyenia Baileyi poukázal, považuje též Heteromeyenia repens z Pennsylvanie za totožnou†) s oněmi druhy. — Domněnku tuto však nemožno potvrditi, poněvadž vzdor jakési vzájemné příbuznosti, značné rozdíly mezi oběma druhy se objevují.††)

---

*) Proceedings of the zoological Society of London 1863 part. III pag. 451.

**) The annals and magazine of naturel History vol. VII., ser. V. pag. 95, 1881.

***) Gen. char.: Jehlice skelettové šídlovité, zakřivené, vřetenovité, ostře končité, hladké, někdy více méně ostnité, nebo více méně ve středu uaduřelé. Gemmulae kulovité neb ellipsoidní; obal složen jest ze zrnité structury, do níž vloženy jsou dvojštítky i. e. jehlicovitá tělesa, sestávající z rovné osy, jež na obou koncích štítkem na kraji hladkým nebo zubatým končí...."

†) The annals and magazine of natural History.

††) Druh tento, jakož i četné tvary cizozemské znám z vlastního názoru; bylyť jednak p. *Carterem* jednak p. *Pottsem* zaslány p. prof. Vejdovskému, jenž mně je s obzvláštní laskavostí ku zkoumání poskytnul.

Jehlice skelettové u Heteromeyenia repens jsou hladké, poněkud zakřivené, řídčeji rovné, ostře končité; jehlice parenchymové jsou podobné jako u Carterius Stepanowii, jsou však (při stejné délce) trochu silnější, někdy mírně hranaté, a četnými, nepříliš dlouhými výhonky, jež podobně jsou uspořádány, opatřeny. — Gemmulae obdány jsou vnitřní otočkou chitinovou, k níž přikládá se dosti vysoká vrstva vzduchonosná; do této vloženy jsou četné amphidisky, jež ale vesměs nad zevnější otočku chitinovou, která obal vzduchonosný pokrývá, volnými konci svými vyčnívají. Osa jejich jest velice štíhlou, válcovitou a nemnohými malými ostny nebo hrbolky opatřena. Amphidisky jeví u tohoto druhu nejen dvojí *délku*, ale i dvojí *tvar*. Štítkové paprsky u amphidisků kratších jsou totiž na plocho rozloženy a jenom konce jich jsou málo dolů sehnuty, paprsky štítků u amphidisků delších jsou však velmi dlouhé a ostře hákovitě dolů sehnuty a často ještě nazpět zatočeny. Vrstva vzduchonosná sestává z drobných, dosti zřetelných komůrek, jež mnohdy v pravidelné řady bývají urovnány. Rourka vzduchonosná, korunkou zdobená — hlavní to znak rodu Carterius — se u tohoto druhu nikdy nevyvinuje.

Co se vlastní *příbuznosti* Carterius Stepanowii s jinými druhy hub sladkovodních týče, podotknouti možno, že nejvíce blíží se k některým tvarům cizozemským, jako: Carterius latitenta Potts, Carterius tenosperma Potts, Meyenia plumosa Bowerb. a p. Zvláště Carterius latitenta z Pennsylvanie valně se podobá našemu druhu stavbou svou. Skelettové jehlice jeho jsou hladké, rovné, někdy malo zahnuté, na koncích dlouze nebo krátce kopinaté; jehly parenchymové jsou mohutnější než Carterius Stepanowii a po celé délce stejně jemně ostnité. Gemmulae opatřeny jsou velice dlouhou, silnou rourkou vzdušní, jež rovněž od nitra gemmulae tenkou přehrádkou jest oddělena a na vrchním volném konci útlou stěnou překlenuta. Na vrcholu její vypíná se zvláštní chitinová ozdoba; tato bývá na basi své terčovitou, místičkovitou nebo i nálevkovitou. Laloky však, jež u Carterius Stepanowii hvězdovitě jsou rozloženy, nevyvinují se, místo nich pak objevuje se jednostranné dvojklanné nebo jednoduché pentlicovité vlákno, jež délkou svou až i 10násobný průměr gemmulae převyšuje, dosahujíc 6—7 mm.

Rovněž amphidisky tvarem i uspořádáním svým se vzájemně podobají. Osy jejich jsou štíhlé, s dlouhými mohutnými a kolmo stojícími ostny a hroty. Ku rozdílu dvojí jich délky přistupuje také různosť tvaru štítkův: u amphidisků kratších bývají totiž jednotlivé paprsky štítkové ploše rozloženy, u delších pak jsou dolů kracovitě sehnuty.

Obal vzduchonosný, který u Carterius Stepanowii značné síly dosahuje, tak že amphidisky kratší v něm úplně se ukrývají, obmezuje se u Carterius latitenta toliko na slabou vrstvu, sestávající z velikých dosti zřetelných komůrek vzdušných, tak že *všechny* amphidisky — kratší i delší — z ní volně vynikají. Zdá se tedy, jakoby vzdušná rourka s mohutnou ozdobou pentlicovitou vyvinula se na útraty obalu vzduchonosného.

Fysiologická funkce apparátu zachycovacího, jenž u tohoto druhu v obrovských rozměrech jest vyvinut (pentlicovitá vlákna na vzdušné rource a vyniklé amphidisky), jakož i přístroje aerostatického, který hlavně ve vzdušné rource jest soustředěn — hlavních to znaků rodu Carterius — jest táž, jako u Carterius Stepanowii.

Dle znaků vylíčených odůvodněno jest, tušim vřadění ?Dossilia Stepanowii Dybow. do rodu *Carterius*, jehož geografické rozšíření hlavně v severní Americe se nachází.

Příbuznosť druhu našeho s tropickým druhem Meyenia plumosa Bwrbk. z Bombaye spočívá, jak *Bowerbank* pro svoji Meyenia Baileyi v monografii své *) uvádí, výhradně na vzájemné podobnosti amphidisků, jež jsou štíhlé a četnými dlouhými trny opatřeny. Jednotlivé štítky jich jsou však více méně polokulovité a na okraji svém hustě jemně vroubkovaté nebo zoubkované. V ostatní stavbě, což *Bowerbank* zcela pomijí — objevuje se toliko nepatrná shodnosť. Vzdušná rourka jest velmi nezřetelnou, krátkou, jemnostěnnou. Ta jest přepažena od nitra gemmulae hebkou přehrádkou a na hořením konci svém tenkou stěnou uzavřena. Obal vzduchonosný, z neobyčejně malých (průměrně 0·0008 mm), útlých komůrek vzdušných složený, obdává stejnou silou celou gemmuli, tak že četné amphidisky, mezi nimiž ale žádného rozdílu délky se nevyskytá, jakož i celá vzdušná rourka do něho úplně jsou ponořeny.

Dle rozsáhlého příbuzenstva, hlavně s druhy tropickými a zámořskými a dle velice skrovného rozšíření zeměpisného, nutno za to míti, že druh náš jest přistěhovalým z cizích krajin (snad z Ruska?), čemuž také vydatně vyzbrojené zimní pupeny jeho nasvědčují.

Dle svých vlastních pozorování navrhuji *diagnosu:* Carterius Stepanowii mihi.

Syn: 1884 ?Dossilia Stepanowii Dybow.

*) A Monograph of the Spongillidae. By Dr. J. S. Bowerbank-Proceed. of the zoolog. Society of London. 1863 part. III. pag. 251.

Trsy útlé, polehavé, jemně rozvětvené, na stoncích a listech vodních rostlin; barvy jsou zelené s modravým nádechem. Jehly skelettové hladké, rovné, ostře kopinaté, řídčeji mírně zahnuté nebo jednotlivými malými ostny opatřené. Jehlice parenchymové, jež hojným počtem v pletivech houby se vyskytují, jsou zakřivené nebo rovné s četnými výhonky; tyto jsou uprostřed jehlic největší, k oběma pak koncům stávají se menšími. Gemmulae skládají se ze zárodečného tělesa, obdaného vnitřní otočkou chitinovou, jež na hořením polu gemmulae nese rovnou nebo mírně zahnutou vzdušnou rourku. Ta opatřena jest na volném konci svém chitinovou korunkovitou ozdobou, složenou z vlnitého, na okraji svém různě laločnatého terče. Obal vzduchonosný tvořen jest z četných nevelikých komůrek vzdušných. Amphidisky, jež valným množstvím celou gemmuli obdávají, mají osy štíhlé a četnými ostny pokryté; štítky jich jsou terčovité, s četnými jemně zoubkatými paprsky. Dle délky lze rozeznávati amphidisky delší a kratší. Tyto jsou úplně ponořeny ve vrstvě vzduchonosné a zevnější otočkou chitinovou pokryty; amphidisky delší vyčnívají pak třetinou nebo polovicí délky své volně z obalu vzduchonosného.

Ephydatia bohemica nov. sp.

Ve druhé polovici měsíce srpna (dne 25.) r. 1885 naleznul jsem v nevelikém rybníku u *Kvasetic* nedaleko dědiny Věže — okres Německobrodský — zajímavý druh hub sladkovodních, jenž tvarem a vnitřní stavbou trsů, jakož i zajímavou strukturou gemmulí svých podobá se právě popsanému Carterius Stepanowii, ač zase některými důležitými znaky od druhu toho se liší. Poněvadž pak diagnosa jeho dosud nikde v literatuře neuvedena, dovoluji sobě označiti jej jménem Ephydatia bohemica nov. sp.

Trsy druhu tohoto vyskytují se ve formě malých, plochých obalů nebo polštářků, povlékajících četné stonky přesliček (Equisetum limosum L.) nebo kořeny různých stromů, vroubících břehy rybníka. Rozvětvení jich bývá pouze nepatrným, s několika málo laloky. Barvy jsou světlozelené, nebo trávové, jež za sucha do mdlé někdy až hnědé přechází, na lihových pak exemplářích ve špinavě žlutou nebo šedavou se mění. Rozměrů bývají toliko skrovných; zvláště tloušťka jich bývá nepatrnou. Oscula, jakož i velmi malé pory, jsou nezřetelna. Houba tato vyskytuje se v místě onom zároveň s Euspongilla lacustris Vejd., takže často oba druhy na témže podkladu se objevují a obyčejně vespolek úplně splývají; Ephydatia bohemica ale vždy na spodu společného trsu se nalézá.

Jehly tvořící kostru houby, souhlasí v celku se skelettovými jehlicemi u mnohých jiných druhů; jsou hladké, rovné, řídčeji zahnuté, ostře končité; mezi nimi vyskytují se jednotlivě jehlice řídce ostnité i hrotité, nebo různé jich zrůdy. Jehlice parenchymové, jež ve značném množství v pletivech houby jsou roztroušeny, shodují se skoro úplně s oněmi, jež u Carterius Stepanowii se nacházejí. Toliko velikosť jich bývá namnoze poněkud značnější; délka jednotlivých výhonků, jimiž jehlice jsou více méně pokryty, jest velice měnivou. — Přechodů mezi amphidisky a jich jehlicemi parenchymovými jsem u tohoto druhu ni v jednom dosud případě nenaleznul.

Gemmulae, které hlavně na basi trsů se vytvořují a jen slabou vrstvou pletiva bývají pokryty, jsou tvaru kulovitého neb ellipsoidního, barvy brunatné nebo plavé, zcela neprůhledné. Za sucha jsou šedavě špinavé až hnědavé. Na povrchu bývají hladké, někdy sporými (1—3) jízvami, jež ale zjevem pouze nahodilým, ač dosti často se objevujícím, se zdají, jakoby rozbrázděny (fig. 17 *m*). Velikosť jich obnáší 0·52—0·59 mm.

Zárodečné těleso, vyplňující vnitřek gemmulae (fig. 17 *a*), skládá se — podobně jako u všech ostatních hub sladkovodních — z velikých, mnohobokých a jasným jádrem opatřených buněk. Zárodek ten chráněn jest silnou vnitřní otočkou chitinovou (fig. 17 *b*), která na hořením polu svém v kuželovitou, nad pravidelný obrys gemmulae se zvedající vyvýšeninu se vypíná. Blíže vrcholu oné vyvýšeniny nachází se mističkovitá ozdoba chitinová, (fig. 17 *k*) připomínající podobou svou korunku na vzdušné rource u Carterius Stephanowii, ač významem svým daleko za ní stojí.*) Stěny její, jež jsou téže barvy jako otočka chitinová, jsou na basi mohutné, ku krajům pak stávají se slabými.

---

*) Podobné, leč ještě jednodušší poměry vystupují též i u jiných gemmul našich hub sladkovodních. Tak u Ephydatia Mülleri Lbk. zvedá se na vyvýšenině hořeního polu gemmulae kruhovitý, mírně prohloubený terček chitinový, dosahující v průměru svém až 0·063 mm. Stěny jeho jsou u kořene silné, ku kraji bývají pak velmi útlými. Rovněž u Euspongilla lacustris Vejd. i Trochospongilla erinaceus Ehbg. vystupuje podobná ovruba na vrchu gemmulí. Hlavní rozdíl mezi místičkovitou ovrubou u těchto druhů a korunkovitou ozdobou Ephydatia bohemica jest ten, že u této zcela *volně,* od ostatních obalů gemmulae *odděleně,* na vnitřní otočku chitinovou přisedá, kdežto u oněch přikládá se k terčku ještě vrstva vzduchonosná a zevnitřní otočka chitinová, takže toliko okraje její volně nad povrch gemmulae vyčnívají.

Tvaru jest kruhovitého nebo dosti pravidelně 5—7bokého, terčovitého nebo mískovitě prohloubeného, s okrajem široce do vnitř vehnutým; jednotlivé laloky nebo hvězdovité paprsky (jako u druhu předešlého) se nikdy nevytvořují. V průměru mívá 0·041—0·084 mm.

Někdy stává se, že na vrcholku gemmulae u Ephydatia bohemica mimo korunky, nalézá se ještě nizounká ovruba (fig. 18), jež u některých (snad starších?) forem jest na volném konci svém překlenuta a uzavřena, čímž představuje rudiment rourky vzduchonosné (fig. 19 *f*). Korunka nachází se v případě tom na samém vrcholku vnitřní otočky chitinové.

U jiných zase tvarů bývá rourka skutečně vyvinuta (fig. 20) a vzduchem naplněna, jest však velmi zkrácenou, délky 0·028—0·039 mm a průměrné tloušťky 0·036 mm. Postranní stěny její jsou mohutné, souhlasící se stěnovím vnitřní otočky; hoření pak konec překlenut jest jemnou blanou (fig. 20 *j*). Od nitra gemmulae oddělena je tenkou přehrádkou (fig. 20 *h*); korunka u tvaru tohoto pošinuta jest již na vlastní rourku vzdušnou (fig. 20 *g*).

Tento poslední, jakož i přechodní tvar vyskytuje se poměrně spoře; forma prvá převládá.

Ku vnitřní otočce chitinové přikládá se vrstva vzduchonosná (fig. 17 *c*) složená z útlých tenkostěnných komůrek, velikosti 0·002 mm, jevících tytéž poměry, jaké se objevují u Carterius Stepanowii.

Ve vrstvě té, jež na zevnějšku svém kryta jest netlustou zevnitřní otočkou chitinovou (fig. 17 *e*), uloženy jsou přečetné amphidisky; osy jich jsou štíhlé, válcovité, délky 0·043—0·049 mm. a u různých forem rozličně četnými a velikými ostny nebo hroty pokryté. Někdy mohou ostny buď úplně nebo jen částečně scházeti. Jednotlivé štítky jsou terčovité, pravidelně hvězdovitě dělené a jemnými zářezy zoubkované, v průměru dosahující 0·014—0·019 mm. (fig. 22). Nápadný rozdíl dvojí délky amphidisků, jaký u Carterius Stepanowii se naskytá, stává se u tohoto druhu méně zřejmým, mnohdy až nezřetelným. — Zajímavo jest, že v případě, kdy rourka vzduchonosná, na níž se korunkovitá okrasa vypíná, aspoň poněkud jest vyvinutou, též i dvojí rozdíl amphidisků, kratších a delších mohutněji vyniká než za normalních poměrů bývá.

Dle znaků vylíčených, zvláště pak pro nepřítomnosť řádně vyvinuté rourky vzdušné a nepatrné rozlišení dvojího druhu amphidisků, nutno vřaditi druh tento do rodu Ephydatia, ač značná příbuz-

nosť jiných znaků (ku př. podoba jehlic skelettových i parenchymových a amphidiskův) jej s druhem Carterius Stepanowii úzce spojuje.*) Rozdíly, lišící Ephydatia bohemica od posléze jmenovaného druhu, jeví se následovně:

Mezi jehlicemi skelettovými hladkými roztroušeny bývají jednotlivě jehlice více méně ostnité nebo různě hrotité.

Velikosť dospělých gemmulí bývá obyčejně značnější.

Gemmulae nejsou opatřeny buď zcela žádnou nebo toliko velice kratičkou a málo zřejmou rourkou vzduchonosnou.

Korunka, jež na vnitřní otočku chitinovou volně přisedá, nemá laločnatých paprsků, nýbrž sestává z prostého, někdy až nepatrného, nepravidelně zohýbaného terčku. V případu, kdy rourka vzduchonosná aspoň částečně jest vyvinutou, nachází se korunka na této.

Rozdíl amphidisků delších a kratších nevystupuje příliš nápadně, tak že často skoro až zaniká. Štítky jich bývají obyčejně pravidelně hvězdovité, s četnými hluboce klanými paprsky.

Osy amphidisků nebývají tak četnými a dlouhými ostny pokryty. —

Rozdíly tyto — z nichž ovšem některé pro nestálosť svou jsou významu toliko podřízeného — oprávňují ku vystavení nového druhu, ač zase jednotlivé, výše uvedené formy abnormní mohly by snad dalším stupňováním a nenáhlými přechody snížiti druh tento na prostou varietu od Carterius Stepanowii. Až dosud nepodařilo se mi však zjistiti tvarů přechodních; další zkoumání zjasní zajisté i tento mlhavý bod, jenž nejlepším toho jest dokladem, jak neurčitým jest názor náš o *„rodu“* a *„druhu“*, a jak pracným jest snažení naše po jakési soustavě „přirozené“. V přírodě nacházíme pouze individua, jež potřebám svým stále se přispůsobují a vlivům zevnějším podléhají, ne však „rody“ a „druhy“, v něž vřaditi se je snažíme.

Spongilla fragilis Leidy.

Synon. 1863 Spongilla Lordii Bowerbank.
1878 Spongilla sibirica Dybowski.
1870 Spongilla contecta Noll (Retzer)
1884. Spongilla fragilis Vejdovský.

Zajímavou tuto houbu sladkovodní, jež v Čechách dosud toliko ze dvou míst známa byla, naleznul jsem v řece Sázavě (v zátoce pod

---

*) Podobná vzájemná příbuznosť, jaka u těchto dvou druhů se jeví, vyskytá se také mezi Heteromeyenia repens a Carterius latitenta.

„Špitálskou strání“ u Něm. Brodu) a několika rybnících v okolí Německobrodském (rybníček „Jůzlův“) a Humpoleckém. Zvláště v rybníku „valchovském“ u Skály (okres Humpolecký) vyskytuje se Spongilla fragilis ve velmi statných, nerozvětvených trsech, obalujících kořeny a lodyhy puškvorce a rákosu. Objevuje-li se zároveň s jinými druhy (jako s Euspongilla lacustris, Eph. fluviatilis, Ephydatia Mülleri), tu vždy nachází se nejníže, ostatní pak nad ní, jakž již Wierzejski*) také připomíná, se usazují. — Za živa jest nelámavou, barvy hnědošedé až tmavohnědé, za sucha stává se značně kruchou, hnědavou. Oscula veliká, pory četné. Jehlice skelettové i parenchymové tvarem a velikostí normální; zrůdy jich jen zřídka se objevují.

Gemmulae, jež v pletivech, jakož i na povrchu houby v úžasném množství se vyskytují**), shodují se stavbou svou s tvary v jiných krajích sbíranými. Rozměry jich jsou však velmi nepatrny. Uspořádání jednotlivých gemmulí, jež pro tento druh tak význačným jest, jeví se známým***) dvojím spůsobem: „v řadách“ a „v brylcích“. V tomto případě kupí se obyčejně toliko 2 nebo 3, někdy i 4 gemmulae v jediný brylek, čímž souhlasí s tvary u Ostroměře sbíranými. Co se druhého případu týče, vytknouti nutno, že „řady“, v něž se jednotlivé pupeny zimní urovnávají, vytrvávají drahný často čas i po zrušení veškerého pletiva a kostry houby na původním podkladu svém. Takovéto zbytky (jež Noll pode jménem „Spongilla contecta“ popsal) naleznul jsem ve značném množství na kamenech a různých kořenech v rybnících „u dubského mlýna“ nedaleko Humpolce. Často bývá až 20 gemmulí v plochu, namnoze dosti pravidelně urovnáno; ze zrušených trsů zbývají pouze sporé jehlice skelettové, jež na povrchu i ve vrstvě vzduchonosné roztroušeny bývají a tím ku vzájemnému spojení veškerých gemmulí přispívají.

Formy ze Sázavy jsou celkem nepatrné, chabé, barvy tmavohnědé nebo šedavé. Jehlice pupenové jsou však mohutné, silnými ostny opatřené, upomínající poněkud na tvary americké. — Gemmulae jsou nečetné, rozměrů malých. V „brylky“ urovnány bývají vždy toliko 2 nebo 3 gemmulae. Podobně i jednotlivé „kolonie“ gemmulí „v řady“ skupených sestávají jen ze skrovného počtu.

---

*) O rozwoju pąków gąbek sladkowodnych etc. Napisał Dr. A. Wierzejski. Osobne odb. z XII. T. Rozpraw i Sprawozd. Wydz. mat.-przyr. Akad. Umiej. 1884. Pag. 34.

**) Trsy takové činí dojem, jakoby byly mákem hustě posypány.

***) Fr. Petr: Spongilla fragilis (Leidy) v Čechách. Práce z české university 1885. p. 101.

V posledním čase objevena byla Spongilla fragilis také ve Východních Čechách: v potoku „Košířském" u Litomyšle (p. kand. prof. Fr. Klapálek). Trsy tamnější jsou normalní, podobně i vnitřní jich stavba. Toliko „brylky" vyznačují se velikým počtem gemmulí (20 až více), čímž velice na tvary v Rusku sbírané upomínají.

Také v rybníku Benikově u Netolic v malých trsech narostlou na rákosí nalezl o prázdninách 1885 p. Č. Šandera. Tvary malé, bělošedé.

Dle nynějšího počtu nalezišť jest pravděpodobnou domněnka, že rozšíření Spongilla fragilis jest poměrně dosti značným, a že v mnohých ještě neprozkoumaných dosud krajích objevena bude.

„Ephydatia Mülleri" Lbk.

Tento starý, *Lieberkühnem* stanovený druh, rozlišen v novější době na dva samostatné druhy a jednu odrůdu, k jichž vyznačení vzat jednak tvar a množství jehlic skelettových i parenchymových, jednak podoba a urovnání jednotlivých amphidisků, jakož i výška obalu vzduchonosného. Leč jednotlivé tyto elementy jsou velice proměnlivy, takže v četných varietách a vzájemných přechodech se jeví. Zvláště tvar amphidisků a jehlic byly příčinou, že prof. *Vejdovský* rozdělil zprvu Lieberkühnův druh na 3 odrůdy: „Forma A" Forma B" a „*var.* astrodiscus". Dle diagnosy Lieberkühnem podané měla by se jménem Ephydatia Mülleri vlastně jen var. astrodiscus označiti, neboť forma amphidisků, jakož i veskrze drsné jehlice její odpovídají úplně vyobrazení Lieberkühnovu. Zda-li možno jménem tím označiti Formu A a *For. B* nelze ještě s plnou určitostí rozhodnouti, ježto tvar jehlic i amphidisků velice jest odchylným, ač i v tomto případě neobyčejná proměnlivosť zavládá. —

Sestavení amphidisků ve dvou řadách, což *Lieberkühnovi* i *Dybowskému* dříve neznámým ostalo, zavdalo prof. *Vejdovskému* podnět, že z Formy B samostatný druh Ephydatia amphizona stanovil s následující diagnosou: „..... jehlice skelettové značně ostnité, zároveň i hladké .... obal parenchymový vysoký; v tomto umístěny jsou amphidisky ve 2 vrstvách ....." *) Sbíraje tento druh na četných místech okolí Německobrodského a Humpoleckého, naleznul jsem na rozličných trsech poměr množství jehlic hladkých a ostnitých velice různým, vrcholící pak v úplném převládání jehlic buď hladkých nebo

*) Příspěvky ku známostem o houbách sladkovodních. Král. česká společnosť nauk, 1883 pag. 22.

ostnitých. Podobně i Dr. *Wierzejski* *) naleznul ve vodách Haličských trsy s jehlicemi úplně hladkými.

Dvojitá vrstva amphidisků, jež pro gemmulae tohoto druhu zvláště prý jest charakteristickou, vyskytuje se u některých exemplářů toliko jednoduchou, u jiných zase nedokonale dvojitou, u některých i trojitou, čímž obal vzduchonosný buď nízkým, buď vysokým se stává. Dle pozorování svých domnívám se, že příčinou toho jest jednak nestejný vývoj a různé stáří jednotlivých gemmulí, jakož i statnosť mateřského trsu, jednak i povaha a chemické složení vody, v níž se nacházejí. Z mládí bývají totiž gemmulae útlé, s jemnou vnitřní otočkou chitinovou a v nízkém, z malých průsvitných komůrek se skládajícím obalu vzduchonosném uloženy jsou četné amphidisky obyčejně v jedné vrstvě; dalším vývinem pak povstává dvojí a při zvláště příznivých okolnostech i trojí vrstva dvojštítků. U chabých trsů nebo za jiných poměrů (snad též při silném proudu vody) zůstává gemmule obdána toliko jedinou nebo nedokonale dvojitou vrstvou amphidisků. Jest tedy také Spongilla mirabilis Retzer, vyznačující se trojí vrstvou dvojštítků **), prostou, více na zevnějších než na vnitřních znacích druhových založenou modifikací Ephydatia Mülleri. Dr. *Marchall* považuje ***) trojí vrstvu amphidisků druhu onoho za přispůsobení se gemmulí prudkému proudu, v němž prý, dle domněnky jeho, Spongilla mirabilis žije.

Podobně i jednotlivé amphidisky jeví různý tvar; jsou však vždy nízké, stejné as délky jako průměr štítků. Hvězdovité jich paprsky, jež jsou po krajích buď jemně zoubkaté nebo vroubkované neb úplně hladké, mění se i počtem i podobou svou.

Dle toho vidno, že starý druh „Spongilla Mülleri“ (byť původní znaky jeho nebyly všestranně uvedeny) v různých stupních dokonalosti své se objevuje, jakož i častým změnám podléhá. Shrnuji tedy, pokud novější pozorování k tomu opravňují, veškery variety v jediný druh Ephydatia Mülleri, jehož synonymika ukazuje,

---

*) O gąbkach słodkowodnych galicijskich. Osobne odbicie z XIX tomu Sprawozdań Kom. fizyj. Akad. Um. 1885 pag 17.

**) Die deutschen Süsswasserschwämme. Inaugural-Disertation von Wil. Retzer, pag. 25. — Diagnosa jeho zní: „. . . . gemmulae jeví zvláštnosť, že jsou obdány trojí vrstvou amphidisků . . . . . Jehlice skelettové hladké i ostnité spojeny jsou ve svazečky, jež ve vláknech pletivo houby prostupují a často můstky spojeny bývají . . . . .“

***) Einige vorläufige Bemerkungen über die Gemmulae d. Süsswasserschwämme. Zoolog. Anzeiger 1883 Nro. 155, pag. 650—651.

jak odchylně, pro velikou měnivosť jednotlivých znaků svých od různých autorů vykládán:

„Ephydatia Mülleri"

Syn. 1856 *Spongilla Mülleri* Lbk.
1877 „ *Mülleri* Vejdovský
1878 *Trachyspongilla Mülleri* Dybowski
1882 *Meyenia Nro* 2 Dybowski
1882 *Ephydatia Nro* 2 Dybowski
1883 *Ephydatia Mülleri* Vejdovský
Forma A
Forma B
var. astrodiscus
1883 *Ephydatia amphizona* (= *Forma B*) Vejd.
1883 *Ephydatia Mülleri* (= *var. astrodiscus*) Vejd.
1883 *Spongilla mirabilis* Retzer
1885 *Meyenia Mülleri* Wirzejski.

Diagnosa:

Jehlice skelettové hladké neb ostnité (v nejrůznějším vzájemném poměru), na koncích obyčejně ostře špičaté. Gemmulae obdány jsou různě vysokým obalem vzduchonosným, skládajícím se z četných drobných komůrek vzdušných; na zevnějšku svém kryt jest zevnější otočkou chitinovou. Amphidisky, jež ve značném počtu se vyskytují, urovnány jsou buď v jedné nebo dvou i třech vrstvách. Osy jich jsou nízké, téže asi délky, jako průměr štítků; ty jsou více méně pravidelně hvězdovité, na kraji buď hladké nebo vroubkované a zubaté.

Nová naleziště druhu tohoto zaznamenávám:

1. Tůně Šlapánky u Friedenavy a Šlapánova: Statné trsy polštářkovité, s několika málo laloky, na kamenech, řídce na různých kořenech. Jehlice skelettové veskrze ostnité. Gemmulae normální, obyčejně se dvěma vrstvama amphidisků. Hvězdovité jich štítky hluboce rozeklané, na krajích buď hladé, buď zoubkaté.

2. Tůně Sázavy za Hamry u Německého Brodu. Trsy chabé, neveliké, barvy špinavě zelenavé, obalující kořeny olšin. Skelettové jehlice hladké i ostnité, ve stejném skoro množství. Gemmulae zakrnělé, s jednou, zřídka nedokonale dvojitou vrstvou amphidisků.

3. Několik rybníků v okolí Německobrodském a Světelském. Trsy obyčejně mohutné, s velikými osculy a četnými menšími pory. Jehlice skelettové různé; u tvarů z nevelikého rybníku „várečenského u N. B." jsou zcela hladké, u jiných forem ostnité a mezi nimi v různém poměru jehlice hladké, nebo vesměs výhradně ostnité (ryb-

níky světelské). Gemmulae velmi veliké, tmavohnědé, neprůhledné často se třemi vrstvami dvojštítků; hvězdovité jich štítky většinou jsou po krajích hladké.

4. Rybníky u Skály a Humpolce: Jehlice skelettové buď ostnité, buď hladké v nejrůznějším poměru i na témže trsu (malý rybník „u Svitálky"). Gemmulae namnoze na basi odumřelých trsů, s jednou, častěji se dvěma vrstvami dvojštítků. Hvězdovité paprsky jich jsou útle zoubkaté, nebo jemně vroubkované (rybník „bonkovský" a „u dubského mlýna").

5. Potok „Žabinec" a náhon k „Richterovu mlýnu". Tvary chabé, barvy bledavé. Jehlice jemně ostnité. Gemmulae zakrnělé; dvojštítky pravidelně hvězdičkovité, na pokraji zoubkaté.

6. Řeka Sázava — na četných místech. Zvláště obrovské trsy, pokrývající plochu až přes 2 m. velikou, nacházejí se nedaleko dědiny Horního Chlístova u Okrouhlice (ve velmi prudkém proudu!). Objevují se ve tvaru velice mohutných, nerozvětvených polštářků, povlékajících kameny a různé kořeny; barvy bývají světlozelené až trávové; na spodu kamenů jsou barvy špinavě žluté, někdy bělavé. Za sucha jsou plavé nebo hnědé. Oscula — jakož vůbec u tohoto druhu — jsou nečetná, jednotlivě roztroušená, veliká, (mnohdy až 1 cm. v průměru dosahující) a vedou, podobně jako u Spongilla fragilis do soustavy menších kanálků. Břeh jednotlivých osculí jest značně vyvýšen, tak že zřetelnou rourku, jež se může zkrátiti nebo prodloužiti, představuje *). Malé pory jsou velice četné. — Jehlice skelettové jsou ostnité a mezi nimi roztroušeny jsou jednotlivě jehlice hladké. Leč vzájemné jich množství mění se nezřídka i na *jednom* trsu, tak že na spodu v jiném poměru číselném se vyskytují než na povrchu. Jehlice parenchymové objevují se velmi spoře; tvaru bývají úzce vřetenovitého, kopinatého; na povrchu jsou hladké. Gemmulae normalní, obdané jednou, častěji nedokonale dvojitou vrstvou amphidisků; kraje hvězdovitých jich štítků jsou obyčejně zoubkaté.

7. Ve Vltavě (v okolí Prahy) naleznul druh tento p. prof. Dr. A. Frič. Trsy nevelíké, barvy tmavohnědé. Jehlice skelettové většinou ostnité, zřídka hladké. Gemmulae poměrně malé s dvojí vrstvou amphidisků.

8. Také z „kamenné tůně" u Vrcovic v okolí Písku (p. kand. prof. J. Ciboch) známa tato houba sladkovodní. Jehlice její jsou veskrze hladké; Gemmulae se dvěma vrstvama amphidisků.

---

*) Souhlasné poměry objevují se též u Spong. fragilis a dle Wierzejského také u Spong. lacustris.

Euspongilla lacustris Vejd.

Nejobyčejnějším zajisté druhem hub sladkovodních ve vodách (zvl. řekách) našich jest Euspongilla lacustris Vejd., jemuž od četných badatelů hojná pozornosť věnována; zvláště prof. *Vejdovský* zevrubně vylíčil v monografii své*) jednotlivé detaily stavby jeho, rozlišiv jej v jednu ještě varietu (var. macrotheca).

Tomuto druhu velice příbuzným jest Euspongilla Jordanensis Vejd., lišící se od něho neobyčejným množstvím jehlic parenchymových a pupenových, jakož i vysokou vrstvou vzduchonosnou, tak že pozorují-li se oba, dokonale vyvinuté tvary o sobě, uznati nutno jich úplnou druhovou samostatnosť.

Leč ne vždy takovýto markantní rozdíl se objevuje; četné formy, jež v novější době nalezeny byly (zvl. u Něm. Brodu a Hradce Králové), stojí jaksi na hranici mezi oběma druhy, tak že nesnadno věru vřaditi je v ten či onen druh. Pozvolné přechody, spojující ponenáhlu oba druhy, nedovolují stanoviti přesných rozdílů mezi nimi. Znaky, jimiž se tvary ty od sebe různí, jsou pro velikou proměnlivosť svou a četné vzájemné přechody a odstíny rázu toliko relativního; možno tudíž, pokud nebude specifická samostatnosť Euspongilla Jordanensis Vejd. dokázána, shrnouti oba druhy, jak také již Dr. Wierzejski**) byl učinil, v jeden obsáhlý, hojným změnám podléhající druh Euspongilla lacustris Vejd., charakterisovaný toliko *tvarem* svých ostnitých jehlic parenchymových a pupenových, jakož i strukturou gemmulí svých.

V otázku pak po příčině nestejného množství jehlic pupenových i parenchymových, možno odvětiti, že jsou to — jakož výše o jiných znacích podotknuto — vlivy výhradně zevnější, jež stálé, někdy dosti značné změny působí. Prof. *Vejdovský* domnívá se, že příčinou toho jest různé množství kyseliny křemičité ve vodě obsažené, což zase s různými poměry a povahou dna i břehů jakož i vody těsně souvisí***).

---

*) Die Süsswasserschwämme Böhmens von Dr. Vejdovský (Abhandlungen d. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften in Prag 1883).

**) O gąbkach słodkowodnych galicyjskich, napisał Dr. A. Wierzejski. Osobne odbicie z XIX tomu Sprawozdań Komisyi fizyjogr. Akad. Umiej. W Krakowie 1885.

***) Jak známo, vyskytuje se křemík (Si) vždy sloučen s kyslíkem křemičitým (křemen, ve vodě nerozpustný) nebo s kyslíkem a jinými prvky, zvl. kovy, ve tvaru různých silikátův, hlavní to součásti hornin, jichž rozkladem pře-

Dle vylíčených případů vidno, jak těžko jest nalézti pro houby znaků „druhových", jež by — což ovšem nutno — nepodléhaly stálým a častým změnám a zároveň jak vhodným dokladem jest všestranná měnivosť jich pro tvrzení o nestálosti „druhu" v theorii descendenční (Darwinově) tak že, jak *E. Haeckel* *) právem se domnívá, v ohledu tom přednosť přede všemi ostatními živočichy zasluhují. „Zvláštní charakteristický detail zevnějšího tvaru těla, jenž u všech vyšších živočichů v přední řadě k rozeznávání jednotlivých druhů slouží, jest u hub (sladkovodních i mořských) vůbec, pro tento praktický účel zcela bezcenným; ale též jednotlivé elementy, jichž ku systematickému rozlišení druhův a rodův užito, podléhají v nejvyšší míře proměnlivosti, tak že jen mnohým kombinováním a přirovnáváním hojného materialu lze stanoviti jednotlivé znaky druhové a rodové.

Vysvětlení vyobrazení.

Obr. 1—16. Carterius Stepanowii mihi.

Obr. 1. Dorostlý trs v přirozené velikosti; kresleno dle čerstvého exempláře.

„ 2. Rozličné formy jehlic skelettových. Zvětšení Reichert obj. 6, oc. III.

„ 3, 4. Různé tvary jehlic parenchymových; a, b, c, d tvar normalní, B tvořící přechod ku dvojštítkům. *Obr. 3.* při zvětšení Reichert Immers. 11., oc. II., *obr. 4.* obj. 8, oc. III.

„ 5, 6. Amphidisky různé polohy a tvaru.
a, *b* formy abnormní.
Obr. 5. Reichert Immers. 11, oc. III., *obr. 6.* Obj. 8, oc. III.

„ 7. Jednotlivé štítky amphidisků při zvětšení Reichert Immers 11., oc. III.

„ 8. Podélný průřez gemmulí při zvětšení obj. 6, oc. V. *a* zárodečné těleso v cípek vybíhající; *b* vnitřní otočka chitinová; *c* vrstva vzduchonosná; *d* amphidisky kratší, *d'* delší; *e* zevnější otočka chitinová; *f* vzdušná rourka, na jejíž hořením konci přisedá korunkovitá ozdoba *g*; *h* příčka dělící

---

chází do mnohých organismů. Dle toho zajisté velice důležitým faktorem hub jest také místo, na němž se vyskytují, četná pozorování zdají se aspoň potvrzovati doměnku tu.

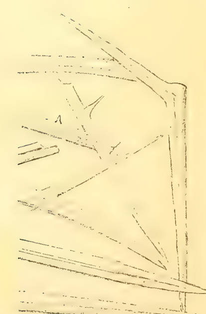
*) E. Haeckel: Monografie der Kalkschwämme. 1. Bd. 1872.





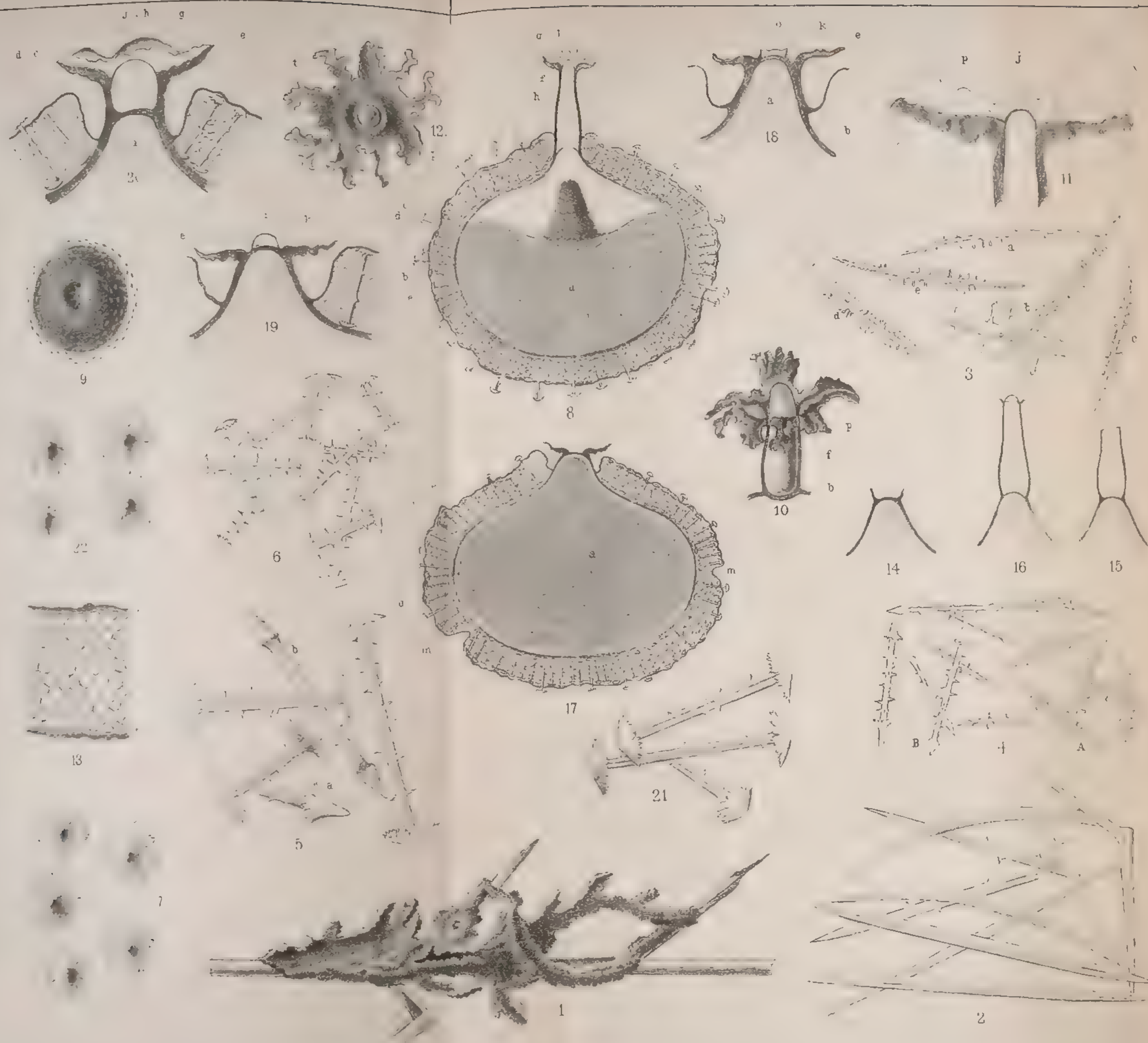






Lith ústav Farsk

F. PETR HOUBY SLADKOVODNÍ.



F Petr del.

Lith. ústav Farský.

nitro gemmulae od vzdušné rourky; *j* stěna překlenující vrchol rourky.

Obr. 9. Gemmule při světle napadajícím.
Zvětšení obj. 6, oc. II. Uprostřed nachází se korunka na vzdušné rource.

„ 10. Korunkovitá ozdoba při pohledu se strany.
p jednotlivé laloky, *b* vnitřní otočka chitinová, *f* vlastní rourka vzdušní. Zvětšení: Obj. 8, oc. III.

„ 11. Táž v optickém průřezu.
j stěna překlenující vrchol rourky, *p* laloky. — Zvětšení: Reichert Immers. 11, oc. III.

„ 12. Korunka při pohledu se shora.
p laloky jednotlivé; *t* terček.

„ 13. Vrstva vzduchonosná sestávající z útlých komůrek.
b vnitřní, *c* zevnější otočka chitinová. Zvětšení: Immers. 11, oc. V.

„ 14—16. Postupný vývoj vzdušné rourky a korunkovité ozdoby.

Obr. 17—22. Ephydatia bohemica nov. sp.

„ 17. Podélný průřez gemmulí
a zárodečné těleso, *b* vnitřní otočka chitinová, *c* vrstva vzduchonosná, *d* amphidisky, *e* zevnější otočka chitinová, *k* korunka na hořením polu.

„ 18. Vyvýšenina hořeního polu gemmulae s korunkou *k* a nizounkou ovrubou *o*. Zvětšení: Obj. 8, oc. III.

„ 19. Mimo korunku *k* nachází se na vrcholu gemmulae jakýsi rudiment vzdušné rourky *f*. Zvětšení jako v obr. 18.

„ 20. Vyvýšenina hořeního polu gemmulae s korunkovitou ozdobou *g* na nizounké vzdušné rource *f*. Tato jest oddělena od nitra gemmulae *a*, příčkou *h* a na vrchním konci svém jemnou stěnou *j* překlenuta. Ostatní označení jako v obr. 17. — Zvětšení: Obj. 8, oc. V.

„ 21. Různé tvary amphidisků při zvětšení: Reichert Immers. 11, oc. III.

„ 22. Jednotlivé štítky amphidisků, zvětšení totéž.

(Délka tubu 135 mm.)

Resumé des böhmischen Textes.

I. Carterius Stepanowii mihi habe ich im Jahre 1885 in zwei, übereinander liegenden Teichen in der Umgebung von *Deutschbrod* gefunden; und dies ist der erste Standort dieses Süsswasserschwammes nicht nur in Böhmen, sondern auch in ganz Mittel- und West-Europa. — Carterius Stepanowii kommt in vielen, zarten, schleichenden und vielfach verästelten Stöcken auf den Stengeln und Wurzeln mancher Wasserpflanzen vor. Seine Farbe ist schön smaragdgrün, manchmal in's blaue übergehend. Diese Farbe rührt von zahlreichen, meist einzelligen Algen her, welche in allen Geweben des Schwammes ganz selbstständig vegetiren*). Die Grösse ist sehr verschieden, bis 10 cm. lang und 3 cm. breit. — Die Spiritusexemplare sind biegsam, schmutzig grün oder gelblich. Oscula äusserst klein, die Poren undeutlich. (Fig. 1.)

Die Skelettnadeln sind gewöhnlich ganz glatt, gerade oder mässig gekrümmt, scharf zugespitzt; bei den russischen Formen sollen sie mit vielen, sehr zarten spitzigen Stacheln bedeckt sein. Die Parenchymnadeln sind überaus zahlreich, schwach gekrümmt, von Form wie die Fig. 3, 4 zeigt. Die Unterscheidung der Stacheln an der Oberfläche der Parenchymnadeln in drei Kategorien, — wie *Dybowski* annimmt — scheint nur zufällig zu sein.

Die Gemmulae sind kugelig oder ellipsoid, mit einem hohen oberen Pole. Der aus vielen grossen, polygonalen Zellen mit einem runden oder elliptischen Zellkern bestehende Keim ist mit einer inneren Chitinmembran geschützt (Fig 8.), aus welcher eine cylindrische oder kegelförmige Luftröhre (*Porusrohr* Dyb.) entspringt. Die letztere ist vom Innenraume der Gemmula durch eine Scheidewand abgetheilt und am oberen freien Ende mit einer sehr dünnen Membran verschlossen. Eine „obere Porusöffnung", über welche *Dybowski* berichtet, habe ich niemals gefunden. Am Ende der Luftröhre befindet sich eine schöne kronenähnliche zierliche Umfassung (*Porusanhang Dyb.*), bestehend aus einem runden, mässig gekrümmten Scheibchen, welches an seinem Rande lappenförmig ausstrahlt. Die Anzahl, so wie die Form einzelner Lappen, ist sehr verschieden. (Fig. 10, 12.)

Das Scheibchen steht mit der Grösse der Luftröhre im strengsten Verhältnisse der Correlation: je grösser die Luftröhre, um so

---

*) S. pag. 148.

kleiner das Scheibchen, und umgekehrt. Bei den russischen Formen ist die Scheibe viereckig, „an den Ecken läuft es in einige Zipfel (3—5) aus."

Die innere Chitinmembran ist mit einer Luftkammerschicht bedeckt. Diese besteht aus kleinen, polygonalen Kammern, welche in normalen Fällen — gleich der Luftröhre — mit Luft gefüllt sind, wodurch sie einen aerostatischen Apparat vorstellen.

Auf der Oberfläche ist die Luftkammerschicht mit einer äusseren Chitinmembran belegt.

Die Amphidisken, welche in einer grossen Menge in der Luftkammerschicht, senkrecht auf der inneren Chitinmembran, sich befinden, sind sehr schlank und mit vielen Stacheln versehen. Die Amphidiskenscheibchen sind tief getheilt, und am Rande fein gezackt. Die Amphidisken erscheinen in zweierlei Form: kürzere, welche die Länge der Luftkammerschicht erlangen, und längere, welche mit den Distalenden über die Oberfläche der letzteren hervorragen.

Die längeren Amphidisken und die Krone am oberen Ende der Luftröhre stellen einen Apparat dar, mittels welchem sich die Gemmulae an fremde, selbstverständlich auch bewegliche Gegenstände anheften kann, und welche somit zur leichteren Verbreitung der Keime beitragen. Auf diese Weise werden vermuthlich die Gemmulae dieser Art in die erwähnte Gegend verschleppt, da die Teiche, wo dieser Süsswasserschwamm vorkommt, vielbesuchte Aufenthaltsorte vieler Zug-, besonders Sumpfvögel sind.

Die *jungen* Gemmulae sind klein, weisslich gelb, entbehren aber der, für diese Art überaus charakteristischen Luftröhre. Diese entwickelt sich erst später in der Form eines runden Buckelchens, welches sich allmälig erhebt und am freien Ende schliesst. Gleichzeitig beginnt sich auch der „Porusanhang" in der Form eines rundlichen Scheibchens zu entwickeln, dessen Lappen erst im Laufe der weiteren Bildung entstehen.

Carterius Stepanowii wurde zuerst im Jahre 1884 in *Russland* gefunden und von Dr. *Dybowski* unter dem Namen? Dossilia Stepanowii beschrieben. Da aber seine Verwandtschaft mit dem Genus Carterius sehr nahe ist, habe ich diese Art mit dem oben angeführten Namen bezeichnet.

Carter, der auf die Identität Dossilia Stepanowii (nach der Beschreibung von *Dybowski*) mit der Spongilla Baileyi Bwrbk. hingewiesen hat, betrachtet auch diese für identisch mit Heteromeyenia repens Potts; diese Vermuthung kann ich aber nach

eigenen Beobachtungen nicht bestätigen, denn es besteht ein deutlicher Unterschied zwischen beiden Arten.

II. Im Sommer 1885 habe ich in der Umgebung von Kvasetice (Bez. Deutschbrod) eine neue Art gefunden, welche ich provisorisch mit dem Namen Ephydatia bohemica nov. sp. bezeichne. Dieselbe erscheint in der Form von kleinen grünen oder schmutzigen Polstern, welche fast immer mit der Euspongilla lacustris vorkommt, so, dass sie gewöhnlich mit derselben zusammenwächst. — Was die innere Structur anbelangt, ist sie mit dem Carterius Stepanowii nahe verwandt, obwohl ziemlich bedeutende Unterschiede vorhanden sind. Die Skelettnadeln sind glatt, gerade oder mässig krumm, die Parenchymnadeln sind von ganz gleicher Form wie bei Carterius Stepanowii, nur die Grösse einzelner Stacheln, mit welchen sie versehen sind, ist manchmal bedeutender.

Die grossen Gemmulae (0·52—0·59 mm.) entbehren vollkommen der Luftröhre; die Krone, welche bei der vorigen Art an der Spitze der Luftröhre sich befindet, entspringt bei Ephydatia bohemica aus der inneren Chitinmembran. (Fig. 17.)

Nicht selten befindet sich die scheibenartige Umfassung auf einem niedrigen Fortsatze, welcher an eine rudimentäre Luftröhre erinnert. (Fig. 18., 19.)

Bei anderen Exemplaren ist dagegen die Luftröhre wirklich entwickelt, sie ist aber sehr kurz (Fig. 20). — Diese Übergangsformen sind aber nur selten.

Die Luftkammerschicht zeigt dieselben Verhältnisse, wie bei Carterius Stepanowii. Die fast gleich langen Amphidisken, sind sehr schlank und mit vielen Stacheln bedeckt: ihre Scheibchen sind gewöhnlich fast regelmässig tief gezackt.

Diese Merkmale, besonders aber das Fehlen der Luftröhre und die gleiche Länge aller Amphidisken, berechtigen diese Form als eine neue selbständige Species zu unterscheiden, obwohl wieder einige, oben angeführte Übergangsformen dieser Art bloss auf eine Varietät vom Carterius Stepanowii hinzuweisen scheinen.

III. Spongilla fragilis, welche in Böhmen nur aus zwei Fundorten bekannt war, fand ich auf einigen Stellen in der Umgebung von Deutschbrod und Humpolec. Die Exemplare sind jenen von Ostroměř ganz ähnlich.

Nebst dem wurde diese Art bei Leitomyšl und in Südböhmen bei Netolic gefunden.

IV. Ephydatia Mülleri *Lbkn.* wurde in neuerer Zeit in einige selbstständige Arten und Varietäten zerlegt, als deren Charaktere die Form und Lage der Amphidisken, die Gestalt der Skelettnadeln so wie die Höhe der Parenchymschicht hervorgehoben werden.

So ist Ephydatia amphizona *Vejdovský* charakterisirt durch die doppelte Amphidiskenschicht in der Luftkammerschicht der Gemmulae und durch die rauhen und glatten Skelettnadeln, „wodurch sie sich vornehmlich von Ephydatia Mülleri, var. astrodiscus *Vejd.*, welche nur eine einzige Amphidiskenlage und ausschliesslich rauhe Skelettnadeln besitzt", unterscheidet. Aber diese Elemente, welche auf den ersten Blick recht wichtig scheinen, sind sehr variabel, denn es wurden einige Exemplare gefunden, bei welchen die Skelettnadeln ausschliesslich rauh, oder ausschliesslich glatt waren; auch die doppelte Amphidiskenlage ist manchmal dreifach (Ephydatia mirabilis *Retzer*), manchmal nur einfach. Diese Variabilität scheint mehr von den äusseren Umständen (z. B. der Grösse der Mutterstöcke, Beschaffenheit des Wassers u. s. w.) als von innerer Individualität abhängig zu sein. Demnach kann man jene als selbsständige Varietäten beschriebene Formen zusammenfassen und mit dem alten Lieberkühnschen Namen Ephydatia Mülleri bezeichnen, welche hauptsächlich durch die Form der Amphidisken charakterisirt ist.

V. Euspongilla Jordanensis Vejd., welche nach der Diagnose von Prof. *Vejdovský* mit einer *Menge* von Parenchym und Belegnadeln in einer hohen Luftkammerschicht sich auszeichnet, scheint nach den neueren Beobachtungen nur eine Varietät von Euspongilla lacustris zu sein, denn viele Übergangsformen, die in letzterer Zeit gefunden wurden, scheinen dafür zu sprechen, dass es nur äussere Umstände — besonders, wie Prof. *Vejdovský* vermuthet, die Menge der Kieselsäure, — sind, welche die Veränderung in der Menge von Parenchym- und Belegnadeln hervorrufen.

Tafelerklärung.

Fig. 1—16. Carterius Stepanowii mihi.

Fig. 1. Ein ausgewachsener Stock in natür. Grösse, nach einem frischen Exemplare.

Fig. 2. Verschiedene Formen der Skelettnadeln. — Vergrösserung Reichert, Obj. 6. Oc. III.

„ 3, 4. Parenchymnadeln; *a*, *b*, *c* Normal-Form. *Fig. 3.* Vergröss. Reichert Imm. 11., oc. II., *Fig. 4.*: Obj. 8, oc. III.

„ 5, 6. Amphidisken in verschiedener Lage und Form; *a b* abnorm. Fig. 5. bei Vergröss.: Imm. 11, oc. III. Fig. 6. Obj. 8, oc. III.

„ 7. Einzelne Scheibchen von Amphidisken, Vergröss. Reichert Imm. 11, Oc. III.

„ 8. Medianer Längsschnitt durch eine Gemmula (vergröss. Reichert Obj. 6, Oc. V.).
a Keimkörper;
b innere Chitinmembran;
c Luftkammerschicht (Parenchymschicht);
d kürzere, *d'* längere Amphidisken;
e äussere Chitinmembran;
f Luftröhre, mit einer Krone *g* am freien Ende;
h Scheidewand, durch welche das Innere der Gemmula von der Luftröhre getrennt wird.

„ 9. Gemmula bei der oberen Beleuchtung, in der Mitte befindet sich die Krone, welche am oberen Ende der Luftröhre hervorragt. Vergröss. Obj. 6. Oc. II.

„ 10. Eine Krone von der Seite aus betrachtet, *p* einzelne Lappen, *b* innere Chitinmembran, *f* Luftröhre. — Vergröss. Obj. 8, oc. III.

„ 11. Dieselbe im optischen Längsschnitte, *j* eine dünne Membran, welche das freie Ende der Luftröhre überwölbt. — Vergröss. Reichert Imm. 11. Obj. III.

„ 12. Dieselbe von der Oberfläche, *p* einzelne Lappen, *t* Scheibchen.

„ 13. Structur der Luftkammerschicht, *u* einzelne Luftkammern, *b* innere, *e* äussere Chitinmembran. Vergröss. Reichert Immers 11, Oc. V.

„ 14.—16. Entwickelung der Luftröhre und der Krone.

Fig. 17—22. Ephydatia bohemica nov. sp.

„ 17. Medianer Längsschnitt durch eine Gemmula. *k* Krone am oberen Pole. Andere Buchstaben wie in Fig. 8.

„ 18. Die Erhöhung am oberen Pole einer Gemmula mit der Krone („Porusanhang") *k* und niedrigem Rande *o*. Vergröss. Obj. 8, Oc. III.

Fig. 19. Dasselbe; der niedrige Rand ist schon in eine sehr kleine Luftröhre *f* entwickelt. Vergröss. wie in Fig. 18.

„ 20. Die Luftröhre *f* ist deutlich, aber sehr kurz. Die übrige Buchstaben-Bezeichnung wie in Fig. 8. und 11. Vergröss. Obj. 8, Oc. V.

„ 21. Verschiedene Formen der Amphidisken. Vergröss. Reichert Imm. 11, Obj. III.

„ 22. Einzelne Amphidiskenscheibchen. Vergröss. dieselbe.

(Tubuslänge 135 mm.)

8.

Beitrag zu einer Monographie des Stephanit.

Von Prof. Dr. **Karl Vrba**, vorgelegt am 12. Februar 1885.

Mit 10 Tafeln.

Synonyma: Argentum rude nigrum, Ged. Schwartz-ertz Agricola 1546, Gleba nigra argenti particeps, Hebenstreit (Wallerius 1750) —; Schwarzerz Schwarzgulden, Minera argenti nigra, Wallerius 1750; Argentum nigrum vel obscurum fuliginosum Linné 1768; Minera argenti vitrea fragilis, Brunnich in Cronstedt 1770; Argentum mineralisatum fragile, Born 1772; Mine d' argent vitreuse fragile, Sage 1777; Argent noire, Romé de l'Isle 1783; Sprödglaserz z. Thl. Werner 1789; Schwarzglanzartiges Silbererz, Kirwan 1794; Sprödglanzerz z. Thl. Hausmann 1813; Brittle sulphuret of silver, Jameson 1820; Argent antimonié sulphuré noire, Hauy 1822; Prismatischer Melanglanz, Mohs 1824; Schwarzgültigerz z. Thl. von Leonhard 1826; Rhombischer Silberglanz, Naumann 1828; Antimonsilberglanz, Breithaupt 1830; Schwarzsilberglanz, Glocker 1831; Psaturose, Sulphure d' arsenic et argent, Beudant 1832; Argent sulfuré fragile, Lévy 1837; Stephanit Haidinger 1845; Trivialnamen: Röschgewächs, Röschgewix, Tigererz.

Zu den interessantesten Mineralien aus der Gruppe der Sulfosalze gehört unstreitig der Stephanit; die grosse Zahl der an demselben auftretenden einfachen Formen, die Manigfaltigkeit ihrer Zonenverhältnisse, der wechselnde Typus, die verschiedene Ausbildung und der Reichthum der Combinationen, die so häufige und oft sehr verwickelte Zwillingsverwachsung wie nicht minder die mitunter tadellose Beschaffenheit seiner Krystallflächen machen ihn zu einem für goniometrische Untersuchungen sehr dankbaren Materiale.

Bevor ich zu der Besprechung sowohl meiner eigenen, meist an den ganz ausgezeichneten Stephaniten böhmischer Localitäten gewonnenen Beobachtungsresultate als auch der neueren Arbeiten anderer Forscher über Stephanite fremder Fundorte schreite, lasse ich eine gedrängte historische Uibersicht der fortschreitenden Kenntniss un-

seres Minerales vorangehen, so weit mir dies die zu Gebote stehende Literatur ermöglichte.

I. Historische Uibersicht.

Wiewohl schon die alten, namentlich die sächsischen Mineralogen ein Erz, das einen Uibergang zwischen dem geschmeidigen, schwarzen Silberglanz und dem etwas spröden Rothgältig zu bilden schien, kannten und dasselbe mit den alten Bergmannsnamen: Schwarzerz, Schwarzgülden und Sprödglaserz bezeichneten, gebührt wohl doch erst A. G. Werner das Verdienst, das Sprödglaserz als eigene Species in die Mineralogie eingeführt zu haben. Die Beschreibung, welche Wallerius [1]) von demselben giebt, lässt manche Zweifel aufkommen, ob ihm nicht verschiedenartiges vorgelegen ist, namentlich scheint seine dritte Varietät, „minera argenti nigra picea — schwarz Pecherz, wird bei Joachimsthale gefunden" vielleicht Uranpecherz gewesen zu sein, zumal er früher anführt „. . . hält Kupfer und Eisen zuweilen etwas Blei, besonders das pechschwarze." [2]) Von den anderen Varietäten sagt Wallerius selbst, „man meint, es sei entweder ein dunkeles und schwärzliches Weissgültigerz oder eine schwarze Steinart mit eingestreuten Körnern von Weissgülden oder Rothgülden, deren Theilchen man auch zuweilen wahrnehmen kann," giebt also selbst zu, dass verschiedenes subsummirt wurde.

Romé de l'Isle [3]) sagt von der Form: „Ich finde keine bestimmte Gestalt davon angegeben. In einer Stuffe, die ich aus Freiberg besitze, sind kleine Crystallen davon auf einer Quarzdruse angeflogen, die eine bis zwo Linien im Durchmesser halten und zum Theil unregelmässig genug sind, einige zeigen doch die achteckige Gestalt des Glaserzes" und erwähnt weiter, dass es von manchen Schriftstellern mit einem verwitterten oder sehr dunklen Weissgüldenerze unter einer Benennung verbunden worden. In der zweiten Auflage seiner Krystallographie beschreibt er das Sprödglaserz etwas eingehender und erklärt es für einen Uibergang aus Rothgülden in das

---

[1]) Mineralogie, übersetzt v. J. D. Denso 1750 p. 399.

[2]) Bekanntlich wurde das Uran im J. 1789 im Uranpecherz von Klaproth entdeckt; die Bezeichnung der Farbe des Sprödglaserzes als „pechschwarz" überrascht selbst bei Wallerius, auch enthält dasselbe selten und nur in Spuren Blei, das dem Uranpecherz reichlich beigemengt zu sein pflegt.

[3]) Krystallographie, übersetzt v. C. C. Weigel 1777 p. 381.

Glaserz[1]). Werner[2]) führt das Sprödglaserz zuerst als selbständige Species in seinem Mineralsystem an, ohne aber über Krystallform und andere Eigenschaften nähere Angaben zu machen, dessgleichen auch F. A. Reuss.[3])

Mohs beschreibt in dem bekannten Werke „Das Mineralien-Kabinet des Herren von der Null" [4]) recht eingehend Sprödglaserze von verschiedenen Fundorten, denen er eine gleichwinkelige sechsseitige Säule zu Grunde legt, ohne diese Annahme durch Winkelangaben zu bekräftigen; er führt paragenetische Beobachtungen an und macht auf mehrere von Estner angeführte, nicht beglaubigte Angaben aufmerksam, da letzterer „gerne Fahlerz, Kupferglanz u. a. mit Sprödglaserz verwechsele."

Recht interessant sind die Angaben Breithaupt's [5]) und Steffen's.[6]) Ersterer geht — gleich Mohs — von der gleichkantigen sechsseitigen Säule aus, die entweder durch die Endfläche abgeschlossen oder sechsseitig zugespitzt erscheint und durch Verkürzung in der Vertikalrichtung in Tafeln, z. Thl. mit sphaerischer Endigung und schliesslieh in linsenförmige Gebilde übergeht. Aus der Riefung auf den Tafelflächen und ihrer Ähnlichkeit mit jenen des Eisenglanzes schliesst er auf die gleiche spitzrhomboëdrische Kerngestalt, bespricht weiter eingehend andere physikalische Eigenschaften, die das Sprödglaserz als Gattung auszeichnen und bekämpft die Berzelius'sche Ansicht, dass das Sprödglaserz ein Gemenge sei.

Von der Stellung des Sprödglaserzes im System sagt Breithaupt „es steht einmal zwischen Glaserz und Rothgiltigerz und das anderemal zwischen jenem und Grauspiessglanzerz mitten inne."

Aus der Beschreibung der Form geht wohl hervor, dass Breithaupt Polybasit vorlag.

Steffens entwirft eine gute Beschreibung des Sprödglaserzes und zählt neun verschiedene Combinationen auf, denen er gleich seinen Vorgängern als Kerngestalt das gleichwinkelige sechsseitige Prisma zu Grunde legt, bekräftigt aber seine Behauptung nicht mit Winkelangaben. Zum Schlusse stellt er sich der Ansicht Breit-

---

1) Crystallographie II. Ed. T. III. 467.
2) Bergmänn. Journal 1789 381.
3) Lehrbuch der Min. 1803 II. Theil 3. Bd. 351.
4) 1805. 160.
5) Hoffmann's Handbuch d. Min. fortgesetzt v. Breithaupt III. Bd. 2. Abth. 63.
6) Vollst. Handb. d. Oryktognosie III. Theil 382.

haupt's, dass die Kerngestalt ein spitzes Rhomboeder sei, entgegen und sagt: „Die Krystallisationssuite ist völlig in sich geschlossen, wenn aber Breithaupt aus der triangularen Streifung der tafelförmigen Krystalle auf eine spitzrhomboidale Kerngestalt hier, wie beim Eisenglanz, schliesst, so scheint diese Annahme mit dem Übergange der Krystalformen in einander nicht übereinzustimmen."

Die Angaben Zipser's, das Sprödglaserz aus Ungarn betreffend, sind, abgesehen von paragenetischen Bemerkungen, dürftig[1]).

Die so ziemlich ungeklärten Ansichten über die Form des Sprödglaserzes, die z. Thl. widersprechenden Angaben in den verschiedenen Handbüchern lassen es erklärlich erscheinen, dass auch Hauy[2]), der sonst richtig charakterisirt, eine Beschreibung vom Sprödglaserz entwirft, die die Verwirrung noch zu steigern vermochte. Er behandelt das „argent antimonié sulfuré noir" in einem Appendix zum Rothgülden und sagt, dass es mit letzterem alle Eigenschaften gemein habe, ausgenommen den schwarzen Strich; die Form bezeichnet er als prismatisch, fügt aber hinzu, dass dieselbe Form auch am Rothgülden vorkomme und dass an ersterem auch Würfel beobachtet werden. Auch Hauy führt keine Winkel an, nachdem er die Messungsresultate der Kleinheit der Flächen wegen als nur sehr approximativ bezeichnet. Schliesslich stellt er als wahrscheinlich hin, dass Sprödglaserz und Rothgülden ident seien und will hier den Ausspruch angewendet wissen: „nimium ne crede colori."

Die ersten genauen Angaben über die Krystallform des Stephanit finden wir bei Mohs[3]), welcher die Messungen Haidinger's benützte, die das rhombische Krystallsystem zweifellos nachwiesen und recht genaue Fundamentalwerthe lieferten.

Es werden zehn einfache Formen unterschieden und durch Winkelangaben begründet, sowie einige z. Thl. flächenreiche Combinationen beschrieben und abgebildet, auch wird die Flächenbeschaffenheit berücksichtigt und die Analogie der Zwillingsverwachsung mit Speerkies, Aragonit und Weissbleierz hervorgehoben, wesshalb es auffallen muss, dass Haidinger oder Mohs für den Stephanit eine andere

---

[1]) Versuch eines topogr.-mineralog. Handbuches v. Ungarn 1817, 199 und 363.

[2]) Traité de mineralogie II. Ed. T. III. 280.

[3]) Grundriss d. Min. 1824. II. 588. — Mohs führt zwar die Provenienz seiner Angaben nicht an, sie ist jedoch zweifellos aus Haidinger's Bemerkung — Handbuch 1845. 472 — und auch höchst wahrscheinlich, dass Haidinger Příbramer Krystalle gemessen hat.

Stellung wählten als jene der vorerwähnten Species. Mohs führt auch das Eigengewicht eines Přibramer Krystalles = 6.269 an.

Leonhard entlehnt Stellung und Winkel dem Grundriss von Mohs und beschreibt einige Combinationen in seiner bekannten Terminologie.[1])

Dem scharfen Blicke Naumann's entging es nicht, dass dem Stephanit naturgemäss dieselbe Stellung wie dem Aragonit zukomme und so finden wir in seinem Lehrbuche[2]) die nun allgemein übliche Stellung zum erstenmale angeführt und in dem zugehörigen Atlas die bezüglichen Figuren entworfen.

Auch bemerkt Naumann, dass nach Breithaupt unter dem Werner'schen Sprögläserze eine wirkliche hexagonale Species vorhanden sei, die später Breithaupt[3]) unter dem Namen Eugenglanz und nachher H. Rose[4]) ohne Beachtung der Breithaupt'schen Publication als Polybasit beschrieben. Breithaupt bemerkt, dass weitaus der grösste Theil namentlich die tafeligen Krystalle des Werner'schen Sprödglaserzes Eugenglanz, der kleinere Theil aber Melanglanz Mohs sei, macht weiters auf die verschiedene Dichte der beiden Species aufmerksam und führt für beide die Fundorte getrennt auf.

Glocker[5]), Hartmann[6]) und Presl[7]) führen in ihren Werken nur bekanntes an, alle entlehnen ihre Daten den Werken von Mohs und Naumann; ersterer hält an der Stellung von Mohs fest, während die beiden letzteren Naumann folgen; bei Presl sind mehrfach irrige Winkelangaben in der Zone der Brachydomen unterlaufen.

Lévy[8]) beschreibt fünf recht flächenreiche Combinationen, die er auch in seinem Atlas wiedergiebt, das Verhältniss der Basiskante zur Höhe seiner Grundform giebt er beiläufig gleich 5 : 6 an, woraus eine doppelte Vertikalkaxe im Vergleich zu jener Naumanns resultirt. In einer Anmerkung bemerkt Lévy, dass die Klaproth'sche

---

[1]) Handbuch der Oryktognosie II. Auf. 1826. 638.

[2]) 1828. 582.

[3]) Schweigg. Journal f. Chem. und Phys. 1829 Bd. LV. 296. LVII. 118.

[4]) Poggend. Annalen XV. 1829. 575.

[5]) Handb. d. Min. 1831. II. Abth. 416.

[6]) Lehrb. d. Min. 1835. I. 444.

[7]) Nerostopis 1837. 195.

[8]) Description d'une collection de minéraux formée par Heuland 1837. T. II. 364.

Analyse des Rothgiltigerzes von jener des Sprödglaserzes von demselben Chemiker ausgeführt, nicht viel abweiche, woraus man auf die gleiche Zusammensetzung schliessen könnte und dann würde sich der Stephanit zum Rothgülden verhalten wie Aragonit zum Calcit.

In dem von Zippe[1]) bearbeiteten Mohs'schen Werke wurde die ursprüngliche Stellung beibehalten und nur eine abweichende Form angeführt, die Winkelangaben weisen aber reichliche Druckfehler auf. Die Krystallformen böhmischer Stephanite hat Zippe[2]) bestimmt, leider vermisst man aber auch hier die so wichtigen Winkelwerthe und nur spärlich sind die Angaben bezüglich der paragenetischen Verhältnisse

In Haidinger's Handbuch[3]) finden wir nur die gewöhnlichsten Formen angeführt und für den prismatischen Melanglanz den neuen Namen Stephanit in Vorschlag gebracht[4]).

Hörnes[5]) beschreibt in seiner Mittheilung über die Henickstein'sche Sammlung eine grössere Zahl Stephanite, darunter eine Prachtstufe von Freiberg und führt die gewöhnlichsten Formen gemäss der Mohs'schen Stellung an.

Hausmann[6]) und Quenstedt[7]) acceptiren Naumann's Orientirung und führen Haidinger'sche Werthe an, desgleichen finden wir auch bei Miller[8]) keine eigenen Messungen.

Dufrenoy[9]) entlehnt, wie er anführt, die Formen und Winkel dem Hausmann'schen Handbuch (— wiewohl dieselhen nicht ganz

---

[1]) Anfangsgründe der Naturg. d. Mineralreiches 1839. II. 562.

[2]) Verhandl. d. Gesellsch. d. vaterl. Museum 1839. 56; 1840. 34; 1842. 86.

[3]) 1845. 570.

[4]) Haidinger motivirt seinen Vorschlag mit folgenden Worten: „.... Wenn ich aber insbesondere diese schöne und in unserem eigenen Lande sogar technisch wichtige Species für den Namen (Stephanit) wählen durfte, so glaube ich mir dazu durch die vor mehr als 20 Jahren vollendete krystallographische Bestimmung desselben, wie sie in Mohs Werken enthalten ist, einigen Anspruch erworben zu haben und ich wüusche dabei die Erinnerung an die Fundorte ausgezeichneter Krystalle, Přibram und Ratibořic, festzuhalten, in dem Lande, das eben jetzt den hohen kenntnissreichen Gönner (Erzherzog Stephan) als seinen Chef verehrt." a. a. O. 472.

[5]) Neues Jahrb. f. Min. etc. 1846. 785.

[6]) Handbuch d. Min. II. Auf. 1847. 185.

[7]) Handb. d. Min. 1855. 605.

[8]) Miller and Brooke Introduction to min. 1852. 210.

[9]) Traité de Mineral. III. 430. Überflüssigerweise führt Dufrenoy im Jahre 1856 aus, dass Hany (vor mehr als 36 Jahren) den Stephanit mit Unrecht mit Rothgülden vereinigte.

übereinstimmen —) das Verhältniss der Basiskante zur Höhe des Hexaides entnimmt er aber Lévy, welche Angaben sich nicht vereinigen lassen, da Lévy's Formen eine doppelte Vertikalaxe besitzen.

Bei Dana[1]) finden wir die von Schröder an Andreasberger Krystallen nachgewiesenen Formen mit einigen Druckfehlern und Verstümmelungen[2]) aber auch die Form $i - \breve{9} = 190 = \infty P\breve{9}$, die sonst kein Autor erwähnt und für welche auch Dana weder Winkel noch irgend eine Quelle angiebt.

Unter den neueren Arbeiten über den Stephanit verdient vorzugsweise Schröder's[3]) Monographie der Andreasberger Krystalle hervorgehoben zu werden, auf die wir in der Folge noch wiederholt zurückgreifen werden. Gestützt auf genaue Winkelmessungen werden 39 sicher bestimmte und 3 zweifelhafte Formen unterschieden.

Über Wolfacher Stephanite liegt von F. Sandberger[4]) eine Nachricht vor, über Schemnitzer Krystalle im Budapester Universitäts-Museum lieferte Peters[5]) eine kurze Notiz; als neue Form führt er $201 = 2P\overline{\infty}$ an, ohne aber die Neigungsverhältnisse derselben anzugeben, wahrscheinlich dürfte er selbe aus dem Einspiegeln in der Zone $d(201)$ $P(111)$ bestimmt haben. Vogel[6]) berichtet über Stephanitkrystalle von Joachimsthal, die dortselbst auf Mitternachtsgängen einbrechen, führt einfache Combinationen derselben an und zählt ihre Begleiter auf.

Auf Příbramer Krystalle bezügliche Beobachtungen finden wir bei Reuss,[7]) Babanek[8]) und Vrba.[9]) Ersterer beschrieb Krystalle vom reichen Anbruche im Jahre 1858 am Barbaragang (12. Lauf); die angeführte 7-zählige Combination umfasst 6 der gewöhnlichsten Formen, denen $121 = 2P\breve{2}$, eine bislang nicht beobachtete, sehr seltene

---

[1]) A System of Min. V. Ed. 1869. 106.

[2]) $\frac{12}{3} - \frac{1\breve{3}}{7}$ soll wohl heissen $\frac{13}{3} - \frac{1\breve{3}}{7}$
$1 - \breve{5}$ „ „ „ $5 - \breve{5}$ da Schröder's γ 151 nicht angeführt ist.
$3 - \breve{\ }$ „ „ „ $3 - \breve{9}$ „ „ v_2 193 „ „ „

[3]) Berg- und Hüttenm. Zeitung 1854 Nro. 29—31 und Pogg. Anu. 95. 1855. 257.

[4]) Neues Jahrb. f. Min. etc. 1869. 312.

[5]) Neues Jahrb. f. Min. etc. 1861. 664.

[6]) Gangverhältnisse u. Mineralienreichthum Joachimsthals 1857. 79.

[7]) Sitzber. d. Wiener Akad. math.-naturw. Cl. 1863. 47 (I) 20.

[8]) Tschermak Min. Mitth. 1872. 32.

[9]) Zeitschrift für Krystall. und Min. V. 1881. 418.

und stets nur klein entwickelte Form zugefügt wird[1]); da sich Reuss Angaben nicht auf Messung stützen, dürfte diese Angabe auf einem Irrthum beruhen. Auch Babanek's Angaben über Stephanite vom Kreuzkluftner Gang (20. Lauf) sind nicht durch Winkelangaben begründet, bieten aber auch nur die allergewöhnlichsten Formen.

Ausser der bereits angeführten Notiz von Hörnes finden wir über Freiberger Krystalle Beobachtungen von Frenzel[2]) und Schimper.[3]) Ersterer führt mehrzählige Combinationen von mehreren Gruben des Freiberger Revieres an, giebt aber keine Neigungsverhältnisse; letzterer hat durch Messung 13 einfache Formen erkannt, darunter zwei neue.

Über den ersten englischen Stephanit von Wheal Newton, Cornwall, gab Lewis Kunde[4]); die reiche, 15-zählige Combination weist die neue Form $142 = 2\breve{P}4$ auf[5]) und eine kleine Fläche in der Zone 011 : 142 die Doppelreflexe lieferte, für welche Lewis die Symbole 21.4.3 und 16.3.10 ableitet. Nach der Situation der Fläche in der Zeichnung — in der beigefügten Projection ist dieselbe nicht verzeichnet — ist die Form offenbar eine Brachypyramide, was auch aus der Bemerkung Lewis, dass sie der Schröder'schen Fläche $\bar{5}13$ — soll wohl heissen 153, denn diese hat Schröder beobachtet — indirekt hervorgeht und wären demgemäss die Symbole zu schreiben 4.21.13 und 3.16.10.

Morton beschrieb flächenreiche Krystalle von Kongsberg, von den angeführten 22 Formen sind 4 neue[6]).

Die jüngste krystallographische Arbeit über den Stephanit verdanken wir G. vom Rath,[7]) der an einem Krystall aus Mexico 13 Formen, darunter die neue Gestalt $3.11.6 = \frac{11}{6}\breve{P}\frac{11}{3}$ nachgewiesen hat.

[1]) Auch Frenzel führt diese Form an Krystallen von Segen Gottes zu Gersdorf ohne dieselbe zu begründen, an. Lexicon 307.

[2]) Mineralog. Lexicon für d. Königr. Sachsen 1874. 306.

[3]) Groth, Strassburger Sammlung 69.

[4]) Zeitsch. f. Krystall. VII. 575.

[5]) Von mir an Příbramer Krystallen bereits 1881 beobachtet.

[6]) Zeitsch. f. Krystall. 9. 1884. 238. Die Fläche $r = 2 . 22 . 7 = \frac{22}{7}P1\breve{1}$, die Morton als von Schröder unsicher angegeben anführt, hat letzterer an seinem letzten Krystall sicher bestimmen können Pagg. Ann. 95. 1855. 274.

[7]) Zeitsch. f. Krystall. 10. 1588. 173.

Zur Erforschung der chemischen Constitution des Sprödglaserzes wurden mehrere vollständige Analysen sowie einige quantitative Silberbestimmungen durchgeführt.

Die erste Analyse, welche Klaproth[1]) lieferte, ist zu unvollständig, sie wurde mit blättrigen Krystallen von der Grube „Alte Hoffnung Gottes" zu Grossvoigtsberg bei Freiberg ausgeführt und dürfte, wie schon Breithaupt[2]) bemerkt, nicht der Stephanit sondern Polybasit analysirt worden sein. Entgegen der Angabe Klaproth's, der 10% Antimon gefunden, will Berzelius keine Spur von Antimon, sondern Arsen nachgewiesen haben. Naumann bezeichnet die chemische Zusammensetzung als noch nicht ausgemittelt, führt die Klaproth'sche Analyse an, giebt aber ein Verhalten vor dem Löthrohre, das mit dem erwähnten Analysenresultate im Widerspruche steht.[3])

Auch die von Brandes[4]) veröffentlichte Zerlegung der Krystalle vom „Neuer Morgenstern bei Freiberg" ist nicht vertrauenerweckend; wahrscheinlich wurde dieselbe mit sehr unreinem Materiale ausgeführt.

Die erste gute Analyse ist jene von H. Rose[5]), ausgeführt mit dem sog. Röschgewächs von Schemnitz, welcher später jene der Stephanite von der Grube Andreaskreuz zu Andreasberg am Harz von Kerl[6]), jene von Frenzel[7]) und die der Přibramer Krystalle (Barbaragang 12 Lauf.) von V. Kolář[8]) folgten; alle drei Analytiker gelangten zu gut übereinstimmenden Resultaten, welche auf die Formel $Ag^5 Sb S^4$ führen.

Uiber Pseudomorphosen nach Stephanit liegen mehrere Notizen vor, meist ist es Eisenkies oder Strahlkies, die in der Form des Stephanit auftreten und haben derartige Bildungen Zippe[9]) aus Joachimsthal, Mohs[10]) von Derbyshire, Blum[11]) von Freiberg und San Joacquim in Mexico und Sillem[12]) bekannt gemacht. Seltener scheint

---

[1]) Beiträge zur chem. Kenntnis der Mineralkörper I. 1795. 162.
[2]) Schweigg. Journal LV. 297.
[3]) a. a. O. 584.
[4]) Schweigg. Journal XXII. 1818. 344.
[5]) Pogg. Ann. XV. 1829. 451.
[6]) Berg- und Hüttenm. Zeitung 1853, 17.
[7]) Lexicon 306.
[8]) Zeitsch. f. Krystallog. u. Min. V. 1881. 435.
[9]) Verhandl. d. vaterländ. Mus. 1832. 58. und 1842. 83.
[10]) Mineralien-Kabinet d. H. v. d. Null. III. 344.
[11]) Pseudomorph. d. Mineralreiches 300.
[12]) Neues Jahrb. f. Min. 1851. 383.

die Umwandlung in andere Minerale von statten gegangen zu sein; so berichtet Blum[1]) über eine Pseudomorphose von Arsenkies von Freiberg, G. vom Rath[2]) und v. Zepharovich[3]) über jene von Silber nach Stephanit von Přibram.

Während im Vorstehenden einiger Pseudomorphosen nach Stephanit Erwähnung geschehen, hat Reuss[4]) Stephanit pseudomorph nach Polybasit beschrieben.

Bezüglich der Fundorte und der paragenetischen Verhältnisse sind namentlich die Werke von Mohs[5]) und Breithaupt[6]) wichtig. Nach ersterem bricht das Sprödglaserz im Freiberger Revier mit Silber, Glaserz, dunklem Rothgülden, Weissgültigerz, Bleiglanz, schwarzer Blende in und mit Braunspath, Kalkspath, Quarz seltener mit Flussspath und Schwerspath. Im Obererzgebirge sind lichtes Rothgülden, Speiskobalt, Arsen, Glaserz, Silber, Schwefel- und Kupferkies auf Braunspath und Kalkspath seine Begleiter. In Ungarn — Schemnitz und Kremnitz — finden sich dieselben Begleiter mit Ausnahme des Kobaltkieses, Arsens, des lichten Rothgülden; nebst brauner Blende ist Kupferkies ein steter Begleiter, selten stellen sich Spuren von Gold ein; aufgewachsen oder eingesprengt ist es gleichfalls in Braun- oder Kalkspath seltener in Schwerspath. Ausser den erwähnten Hauptfundpunkten liefert nach Mohs Böhmen, Siebenbürgen und Sibirien etwas Sprödglaserz.

Breithaupt giebt mit geringen Abweichungen dieselbe Paragenese an, specificirt aber genauer die Fundstellen, namentlich jene Sachsens. Von Freiberger Gruben nennt er „Neuer Morgenstern, Mittagssonne, Himmelsfürst, Alte Hoffung Gottes zu Grossvoigtsberg u. a., auch fügt er Schneeberg (Grube Priester), Johanngeorgenstadt und Annaberg hinzu. Von böhmischen Localitäten war ihm Přibram und Joachimsthal, von den ungarischen Schemnitz, — Windschacht, Stephanischacht — und Kremnitz bekannt. Auch Mexico und Peru werden als Fundorte angegebeh.

Noch zahlreicher sind die Fundpunkte bei F. A. Reuss[7]) angeführt; ausser den bereits genannten wird Altwolfach, Andreasberg

---

[1]) Dritter Nachtrag 249.
[2]) Pogg. Ann. 111. 1860. 266.
[3]) Sitzber. d. Wiener Akad. math. naturw. Cl. 1874. LXIX.
[4]) Neues Jahrb. f. Min. etc. 1853. 475.
[5]) Mineralien-Kabinet d. H. v. d. Null a. a. O.
[6]) Hoffmann's Handb. d. Min. a. a. O.
[7]) a. a. O.

und Clausthal erwähnt. Von Schemnitzer und Kremnitzer Gruben wird eine grosse Reihe als sprödglasführend bezeichnet, die in dem ausführlichen Buche Zipser's nicht als solche bezeichnet sind.

Die in den vorerwähnten Werken angegebenen Localitäten übergingen mehr oder minder vollständig in alle später erschienenen Handbücher.

In der neueren Literatur finden wir die österreichischen Localitäten in von Zepharovich's,[1]) die sächsischen in Frenzel's[2]) Lexicon ausführlich angegeben. Die amerikanischen Fundorte hat Dana[3]) in seiner Mineralogy angeführt; bezüglich des Stephanit von Ophir, Newada, liegt eine Notiz von Blacke[4]) vor.

II. Krystallsystem, Aufstellung, Axenverhältniss.

Wie bereits im vorhergehenden erwähnt, hat Haidinger gestützt auf seine mit dem Reflexionsgoniometer ausgeführten Messungen zweifellos dargethan, dass der Stephanit dem rhombischen Systeme angehöre und hat die meist herrschende Pyramide zur Grundform gewählt. Seiner Aufstellung gemäss ist die Vertikale die längste, die Längsaxe aber die kürzeste der drei Axen. Wegen der Analogie der Zwillingsbildung und der Aehnlichkeit der Flächenneigungen des Stephanit mit dem Aragonit hat Naumann eine letzterem Minerale entsprechende, nun allgemein übliche Stellung in Vorschlag gebracht, indem er die Vertikale mit der Queraxe vertauschte.

Ausser den von Haidinger, wahrscheinlich an Přibramer Krystallen gewonnenen Axenwerthen liegen noch Bestimmungen von Schröder an Krystallen von Andreasberg und von Morton für jene von Kongsberg vor. Ich habe zur Ermittelung des Axenverhältnisses der Přibramer Stephanite je 20 scharfe Faden-Kreuz-Messungen der Kanten $P(111):c(001)$ und $k\ (011):c(001)$ an tadellos gebildeten, vollkommen einfachen Krystallen mit spiegelglatten Flächen

[1]) I. 434. II. 309.

[2]) 306. — Groth giebt in seinem Werke „Mineralien-Sammlung der Universität Strassburg" als sächsischen in Frenzel's Lexicon nicht enthaltenen Fundort auch Schönborn an und erwähnt flächenreicher Krystalle von dort, die aus der Perl'schen Sammlung stammen. Herr Prof. H. Bücking theilte mir nebst Andreasbergern und Marienbergern Stephaniten auch die Schönborner Stücke zur Ansicht mit, welche sich aber als Borrnonit erwiesen; letzteres Mineral ist von Schönborn längst bekannt. Frenzel's Lexicon 47.

[3]) 106.

[4]) Neues Jahrb. f. Min. etc. 1867. 197.

verwendet, deren Abweichungen nicht ganz eine Minute betragen haben, und Resultate erlangt, die fast absolut mit den Angaben der genannten Forscher übereinstimmen, wie aus den angeführten Werthen zu ersehen ist:

$$\bar{a} : \bar{b} : c = 0{\cdot}62919 : 1 : 0{\cdot}68550 \text{ Haidinger}^{1)}$$
$$= 0{\cdot}62911 : 1 : 0{\cdot}68526 \text{ Schröder}^{2)}$$
$$= 0{\cdot}62892 : 1 : 0{\cdot}68511 \text{ Morton}^{3)}$$
$$= 0{\cdot}62913 : 1 : 0{\cdot}68514 \text{ Vrba.}$$

Aus den angeführten Daten ist ersichtlich, dass den Stephanit-Krystallen verschiedener Fundorte ein gleiches oder doch nahezu gleiches Axenverhältniss zukomme, denn die grösste Abweichung, welche die Morton'sche *a*-Axe aufweist, ist wohl weniger als eine specifische Eigenthümlichkeit Kongsberger Krystalle zu deuten, sie dürfte vielmehr in der Beschaffenheit der Flächen der Vertikalzone des Stephanits ihre natürliche Erklärung finden, denn die aus irgend einem der anderen Axenverhältnisse berechneten theoretischen Winkelwerthe stimmen mindestens ebenso genau mit den von Morton gemessenen Flächenneigungen, wie die aus seinem eigenen Parameterverhältniss abgeleiteten Winkel der Flächennormalen. Dass auch Freiberger Stephaniten und den Krystallen aus Cornwall und Mexico dieselben Grunddimensionen zukommen, haben Schimper, Lewis und G. vom Rath dargethan; die Messungen der beiden erstgenannten Forscher stimmen mit den aus Schröder's Elementen deducirten Werthen oft absolut überein oder nähern sich denselben ausserordentlich; die zahlreichen Messungen, welche vom Rath an einem mexikanischen Krystalle ausführte, kommen, wie er selbst hervorhebt, den aus denselben Axen berechneten Winkelwerthen bis auf wenige Minuten nahe.

III. Beobachtete Formen.

Im folgenden gebe ich eine Zusammenstellung sämmtlicher, bisher am Stephanit beobachteter Formen, deren Zahl nun 90 beträgt. Die erste Columne der Tabelle enthält die currente Nummer, in der zweiten ist die Flächensignatur,[4] in der dritten das Miller'sche

---

[1]) Mohs Grundriss d. Min. 1824. II. Thl. 588. $1 : \sqrt{2{\cdot}526} : \sqrt{1{\cdot}187}$ ber. aus $c : P$ 52°9½′; $b : P$ 65°8′; $a : P$ 48°3½′.

[2]) Pogg. Ann. 95. 1855. 258 ber. aus $c : P$ 52°9′; $o : b$ 57°49½′.

[3]) Zeitsch. f. Krystall. etc. 9. 1884. 239. ber. aus $o : P$ 37°50′; $o : a$ 32°10′.

[4]) Die Flächensignaturen sind der Arbeit Schröders entlehnt, nur *c* statt *s*, *h* statt *a*, *a* statt *h* und *b* statt *p* gesetzt.

Symbol und in der vierten Columne das Naumann'sche Zeichen angeführt. Die folgenden, mit Namen der Stephanit-Fundorte überschriebenen Columnen bezeichnen mittelst eines Sternchens jene Formen, welche an Krystallen des betreffenden Fundortes nachgewiesen sind; in der letzten Spalte ist der Name jenes Forschers verzeichnet, der die Form, soweit ich dies ermitteln konnte, zuerst bestimmte oder des Autors, der sie zuerst citirt.

An die Uibersicht schliessen sich Bemerkungen über Beschaffenheit der einzelnen Formen, über ihren Zonenverband und bezüglich der von mir beobachteten Flächen auch über ihre Häufigkeit oder Seltenheit an.

Nro.	Signatur	*Miller's* Symbol	*Naumann's* Zeichen	Příbram	Joachimsthal	Ratibořic	Altwožic	Řemišov	Schemnitz	Andreasberg	Freiberg	Kongsberg	Cornwall	Mexico	Autor
1	*a*	100	$\infty\bar{P}\infty$	*	*	—	—	—	*	*	—	*	*	*	*Haidinger*
2	*b*	010	$\infty\breve{P}\infty$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*Haidinger*
3	*c*	001	$0P$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*Haidinger*
4	*λ*	310	$\infty\bar{P}3$	*	—	*	—	*	—	*	—	—	—	*	*Schröder*
5	*L*	210	$\infty\bar{P}2$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
6	*o*	110	∞P	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*Haidinger*
7	*u*	350	$\infty\breve{P}\frac{5}{3}$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
8	*U*	120	$\infty\breve{P}2$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
9	*π*	130	$\infty\breve{P}3$	*	*	—	*	*	—	*	—	—	*	*	*Schröder*
10	*I*	150	$\infty\breve{P}5$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
11	*i'*	190	$\infty\breve{P}9$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*Dana*
12	*i*	1 . 11 . 0	$\infty\breve{P}11$	—	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
13	$\beta\frac{1}{2}$	102	$\frac{1}{2}\bar{P}\infty$	*	—	—	*	—	—	—	—	*	—	—	*Morton*
14	$\beta\frac{2}{3}$	203	$\frac{2}{3}\bar{P}\infty$	—	—	—	—	—	—	—	—	*	—	—	*Morton*
15	*β*	101	$\bar{P}\infty$	*	—	—	*	*	*	*	*	*	*	—	*Zippe*
16	*g*	201	$2\bar{P}\infty$	*	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*	*Peters*
17	*G*	301	$3\bar{P}\infty$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
18	*α*	013	$\frac{1}{3}\breve{P}\infty$	—	—	—	—	*	—	—	—	—	—	—	*V.*
19	*s*	102	$\frac{1}{2}\breve{P}\infty$	*	—	—	—	*	—	*	*	—	—	—	*Haidinger*

Nro.	Signatur	*Miller's* Symbol	*Naumann's* Zeichen	Příbram	Joachimsthal	Ratibořic	Altwožic	Řemišov	Schemnitz	Andreasberg	Freiberg	Kongsberg	Cornwall	Mexico	Autor
20	t	203	$\frac{2}{3}P\breve{\infty}$	*	*	*	*	*	*	*	—	*	*	—	*Lévy*
21	$\mathfrak{a}$	045	$\frac{4}{5}P\breve{\infty}$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
22	k	011	$P\breve{\infty}$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*Haidinger*
23	$\varkappa$	043	$\frac{4}{3}P\breve{\infty}$	*	*	—	—	*	—	—	*	—	—	—	*Schimper*
24	j	032	$\frac{3}{2}P\breve{\infty}$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
25	d	021	$2P\breve{\infty}$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*Haidinger*
26	e	041	$4P\breve{\infty}$	*	—	—	*	*	*	*	—	*	—	*	*Lévy*
27	E	061	$6P\breve{\infty}$	*	—	—	—	*	—	—	—	—	—	—	*V.*
28	δ_1	071	$7P\breve{\infty}$	—	—	—	—	—	*	*	—	—	—	—	*Schröder*
29	δ_2	0 . 15 . 2	$\frac{15}{2}P\breve{\infty}$	—	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
30	δ_3	081	$8P\breve{\infty}$	*	—	—	—	*	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
31	δ_4	0 . 14 . 1	$14P\breve{\infty}$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
32	B	916	$\frac{3}{2}P\bar{9}$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
33	τ	512	$\frac{5}{2}P\bar{5}$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
34	A	313	$P\bar{3}$	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	—	*V.*
35	ξ	312	$\frac{3}{2}P\bar{3}$	*	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
36	ζ	311	$3P\bar{3}$	*	—	—	—	—	—	*	—	—	—	*	*Schröder*
37	Σ	211	$2P\bar{2}$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
38	φ	535	$P\bar{5}/_3$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
39	ψ	532	$\frac{5}{2}P\bar{5}/_3$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
40	q_1	115	$\frac{1}{5}P$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
41	q	114	$\frac{1}{4}P$	*	*	—	—	—	—	*	*	—	—	—	*Schröder*
42	m	113	$\frac{1}{3}P$	*	*	—	*	*	*	*	*	*	*	*	*Haidinger*
43	h	112	$\frac{1}{2}P$	*	*	*	*	—	*	*	*	*	*	*	*Haidinger*
44	l	223	$\frac{2}{3}P$	*	—	—	—	*	—	*	*	—	—	—	*Schröder*
45	P	111	P	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*Haidinger*
46	p_2	554	$\frac{5}{4}P$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
47	p_1	443	$\frac{4}{3}P$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
48	p	332	$\frac{3}{2}P$	*	—	—	—	*	—	—	*	—	—	—	*Schimper*

Nro.	Signatur	Miller's Symbol	Naumann's Zeichen	Příbram	Joachimsthal	Ratibořic	Altwožic	Řemišov	Schemnitz	Andreasberg	Freiberg	Kongsberg	Cornwall	Mexico	Autor
49	r	221	$2P$	*	—	—	—	*	—	—	*	*	—	—	*Naumann*
50	r_1	773	$^7/_3 P$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
51	r_2	331	$3P$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
52	x	461	$6\breve{P}\,^3/_2$	—	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
53	h_1	356	$^5/_6 \breve{P}\,^5/_3$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
54	Ξ	354	$^5/_4 \breve{P}\,^5/_3$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
55	χ	352	$^5/_2 \breve{P}\,^5/_3$	—	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
56	y	351	$5\breve{P}\,^5/_3$	—	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
57	F	591	$9\breve{P}\,^9/_5$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
58	z	7 . 13 . 3	$^{13}/_3 \breve{P}\,^{13}/_7$	—	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
59	H	122	$\breve{P}2$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
60	u	243	$^4/_3 \breve{P}2$	—	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
61	R	121	$2\breve{P}2$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
62	ϱ	241	$4\breve{P}2$	*	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
63	Γ	371	$7\breve{P}\,^7/_3$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
64	σ	258	$^5/_8 \breve{P}\,^5/_2$	—	—	—	—	—	—	—	—	*	—	—	*Morton*
65	ω_1	5 . 15 . 27	$^5/_9 \breve{P}3$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
66	ω_2	135	$^3/_5 \breve{P}3$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
67	ω	134	$^3/_4 \breve{P}3$	*	*	—	—	—	*	*	—	—	*	—	*Schröder*
68	ω_3	3 . 9 . 11	$^9/_{11} \breve{P}3$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
69	ω_4	267	$^6/_7 \breve{P}3$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
70	ω_5	3 . 9 . 10	$^9/_{10} \breve{P}3$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
71	ω_6	13.39.40	$^{39}/_{40} \breve{P}3$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
72	f	133	$\breve{P}3$	*	*	*	—	—	—	*	—	*	—	*	*Schröder*
73	v	132	$^3/_2 \breve{P}3$	*	*	—	—	—	*	*	—	*	—	—	*Zippe*
74	w	131	$3\breve{P}3$	*	—	—	—	—	*	*	—	*	—	—	*Schröder*
75	t_1	3 . 11 . 6	$^{11}/_6 \breve{P}\,^{11}/_3$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*	*G. vom Rath*
76	W	3 . 11 . 3	$^{11}/_3 \breve{P}\,^{11}/_3$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
77	T	142	$2\breve{P}4$	*	—	*	—	—	—	—	—	—	*	—	*Lewis*

Nro.	Signatur	*Miller's* Symbol	*Naumann's* Zeichen	Příbram	Joachimsthal	Ratibořic	Altwožic	Řemišov	Schemnitz	Andreasberg	Freiberg	Kongsberg	Cornwall	Mexico	Autor
78	μ	281	$8P\breve{4}$	—	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
79	t_2	3 . 13 . 6	$^{13}/_{6}P\breve{^{13}/_{3}}$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
80	n_2	156	$^{5}/_{6}P\breve{5}$	—	—	—	—	—	—	—	—	*	—	—	*Morton*
81	K	155	$P\breve{5}$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
82	n	153	$^{5}/_{3}P\breve{5}$	—	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
83	ϑ	152	$^{5}/_{2}P\breve{5}$	*	—	—	—	—	—	—	—	*	—	—	*V.*
84	γ	151	$5P\breve{5}$	*	—	—	—	—	*	*	—	—	—	—	*Schröder*
85	η	3 . 15 . 1	$15P\breve{5}$	—	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
86	ν_4	4.21.13	$\frac{21}{13}P\breve{\frac{21}{4}}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*	—	*Lewis*
		3.16.10	$^{8}/_{5}P\breve{^{16}/_{3}}$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*	—	*Lewis*
87	ν_1	172	$^{7}/_{2}P\breve{7}$	—	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
88	ν_2	193	$3P\breve{9}$	—	—	—	—	—	—	*	—	—	—	—	*Schröder*
89	ν_3	192	$^{9}/_{2}P\breve{9}$	*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*V.*
90	ε	2 . 22 . 7	$^{22}/_{7}P\breve{11}$	—	—	—	—	—	—	*	—	*	—	—	*Schröder*

1. *a* 100; gewöhnlich eben und spiegelnd, aber wenig ausgedehnt, ist von den drei Pinakoiden das seltenste.

2. *b* 010; fast stets horizontal gerieft, nur selten vollkommen glatt und intensiv glänzend, eine fast nie fehlende Fläche.

3. *c* 001; häufig sehr gross, sehr selten fehlt diese Fläche ganz, ist gewöhnlich parallel den Combinations-Kanten mit den Pyramiden der Grundreihe gerieft, mitunter in der angegebenen Richtung tief gefurcht, nicht selten tritt noch eine Riefung nach der Brachyaxe hinzu; giebt aber trotzdem gewöhnlich sehr gute Reflexe.

4. λ 310; gewöhnlich nur sehr untergeordnet und glatt, mit zunehmender Ausdehnung stellt sich Riefung parallel der Verticale ein.

5. *L* 210; wurde als schmale spiegelnde Fläche nur einmal beobachtet, gab aber einen guten Reflex.

6. *o* 110; fast immer vorhanden, gewöhnlich parallel der Verticale ziemlich stark gerieft, nicht selten gefurcht; nur ausnahmsweise vollkommen glatt, stark glänzend und gut spiegelnd (Krystalle von

Příbram, Eusebgang); einigemal beobachtete ich eine sehr zarte horizontale Riefung in Folge oscillatorischer Combination mit zugehörigen Pyramiden. An Andreasberger Krystallen (Samson) stellt sich häufig eine Riefung parallel der Combinationskante mit ϱ 241 ein.

7. $\mathfrak{u}$ 350; nur einmal als gut reflectirende Fläche nachgewiesen.

8. U 120; nicht besonders selten aber gewöhnlich untergeordnet, schwach vertical gerieft.

9. π 130; nächst o 110 das häufigste Prisma aber nie besonders ausgedehnt, gewöhnlich zart gerieft aber auch häufig glatt, stets verlässliche Reflexe gebend; ist gleich o 110 Zwillingsfläche.

10. I 150; als schmale Fläche an 4 Příbramer Krystallen nachgewiesen.

11. i 190; von Dana ohne Neigungsverhältnisse, ohne Fundort und Provenienz angegeben.

12. i 1·11·0 von Schröder an Andreasberger Krystallen beobachtet.

13 und 14 $\beta^{1/2}$ 102 und $\beta^{2/3}$ 203; stets klein, erstere an Příbramer Krystallen etwas gerundet aber mit deutlichem Reflex.

15. β 101; gewöhnlich ziemlich entwickelt, vollkommen eben und intensiv spiegelnd, an einigen Příbramer Krystallen nebst der Grundpyramide corrodirt, während die übrigen Formen ziemlich intensiv glänzen und ebenflächig sind.

16. g 201; stets klein aber eben und gut spiegelnd. Wurde von Schröder an Andreasberger Krystallen als unsicher angegeben, später aber von Peters an einem Schemnitzer Krystall beobachtet.

17. G 301; nur an einem Krystall (Eusebgang, Příbram) aber sehr gut gebildet und ziemlich ausgedehnt beobachtet.

18—31. Die Zone der Brachydomen zeigt häufig eine der Zonenaxe parallele Riefung, die sich immer einstellt, wenn eine grössere Anzahl von hierher gehörigen Flächen an einem Krystall auftritt. Sind die Brachydomen in geringerer Anzahl aber grösser ausgebildet, pflegen sie spiegelglatt zu sein und liefern ganz ausgezeichnete Reflexe; dies gilt namentlich von t 023, k 011, d 021 und e 041, es sind dies die häufigsten Formen dieser Zone. $\mathfrak{a}$ 045, j 032, δ_1 071 δ_4 0·14·1 sind an Příbramer Stephaniten, α 013 an einem Krystalle von Řemišov nur einmal beobachtet worden; E 061 und δ_3 081 sind an je einem Krystall beider genannten Fundorte nachgewiesen worden; nicht häufig ist auch s 012.

32. *B* 916; kleine aber glänzende und gut spiegelnde Fläche, beiderseits von *g* 201 ausgebildet, nur an einem Krystall beobachtet. [*b p ξ B b′*] [*λ′ g B t λ‴*] [*o B ϰ′ o″*].

33. *τ* 512; an einem Přibramer Stephanit beiderseits ausgebildete, etwas matte Fläche. [*a τ ξ s a′*] [*o ζ τ g k′ o″*] [*o′ G τ p o‴*].

34. *A* 313; an einem Schemnitzer Krystall beiderseits von *β* 101 als schmale lebhaft glänzende Fläche entwickelt. [*c A ξ ζ λ*] [*b P A β b′*] [*a A m α a′*] [*λ g A t λ‴*] [*o′ A l ϰ o‴*].

35. *ξ* 312; gewöhnlich klein, jedoch gut messbar. [*c A ξ ζ λ*] [*b p ξ B b′*] [*o ψ ξ β k′ o″*] [*o g ξ d o‴*] [*a ξ h s a′*] [*ξ ψ l* a].

36. *ζ* 311; nicht selten, immer klein, mitunter matt. [*c A ξ ζ λ*] [*b Γ ζ G b′*] [*o ζ g d′ o″*] [*o′ ζ r e o‴*] [*a ζ P k a′*].

37. *Σ* 211; klein, matt, immerhin giebt aber die Fläche distincte Reflexe. [*c Σ L*] [*b r Σ g b′*] [*a Σ P k a′*] [*o Σ β k′ o″*] [*o′ G Σ p o‴*] [*Σ* p_2 *v*].

38. *φ* 535; schmale, glatte, gut reflectirende Fläche, symmetrisch zu *β* gelegen. [*c φ ψ*] [*b P φ β b′*] [*ξ φ l ω* a].

39. *ψ* 532; kleine, etwas rauhe Fläche. [*c φ ψ*] [*o ψ ξ β o″*] [*o′ ζ ψ e o‴*] [*λ ψ P t λ″*] [*π* r_2 *ψ g π″*].

40. q_1 115; sehr schmale Facette, gut spiegelnd, an einem einzigen Krystall in [*c P o*].

41. *q* 114; gewöhnlich nur sehr untergeordnet, an einem Joachimsthaler Zwilling aber ansehnlich ausgebildet. [*c q P o*] [*b ω q ω′ b′*].

42. *m* 113; eine der häufigsten Flächen, mitunter ansehnlich ausgedehnt, stets von vorzüglicher Beschaffenheit. [*c m P o*] [*b n f m b′*] [*I′ h′ m d I‴*] [*U′ P′ m k U‴*] [*o′* $\beta^{2/3}$ *m t o‴*] [*v‴* a *m φ′ r′*] [*β m s* ω_2''' *σ‴*] [*q′ m v*] [*m* h_1 *u*].

43. *h* 112; gleich der vorhergehenden eine der gewöhnlichsten Formen, stets ausgezeichnet messbar. [*c m h P o*] [*b v h* $\beta^{1/2}$ *b′*] [*a ξ h s a′*] [*I w u h I″*] [*o′ β h k o‴*] [*π′* $\beta^{2/3}$ *h d π‴*] [*λ′ g h t λ‴*] [*ζ′ h* a *f″ r‴*] [u *h K ϰ* u‴].

44. *l* 223; gewöhnlich parallel der Mittelkante gerieft und schmal. [*c h l P o*] [*a l t a′*] [*b u l* $\beta^{2/3}$ *b′*] [*o′ A l f ϰ o‴*] [*g l k u‴*].

45. *P* 111; die fast immer grösstentwickelte der Pyramiden, fast stets spiegelglatt und stark glänzend, selten schwach parallel der Mittelkante gerieft. [*c h P o*] [*b γ P β b′*] [*a Σ′ P k a′*] [*λ P t g′ λ″*] [*π P* $\beta^{2/3}$ *d′ π″*] [*U P* $\beta^{1/2}$ *k′ U″*] [*o′ g P d o‴*] [*e ε P*].

46. p_2 554; an zwei Přibramer Krystallen als schmale Fläche beobachtet. [*c P* p_2 *o*] [*Σ* p_2 *v*].

47. p_1 443; an einem einzigen Krystall vom selben Fundorte nachgewiesen. $[c\,P\,p_1\,o]$ $[U'\,g\,p_1\,e\,U''']$.

48. p 332; eine recht häufige aber selten etwas breitere Fläche. $[c\,F\,p\,o]$ $[b\,\chi\,p\,\xi\,b']$ $[a\,p\,v\,j\,a']$ $[\pi\,p\,\beta\,d'\,\pi'']$ $[o'\,G\,p\,\vartheta\,o''']$ $[\pi'\,g\,p\,E\,\pi''']$.

49. r 221; häufig, aber immer untergeordnet, gewöhnlich zart gerieft. $[c\,P\,r\,o]$ $[b\,\varrho\,r\,g\,b']$ $[a\,r\,R\,d\,a']$ $[U\,r\,\beta\,d'\,U'']$ $[o'\,r\,w\,e\,o''']$ $[r\,v\,\varkappa]$ $[r\,\Xi\,f\,a\,h''']$.

50. r_1 773; nur einmal als schmale Facette nachgewiesen. $[c\,P\,r_1\,o]$.

51. r_2 331; an zwei Krystallen beobachtet, schmal aber glänzend und recht gut messbar. $[c\,P\,r_2\,o]$ $[U\,r_2\,\Sigma\,P'\,U'']$ $[u\,r_2\,\xi\,A'\,u'']$ $[\pi\,F\,r_1\,g\,\pi'']$.

52. x 461; von Schröder an Andreasberger Krystallen beobachtet. $[o\,x\,w\,d\,o'']$ $[U\,x\,\beta\,d'\,U'']$.

53. h_1 356; an einem Příbramer Stephanit parallel der Combinationskante mit h fein gerieft beobachtet. $[c\,h_1\,\Xi\,y\,u]$ $[b\,v\,h_1\,\beta\,b']$ $[\lambda\,P\,h_1\,t\,\lambda'']$ $[o'\,A\,h_1\,\varkappa\,o''']$ $[m\,h_1\,u]$.

54. Ξ 354; einmal beobachtet, jedoch ziemlich gross und gut spiegelnd; parallel v zart gerieft. $[c\,\Xi\,\chi\,y\,u]$ $[o'\,g\,P\,\Xi\,d\,o''']$ $[h'\,\Xi\,R]$ $[r\,\Xi\,f\,a\,h''']$.

55. χ 352; von S c h r ö d e r beobachtet. $[c\,h_1\,\chi\,y\,u]$ $[b\,\chi\,p\,\xi\,b']$ $[o\,\chi\,v\,k\,o'']$ $[\pi\,\Gamma\,\chi\,P\,\beta^{2/3}\,d'\,\pi'']$ $[o'\,r\,\chi\,e\,o''']$.

56. y 351, gleichfalls von S c h r ö d e r nachgewiesen. $[c\,h_1\,\Xi\,y\,u]$ $[b\,\Gamma\,y\,G\,b']$ $[o\,y\,w\,d\,o'']$ $[U\,y\,P\,\beta^{1/2}\,U'']$.

57. F 591; an einem Krystall von Příbram gemessen, schmal, glänzend. $[o\,F\,\gamma\,e\,o'']$ $[U\,F\,P\,\beta^{1/2}\,U'']$ $[\pi\,F\,r_2\,g\,\pi'']$.

58. z 7·13·3; von S c h r ö d e r angegeben. $[o\,z\,w\,d\,o'']$.

59. H 122; an drei Příbramer Krystallen bestimmt, schmal, vollkommen eben und sehr gut spiegelnd. $[c\,H\,R\,\varrho\,U]$ $[b\,\vartheta\,H\,\beta^{1/2}\,b']$ $[a\,P\,H\,k\,a']$ $[d\,H\,l\,\beta]$ $[e\,H\,\beta^{2/3}]$.

60. u 243; von S c h r ö d e r bestimmt. $[c\,u\,R\,U]$ $[b\,u\,l\,\beta^{2/3}\,b']$ $[a\,p_1\,u\,\varkappa\,a']$ $[I\,w\,u\,h\,I'']$ $[o'\,g\,P\,u\,d\,o''']$.

61. R 121; kleine aber spiegelglatte Fläche; nur an einem Příbramer Krystall nachgewiesen. $[c\,R\,\varrho\,U]$ $[b\,R\,P\,\beta\,b']$ $[a\,r\,R\,d\,a']$ $[o\,R\,v\,k\,o'']$ $[o'\,G\,p\,R\,o''']$.

62. ϱ 241; eben und glänzend, nie besonders ausgedehnt. $[c\,R\,\varrho\,U]$ $[b\,\varrho\,r\,g\,b']$ $[a\,\varrho\,e\,a']$ $[o\,\varrho\,w\,d\,o'']$ $[\pi\,\varrho\,P\,\beta^{2/3}\,d'\,\pi'']$.

63. Γ 371; an Příbramer und Andreasberger Krystallen beobachtete recht ausgedehnte und sehr gut reflectirende Fläche. $[b\,\Gamma\,r_2\,G\,b']$ $[o\,\Gamma\,\gamma\,e\,o'']$ $[U\,\Gamma\,w\,k\,U'']$ $[u\,\Gamma\,W\,d\,u'']$.

64. σ 258; von Morton an Kongsberger Krystallen bestimmt. [β' m''' s ω_2 σ]

65. ω_1 5·15·27; nur an einem Krystall von Příbram beobachtet, klein aber vortrefflich spiegelnd. [c ω_1 f w π]

66—71. ω_2 135; ω 134; ω_3 3·9·11; ω_4 267; ω_5 3·9·10; ω_6 13·39·40; diese Flächen bilden einen der interessantesten Flächencomplexe des Stephanits, sie sind sämmtlich klein aber von tadelloser Beschaffenheit und geben ganz exakte Reflexe. Verwandelt man die angeführten Symbole in Naumann's Zeichen, so erhält man $^3/_5P\breve{3}$; $^3/_4P\breve{3}$; $^9/_{11}P\breve{3}$; $^6/_7P\breve{3}$; $^9/_{10}P\breve{3}$; $^{39}/_{40}P\breve{3}$. Die Coefficienten der Verticalaxe sämmtlicher aufgezählten Gestalten lassen sich, wie ersichtlich, allgemein ausdrücken durch $\frac{n}{n+1}$ oder $\frac{n}{n+2}$. Bringt man die Coefficienten der Verticalaxe von ω_2, ω, ω_5 und ω_6 auf den gemeinschaftlichen Nenner 40, so erhält man; $\frac{24}{40}$, $\frac{30}{40}$, $\frac{36}{40}$, $\frac{39}{40}$, es fehlen demnach $\frac{27}{40}$ und $\frac{33}{40}$ zu einer fünfgliedrigen arithmetischen Reihe. Der beobachtete Werth $\frac{9}{11} = \frac{34 \cdot 2\dot{8}5714\dot{}}{40}$ ist zwar dem angeführten $\frac{33}{40}$ ziemlich genähert und könnte man denselben wohl unbedenklich einsetzen, da der Unterschied der Neigung der beiden Formen zur Endfläche nicht ganz 13′ beträgt (3.9.11 : 001 = 32°23′26″; 11.33.40 : 001 = 32°36′29″) wenn die guten Messungen dies gestatten würden. Dass dies unstatthaft sei, scheint mir auch daraus hervorzugehen, dass eben die beiden Formen ω_3 3.9.11 und ω_4 267, also jene Gestalten, die der oben angegebenen Reihe nicht angehören, stets gleichzeitig an einem Krystall auftreten, überdiess aber auch die häufigsten unter den angeführten Vicinalflächen sind. Für die Realität der Fläche ω_4 267 spricht auch ihr Zonenverband, sie liegt ausser in [c ω π] auch in [P n_2 $\mathfrak{a}$ ω''']. ω 134 gehört folgenden Zonen: [c ω f π] [λ P ω t λ''] [o' β ω k o'''] [I' m ω K d I'''] [ξ φ l ω $\mathfrak{a}$]. ω_2 135 fällt in [c ω f π] [U $\beta^{1/2}$ ω_2 k U'''] [λ' g ω_2 t λ'''] [β' m''' s ω_2 σ].

72. f 133; eine recht häufige, selten grössere Fläche, gewöhnlich parallel zu k 011 zart gerieft. [c ω f π] [b f m b'] [a P f k a'] [π' h f d π'''] [o' A f $\varkappa$ o'''].

73. v 132; gleichfalls eine untergeordnete Form, stets glatt und gut reflectirend. [c ω f v π] [b T v $\beta^{1/2}$ b'] [a p v j a'] [o R v k o''] [o g v d o'''] [r v $\varkappa$] [q m v] [Σ p_2 v].

74. w 131; mitunter grösser entwickelt und stets gut spiegelnd. $[c\,\omega\,f\,w\,\pi]$ $[b\,\gamma\,w\,\beta\,b']$ $[o\,\varrho\,w\,d\,o'']$ $[o'\,r\,w\,e\,o''']$ $[U\,w\,T\,k\,U'']$ $[\mathfrak{u}\,w\,t_2\,\varkappa\,\mathfrak{u}'']$.

75. t_1 3 . 11 . 6; von G. vom Rath an einem Krystall aus Mexico beobachtet. $[b\,t_1\,h\beta^{1/2}\,b']$ $[o\,t_1\,n\,\varkappa\,o'']$ $[c\,t_1\,W]$.

76. W 3 . 11 . 3; nur an einem einzigen Přibramer Stephanit einerseits ausgebildet nachgewiesen, paralell b 010 zart gerieft. $[b\,\gamma\,W\,\beta\,b']$ $[\mathfrak{u}\,\Gamma\,W\,d\,\mathfrak{u}'']$ $[c\,t_1\,W]$.

77. T 142; mitunter recht gross und stets von ausgezeichneter Beschaffenheit. Diese Form bildet mit t_1 3.11.6 und t_2 3.13.6 eine arithmetische Gruppe; die Naumann'schen Zeichen, entsprechend umgeformt, lauten:

$$t_1 = \frac{11}{6}P\frac{\breve{11}}{3};\quad T = \frac{12}{6}P\frac{\breve{12}}{3};\quad t_2 = \frac{13}{6}P\frac{\breve{13}}{3}.$$

$[a\,r\,T\,d\,a']$ $[c\,T\,\mu]$ $[b\,T\,h\,\beta^{1/2}\,b']$ $[U\,w\,T\,k\,U'']$ $[U'\,P\,T\,U''']$.

78. μ 281; von Schröder beobachtet. $[b\,\mu\,\varrho\,g\,b']$ $[\pi\,\mu\,\gamma\,d\,\pi'']$ $[U\,\mu\,e\,U'']$ $[I\,\mu\,h\,d'\,I'']$.

79. t_2 3 . 13 . 9; kleine, aber gute Fläche an zwei Přibramer Krystallen. $[b\,t_2\,h\,\beta^{1/2}\,b']$ $[\mathfrak{u}\,w\,t_2\,\varkappa\,\mathfrak{u}'']$.

80. n_2 156; von Morton beobachtet. $[c\,n_2\,\gamma\,I]$ $[o'\,\beta\,n_2\,k\,o''']$ $[P\,\omega_4\,n_2\,\mathfrak{a}\,\omega''']$.

81. K 155; sehr gute, mitunter recht grosse Fläche. $[c\,K\,\gamma\,I]$ $[a\,P\,K\,k\,a']$ $[I'\,m\,K\,d\,I''']$ $[\mathfrak{u}'\,h\,K\,\varkappa\,\mathfrak{u}''']$.

82. n 153; eine Schröder'sche Form $[c\,K\,n\,I]$ $[b\,n\,f\,m\,b']$ $[U\,w\,n\,k\,U'']$ $[o'\,g\,P\,n\,d\,o''']$.

83. ϑ 152; kleine, etwas gewölbte Fläche, an zwei Přibramer Krystallen beobachtet und von Morton am Kongsberger Stephanit nachgewiesen. $[c\,n\,\vartheta\,I]$ $[b\,\vartheta\,h\,\beta^{1/2}\,b']$ $[o\,w\,\vartheta\,d\,o'']$ $[\pi\,\vartheta\,k\,\pi'']$ $[o'\,G\,p\,\delta\,o''']$.

84. γ 151; eine häufige, gut gebildete Fläche, oft parallel b 010 gerieft. $[c\,n\,\gamma\,I]$ $[b\,\gamma\,P\,\beta\,b']$ $[\pi\,\mu\,\gamma\,d\,\pi'']$ $[o\,I\,\gamma\,e\,o'']$.

85. η 3 . 15 . 1; an Krystallen von Andreasberg nachgewiesen. $[c\,n\,\gamma\,\eta\,I]$ $[b\,\eta\,y\,G\,b']$ $[\pi\,\eta\,E\,\pi'']$.

86 ν_4; von Lewis an einem Cornwaller Krystall beobachtet, gab 2 Reflexe, der eine führt auf das Symbol 4 . 21 . 13 während der andere 3 . 16 . 10 giebt Beiden Reflexen entsprechende Formen liegen in $[\mathfrak{u}\,\varkappa\,\mathfrak{u}'']$.

87. ν_1 172; von Schröder beobachtet. $[b\,\nu_1\,v\,\beta^{1/2}\,b']$ $[o\,\nu_1\,R'''\,p'''\,G'\,o'']$ $[\pi\,\nu_1\,d\,\beta^{2/3'}\,\pi'']$ $[o'\,r\,\nu_1\,e\,o''']$.

88. ν_2 193; gleichfalls eine Schröder'sche Form. $[c\,\nu_2\,\nu_3\,i_1]$ $[b\,\nu_2\,n\,m\,b']$ $[\pi\,\gamma\,\nu_2\,d\,\pi'']$.

89. ν_3 192; an einem Přibramer Krystall nachgewiesen, zwar schmal aber vollkommen spiegelnd. [$c\,\nu_2\,\nu_3\,i_1$] [$b\,\nu_3\,h\,\beta^{1/2}\,b'$] [$o\,\gamma\,\nu_3\,e\,o''$] [$I\,\nu_3\,d\,I''$] [$\pi'''\,E\,\nu_3\,\pi'$]

90. ε 2.22.7; an Krystallen von Andreasberg und Kongsberg. [$c\,\varepsilon\,i$] [$P\,\varepsilon\,e$]

An die im Vorstehenden aufgezählten Formen schliessen sich noch zwei Gestalten an, die nicht mit voller Sicherheit constatirt werden konnten; beide gehören der brachydiagonalen Zone von β 101 an. Die eine beobachtete Schröder an einem Andreasberger Krystall und giebt als wahrscheinliches Symbol derselben $212 = \overline{P2}$ an;[1]) der anderen kömmt vermuthlich das Zeichen $727 = \overline{P^7/_2}$ zu, sie wurde an einem Přibramer Krystall als sehr schmale Fläche beiderseits von β 101 constatirt, gab aber keinen Reflex und musste die Messung nur mit vorgesteckter Loupe am Beobachtungsrohre vorgenommen werden; dieselbe ergab im Mittel von drei Ablesungen

727 : 101 7°8′ (ber. 7°36½)
   : 111 17°47′ (ber. 17°15½)

In der nachfolgenden Tabelle sind die Normalen-Winkel sämmtlicher am Stephanit nachgewiesener Formen, deren Flächenpole sammt den wichtigsten Zonen sich in der Kugelprojection Taf. I verzeichnet finden, zu den gewöhnlich herrschenden Gestalten aus dem von mir ermittelten Axenverhältniss berechnet.

	$a = 100$	$b = 010$	$c = 001$	$P = 111$	$o = 110$	$k = 011$	$d = 021$
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
$a = 100$	—	90 0 0	90 0 0	48 3 50	32 10 32	90 0 0	90 0 0
$b = 010$	90 0 0	—	90 0 0	65 8 13	57 49 28	55 35 1	36 7 16
$c = 001$	90 0 0	90 0 0	—	52 8 40	90 0 0	34 24 59	53 52 44
$\lambda = 310$	11 50 58	78 9 22	90 0 0	42 14 14	20 19 54	83 20 18	80 27 24
$L = 210$	17 27 43	72 32 17	90 0 0	40 12 41	14 42 49	80 14 7	74 23 2
$o = 110$	32 10 32	57 49 28	90 0 0	37 51 20	—	72 29 1	64 31 22
$\mathfrak{u} = 350$	46 21 29	43 38 31	90 0 0	40 2 56	14 10 57	65 51 24	54 13 52
$U = 120$	51 31 28	38 28 32	90 0 0	41 50 38	19 20 56	63 44 16	50 46 26
$\pi = 130$	62 5 3	27 54 57	90 0 0	46 48 39	29 54 31	60 2 15	44 27 25
$I = 150$	72 21 53	17 38 7	90 0 0	52 54 13	40 11 21	57 24 32	39 39 47
$i_1 = 190$	79 59 4	10 0 56	90 0 0	57 58 34	47 48 32	56 10 47	37 18 4
$i = 1.11.0$	81 46 40	8 13 20	90 0 0	59 13 19	49 36 8	55 59 10	36 55 14

[1]) Die beobachteten Winkel werden nicht angeführt.

	$a = 100$	$b = 010$	$c = 001$	$P = 111$	$o = 110$	$k = 011$	$d = 021$
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
$\beta^{1}/_{2} = 102$	61 25 53	90 0 0	28 34 7	30 50 47	66 7 24	43 34 19	58 49 14
$\beta^{2}/_{3} = 203$	54 1 12	90 0 0	35 58 48	27 13 25	60 10 48	48 7 13	61 30 30
$\beta = 101$	42 33 37	90 0 0	47 26 23	24 51 47	51 25 55	56 5 4	66 30 8
$g = 201$	24 39 39	90 0 0	65 20 21	30 17 59	39 42 58	69 52 0	75 45 40
$G = 301$	17 1 7	90 0 0	72 58 53	35 3 2	35 58 1	76 1 49	80 3 53
$\alpha = 013$	90 0 0	77 8 8	12 51 52	46 13 15	83 11 27	21 33 7	41 0 52
$s = 012$	90 0 0	71 5 24	18 54 36	44 12 29	80 3 44	15 30 23	34 58 8
$t = 023$	90 0 0	65 27 3	24 32 57	42 52 16	77 13 4	9 52 2	29 19 47
$a = 045$	90 0 0	61 16 24	28 43 36	42 14 58	75 10 24	5 41 23	25 9 8
$k = 011$	90 0 0	55 35 1	34 24 59	41 56 10	72 29 1	—	19 27 45
$\varkappa = 043$	90 0 0	47 35 16	42 24 44	42 33 9	68 57 5	7 59 45	11 28 0
$j = 023$	90 0 0	44 13 1	45 46 59	43 10 19	67 33 49	11 22 0	8 5 45
$d = 021$	90 0 0	36 7 16	53 52 44	45 27 43	64 31 22	19 27 45	—
$e = 041$	90 0 0	20 4 47	69 57 13	52 44 59	59 59 0	35 32 14	16 4 29
$E = 061$	90 0 0	13 40 20	76 19 40	56 23 12	58 50 25	41 54 41	22 26 56
$\delta_1 = 071$	90 0 0	11 46 41	78 13 19	57 31 48	58 34 49	43 48 20	24 20 35
$\delta_2 = 0.15.2$	90 0 0	11 0 45	78 59 15	57 59 57	58 29 9	44 34 16	25 6 31
$\delta_3 = 081$	90 0 0	10 20 22	79 39 38	58 24 54	58 24 30	45 14 39	25 46 54
$\delta_4 = 0.14.1$	90 0 0	5 57 7	84 2 53	61 11 45	58 1 7	49 37 54	30 10 9
$B = 916$	31 38 20	86 35 17	58 35 20	23 57 37	41 12 33	62 22 53	69 11 17
$\tau = 512$	21 13 7	83 50 50	69 58 36	28 3 46	31 37 30	69 35 18	72 44 49
$A = 313$	43 17 10	81 13 9	48 3 14	16 4 55	45 46 43	50 22 45	58 50 44
$\xi = 312$	32 54 17	79 51 34	59 4 22	18 6 10	36 27 0	58 25 59	63 33 53
$\zeta = 311$	20 21 17	78 39 40	73 19 24	27 42 26	26 4 12	69 38 43	70 51 12
$\Sigma = 211$	29 5 55	74 2 46	66 20 52	18 57 55	27 37 49	60 54 5	62 42 39
$\varphi = 535$	44 47 38	74 27 42	49 20 7	9 19 29	41 59 6	46 27 4	53 5 34
$\psi = 532$	27 46 32	70 29 20	71 2 7	21 23 1	22 4 0	62 48 53	62 31 29
$q_1 = 115$	77 49 22	82 22 26	14 25 50	37 42 50	75 34 10	29 4 53	47 18 19
$q = 114$	74 58 44	80 36 56	17 49 50	34 18 50	72 10 10	28 39 34	46 8 26
$m = 113$	70 30 49	77 53 3	23 12 47	28 55 53	66 47 13	28 44 29	44 39 29
$h = 112$	62 44 46	73 15 20	32 45 12	19 23 28	57 14 48	31 3 36	43 14 26
$l = 223$	56 33 36	69 42 53	40 37 16	11 31 24	49 22 44	34 42 10	43 19 23
$P = 111$	48 3 50	65 8 13	52 8 40	—	37 51 20	41 56 10	45 27 42

	$a = 100$			$b = 010$			$c = 001$			$P = 111$			$o = 110$			$k = 011$			$d = 021$		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″	°	′	″
$p_2 = 554$	44	2	40	63	6	49	58	7	38	5	58	58	31	52	22	46	16	44	47	25	26
$p_1 = 443$	43	0	39	62	36	33	59	45	40	7	37	0	30	14	20	47	30	32	48	2	56
$p = 332$	41	16	39	61	46	59	62	36	31	10	27	51	27	23	29	49	42	6	49	13	19
$r = 221$	37	54	48	60	14	28	68	45	47	16	37	7	21	14	13	54	35	41	52	5	12
$r_1 = 773$	36	34	43	59	39	14	71	34	37	19	25	57	18	25	23	56	53	20	53	31	47
$r_2 = 331$	34	58	39	58	58	9	75	28	31	23	19	51	14	31	29	60	6	55	55	39	0
$x = 461$	44	9	50	47	23	34	80	31	17	30	6	21	14	36	26	58	46	8	49	54	56
$h_1 = 356$	64	41	32	63	22	10	38	16	20	15	37	5	53	5	27	25	42	39	34	25	13
$\Xi = 354$	58	11	12	56	26	37	49	48	10	11	14	32	42	13	8	32	20	35	34	12	24
$\chi = 352$	50	31	31	48	11	38	67	5	47	19	15	50	26	44	11	45	44	50	39	49	54
$y = 351$	47	31	39	44	55	29	78	4	19	28	51	20	18	26	39	55	12	7	46	4	41
$F = 591$	48	55	22	41	55	4	83	4	9	34	18	18	17	44	55	58	39	35	47	41	9
$z = 7.13.3$	50	57	17	42	36	24	75	38	47	28	2	44	22	18	5	51	38	45	42	13	17
$H = 122$	65	48	39	58	57	50	41	11	28	17	44	44	51	35	0	24	11	21	30	40	30
$u = 243$	61	48	28	53	31	36	49	24	14	15	12	20	44	14	23	29	13	1	30	15	24
$R = 121$	57	18	3	47	10	32	60	15	35	17	57	41	34	59	28	37	29	41	32	41	57
$\varrho = 241$	53	15	20	41	10	12	74	3	26	27	45	50	24	52	25	49	18	18	39	38	53
$\Gamma = 371$	56	18	8	35	27	58	80	13	21	35	10	14	25	24	9	53	5	58	40	42	41
$\sigma = 258$	75	56	57	67	33	3	26	54	17	29	32	5	65	52	4	17	55	11	33	28	23
$\omega_1 = 5.15.27$	79	19	34	69	32	18	23	18	16	33	27	12	69	56	40	17	12	32	34	32	6
$\omega_2 = 135$	78	36	38	68	6	59	24	56	55	32	19	18	68	33	13	16	32	13	33	19	34
$\omega = 134$	76	23	15	63	37	38	30	10	45	29	0	45	64	10	0	15	22	35	29	43	32
$\omega_3 = 3.9.11$	75	28	32	61	44	52	32	23	26	27	46	29	62	19	56	15	23	23	28	20	26
$\omega_4 = 267$	74	58	52	60	43	8	33	36	29	27	8	30	61	19	41	15	31	43	27	37	15
$\omega_5 = 3.9.10$	74	27	34	59	37	26	34	54	30	26	30	26	60	15	39	15	46	38	26	53	17
$\omega_6 = 13.19.40$	73	36	2	57	48	0	37	5	19	25	32	53	58	29	3	16	24	46	25	45	8
$f = 133$	73	19	45	57	13	5	37	47	18	25	16	13	57	55	3	16	40	15	25	24	52
$v = 132$	69	12	24	47	55	52	49	18	39	23	13	7	48	54	28	23	34	33	22	14	53
$w = 131$	64	31	35	35	43	52	66	43	56	29	24	21	37	13	11	38	18	22	27	18	13
$t_1 = 3.11.6$	71	15	58	42	11	31	53	51	15	27	21	58	48	12	40	25	7	47	18	52	56
$W = 3.11.3$	68	3	45	30	28	41	69	56	12	34	39	32	39	10	53	39	38	10	26	3	11

	$a = 100$	$b = 010$	$c = 001$	$P = 111$	$o = 110$	$k = 011$	$d = 021$
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
$T = 142$	72 12 15	39 43 29	55 51 18	29 17 56	48 4 2	26 8 21	17 47 45
$\mu = 281$	68 38 55	23 37 3	80 22 38	43 1 5	37 14 32	43 28 52	33 0 6
$t_2 = 3.16.6$	73 4 46	37 29 21	57 41 21	31 6 51	48 1 10	27 12 2	17 3 13
$n_2 = 156$	81 2 34	60 40 26	30 55 34	33 14 13	66 53 1	10 6 12	25 40 6
$K = 155$	79 48 50	56 12 0	35 42 48	31 45 0	63 31 4	10 11 10	21 52 29
$n = 153$	76 33 0	42 58 24	50 9 9	31 5 52	54 5 27	19 35 17	14 21 49
$\vartheta = 152$	74 38 55	33 36 52	60 54 33	34 22 2	48 7 19	29 20 1	16 24 4
$\gamma = 151$	73 1 57	23 20 40	74 27 14	41 47 33	42 36 39	42 15 56	25 53 21
$\eta = 3.15.1$	72 26 33	18 23 15	84 42 8	48 54 36	40 28 41	52 13 44	34 49 11
$\nu_4 = 4.21.13$	77 20 19	43 37 2	49 8 52	31 32 25	55 10 40	18 24 59	13 58 50
3·16·10	77 51 52	43 49 15	48 50 22	31 40 59	55 30 47	18 3 20	13 52 48
$\nu_1 = 172$	78 9 49	25 23 59	67 52 13	41 34 37	49 6 23	34 46 55	17 52 13
$\nu_2 = 193$	80 58 35	27 21 54	64 24 3	41 58 50	52 43 20	30 51 58	13 34 19
$\nu_3 = 192$	80 27 50	20 16 11	72 17 11	46 19 27	50 13 34	38 37 46	20 25 36
$\varepsilon = 2.22.7$	82 32 1	25 56 12	65 18 54	40 50 37	53 55 12	31 30 14	13 26 31

IV. Combinationstypus und Zwillingsverwachsungen.

Wie aus vorstehenden Tabellen ersichtlich, wird die Krystallreihe des Stephanit — sie umfasst 90 verschiedene einfache Formen — von keinem rhombisch krystallisirenden Minerale an Flächenreichthum überboten.

Nach meinen eigenen Beobachtungen, die sich auf mehr als hundert Krystalle stützen, kommt eine Pyramide als einfache Gestalt am Stephanit nicht vor, ebenso fehlen in der Literatur Angaben, welche dies bekräftigen würden. Recht mannigfaltig und mitunter sehr flächenreich sind jedoch die Combinationen, welche man an dieser interessanten Species zu beobachten Gelegenheit hat; an einem Přibramer Krystall konnte ich 31 einfache Gestalten nachweisen, die, mit der vollen Flächenzahl ausgebildet, 190 Flächen umfassen würden. Eine bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit der Stephanit-Combinationen besteht darin, dass selbst an einer Stufe selten mehrere Krystalle von

ganz gleicher Ausbildung zu finden sind, ebenso pflegen häufig einzelne, namentlich seltenere Formen, nur durch die eine oder die andere, selten durch alle von den Symmetrieverhältnissen geforderten Flächen representirt zu sein. Dass in diesem Falle keine Hemiëdrie vorliegt, beweist stets ihr regelloses Auftreten.

Die Typen der Combinationen bieten eine ziemliche Abwechselung dar und es ist mitunter schwierig bei der grossen Mannigfaltigkeit der letzteren, dieselben einem bestimmten Typus zuzuweisen. Im Allgemeinen lassen sich nachstehend aufgezählte Typen, die aber durch Uibergänge mit einander verknüpft sind, unterscheiden:

1. Tafeliger Typus, durch Vorherrschen der Basis — Freiberg, Joachimsthal.

2. Kurz- oder langsäulenförmiger Typus, durch Vorherrschen der Flächen der Vertical-Zone, namentlich *o* (110) und *b* (010). Die kurze Säule ist häufiger — Andreasberg, Přibram (Barbara-Euseb- und Kreuzkluftnergang), Ratibořic, Altwožic, Mexiko, — minder häufig sind die Krystalle nach der Verticale langgestreckt — Freiberg, Andreasberg, Přibram (Eusebgang), Řemišov, Altwožic, Kongsberg. —

3. Brachydomatischer Typus durch Herrschen von *k* (011) oder *d* (021) — Přibram, altes Vorkommen.

4. Pyramidaler Typus, bedingt durch grossgedehnte Flächen von *P* (111), seltener *h* (112). Dieser Typus übergeht, wenn die Flächen der Verticalzone breiter werden, in den kurzsäulenförmigen, wenn die Endfläche stark an Ausdehnung zunimmt, in den tafeligen Typus; durch Vorwalten flacher Pyramiden und Rundung der Flächen nehmen die Krystalle des pyramidalen Typus mitunter die Linsenform an. — Přibram (Fundgrubnergang), Joachimsthal. —

Die Zwillingsverwachsungen, denen zwei Gesetze zu Grunde liegen, sind am Stephanit fast ebenso häufige Erscheinungen, wie am Aragonit oder Cerussit, denen er in seinen Winkeln nahe steht; wirklich einfache Krystalle sind fast ebenso selten wie an den letztgenannten Mineralien.

Die schon längst bekannten, nach *o* 110 gebildeten Zwillinge bieten genau dieselben Verhältnisse, die an Aragonit-Krystallen beobachtet werden; theils sind zwei Individuen in hemitroper Stellung durch Juxtaposition in der Zwillingsebene oder normal zu derselben zu einem einfachen Zwilling verwachsen, oder es erscheint in der angegebenen Richtung in einem Krystall eine Zwillingslamelle eingeschaltet. Nicht selten legen sich an das Hauptindividuum nach beiden

Prismenflächen Zwillingsindividuen an, gegen die abermals weitere Krystalle in Zwillingstellung orientirt sind.

Die einzelnen Individuen penetriren häufig durch einander, wodurch Zwillingsgruppen ganz ähnlich jenen der Aragonite von Molina, Herrengrund etc. resultiren. Sind, wie dies namentlich an Příbramer Krystallen keine Seltenheit, einem Hauptindividuum nach beiden Säulenflächen sehr feine Zwillingslamellen eingeschaltet, erhalten wir eine naturgetreue Copie der bekannten Hořencer Aragonite.

Das zweite, seltenere Gesetz — Zwillingsfläche π 130 — habe ich zuerst am Stephanit von Příbram, später auch an Krystallen von Altwožic nachweisen können; es findet am Aragonit keine Analogie, wohl aber an dem mit letzterem isomorphen Bleicarbonat, an welchem Zwillinge nach der entsprechenden Fläche von Kokscharow, Schrauf, Sadebeck und Seligmann beschrieben wurden.

Die Mannigfaltigkeit der Verwachsung, welche die Zwillinge des ersten Gesetzes zeigen, vermissen wir hier ganz; gewöhnlich sind nur zwei Krystalle nach π 130 symmetrisch verwachsen, oder es ist eine mehr oder minder dicke Zwillingslamelle einem Krystall in der erwähnten Stellung eingeschoben.

Beide Zwillingsgesetze finden sich mitunter an einem Krystall verwirklicht, was namentlich dann, wenn die einzelnen Individuen durch einander penetriren, recht complicirte Zwillingsstöcke ergiebt

Nachstehend führe ich einige der wichtigeren Zwillingswinkel an; für das erste Gesetz ist $\bar{1}\bar{1}0$ Zwillingsfläche und die Flächen beider Individuen zu dieser symmetrisch signirt; dasselbe gilt vom zweiten Gesetze, wobei 130 als Zwillingsebene fungirt. (Dieser Annahme entspricht der Doppelzwilling Fig. 47).

1. Zwillingsstellung o {110}

b' $0\bar{1}0$: (b'_{I}) $0\bar{1}0$	64°	11′	4″
: (o'_{I}) $1\bar{1}0$	6	31	36
: (a'_{I}) 100	25	38	56
a 100 : (a_{I}) 100	115	38	56
: (o'_{I}) $1\bar{1}0$	83	28	24
o' $1\bar{1}0$: (o'_{I}) $1\bar{1}0$	51	17	52
: (o''_{I}) $\bar{1}\bar{1}0$	64	21	4
k 011 : (k_{I}) 011	35	1	59

d 021 : (d_I) 021	50°	57′	15″
P' $1\bar{1}1$: (P'_I) $1\bar{1}1$	39	58	8
P 111 : (P'_I) $1\bar{1}1$	83	52	20
: (k'_I) $0\bar{1}1$	41	56	10
: (d'_I) $0\bar{2}1$	45	27	42
k' $0\bar{1}1$: (P'_I) $1\bar{1}1$	18	15	53
d' $0\bar{2}1$: (P'_I) $1\bar{1}1$	5	29	29

2. *Zwillingstellung* π {130}

b 010 : (b'_{II}) $0\bar{1}0$	55°	49′	54″
(b'_{II}) $0\bar{1}0$: o 110	1	59	34
: a 100	34	10	6
a 100 : (a'_{II}) $\bar{1}00$	124	10	6
: (o'_{II}) $1\bar{1}0$	23	39	22
o' $1\bar{1}0$: (o'_{II}) $\bar{1}\bar{1}0$	8	31	10
o 110 : (o''_{II}) $\bar{1}\bar{1}0$	59	49	2
k 011 : (k_{II}) 011	59	55	31
k' $0\bar{1}1$: (k_{II}) 011	28	24	46
d 021 : (d_{II}) 021	91	5	10
d' $0\bar{2}1$: (d_{II}) 021	31	3	53
P' $1\bar{1}1$: (P'_{II}) $1\bar{1}1$	6	43	23
P 111 : (P'_{II}) $1\bar{1}1$	43	23	18
: (d'_{II}) $0\bar{2}1$	2	20	59
: (k'_{II}) $0\bar{1}1$	17	46	42

V. Stephanit-Krystalle nach den Fundorten.

Přibram.

Der Stephanit ist auf vielen Přibramer Erzgängen — man kennt ihn vom Adalbert-, Barbara-, Euseb-, Fundgrubner-, Johann-, Kreuzklüftner-, Maria-, Wenzel- und vom Wiedersinnischen Gang — keine besondere Seltenheit, wiewohl er an keinem der vorgenannten Gänge reichlich einbricht und sein Vorkommen gewöhnlich auf einzelne Krystalle oder stark verwachsene Gruppen, welche in Drusenräumen

anderer Mineralien — meist Galenit, Blende, Dolomit, Calcit und Pyrit — sitzen, beschränkt ist; nur selten bedecken Stephanit-Krystalle grössere Flächen und bilden selbständige kleine Drusen. Derb trifft man den Stephanit mit Fahlerz und Bournonit in Galenit und Blende eingesprengt. Die reichen Scheiderze, welche in neuester Zeit die Annagrube liefert, dürften ihres hohen Silberhaltes wegen auch Stephanit halten.

Die Grösse der Stephanit-Krystalle ist eine sehr verschiedene; einzelne prachtvolle Krystalle aus älterer Zeit, welche das böhmische Museum bewahrt, messen 2—3 cm. Höhe bei einer Dicke von mehr als 1·5 cm. Fragmente einzelner, polysynthetischer Krystalle vom Wenzlergange erreichen sogar 4 cm. Höhe und fast 2 cm. Dicke. Die bestgebildeten, meist sehr flächenreichen Individuen sind gewöhnlich kaum 3—5 mm. hoch und breit.

Paragenetisch gehört der Stephanit der Přibramer Gänge, wie schon A. E. Reuss nachgewiesen hat, sehr verschiedenen Bildungsperioden an.[1]) Nach dem Absatz der ältesten Gangmineralien — Blende I, Galenit I und Quarz I — erfolgte die Bildung der ersten Generation des Stephanit, mit dem sich gleichzeitig Pyrit ablagerte, worauf Calcit abgeschieden wurde, der mitunter die ganze Gangspalte erfüllt hat und die früher abgesetzten Mineralien überdeckt. Dieser ältesten Periode gehören die Stephanite vom Adalbertgange an. (Museum des Königreiches Böhmen, Sammlung des Dr. A. Wrany.)

Zur nahezu selben Zeit dürfte auch die Bildung der Stephanite vom Fundgrubner Gang erfolgt sein; an Handstücken vom 26. und 27. Lauf des genannten Ganges beobachtete ich folgende Succession der Gangmineralien: Grauwackenschiefer, milchweisser, derber Quarz mit eingesprengtem Pyrit und Arsenopyrit, Blende mit Arsenopyrit und Siderit, Blende krystallisirt, Siderit krystallisirt, Stephanit. Auf letzteren folgt jüngerer Quarz, Calcit und Dolomit. (Sammlung des Hofrath F. M. Ritter von Friese in Wien).

Ähnlich verhalten sich manche Stücke vom Eusebgang, die den Stephanit bereits auf den verhältnissmässig älteren Gangfüllungen sitzend und mit jüngerem Calcit z. Thl. überdeckt zeigen, dessgleichen auch Stufen vom Johanngang, die aber durch rosenrothen Dolomit gekennzeichnet sind. An anderen Stufen vom Euseb-Gange ist der Stephanit mit krystallisirtem Kalkspath gleichzeitig gebildet, vielleicht noch jünger als dieser. (Böhm. Museum, Werksammlung

[1]) Sitzber. d. Wiener Akad. d. Wiss. math. naturwiss. Cl. 1856. 22 Bd. 152 und 1863. 47 Bd. I. Abtlg. 20.

der Bergdirektion in Přibram). Am Eusebgang ist der Stephanit immer mit Pyrit und meistentheils mit Polybasit vergesellschaftet; letzterer pflegt in den Stephanitkrystallen entweder in gesetzmässiger oder regelloser Stellung eingewachsen zu sein.

Die in den Sammlungen reichlich vertretenen Stephanitstufen von Přibram stammen zum grössten Theil vom Barbaragang (12. Lauf, Anbruch 1858); sie sind sehr leicht kenntlich an den bekannten von Dolomit überdrusten, grossen älteren Baryten. Dieselben zeigen nachfolgende Mineralien-Abscheidungen: körniges Gemenge von Siderit und Galenit, oder ersterer allein mit spärlichen Galenitbrocken, älterer Baryt mit Dolomitkruste, Stephanitkrystalle und Pyrit. Auch hier ist Polybasit und zwar ein beständiger Begleiter des Stephanit, seine Tafeln sind mitunter so dünn, dass sie roth durchscheinen. Gesetzmässig habe ich den Polybasit in Stephanitkrystallen an Hand-Stücken von diesem Gange nicht wahrgenommen, einzelne abgebrochene Krystalle, die dem Typus nach dieser Fundstelle zu entstammen scheinen, zeigen aber die gleiche Verwachsung wie Eusebganger Stephanite. Viele Stephanite vom Barbaragang sind häufig stark corrodirt, ähnlich wie jene vom Wenzelgang, deren Dimensionen sie aber, abgesehen von grösseren polysynthetischen, zapfenförmigen Bildungen, nicht erreichen. Als jüngere Bildungen lagern auf Pyrit, Markasit, Silber und aus letzterem hervorgegangenes Glaserz. (Werksammlung Přibram, Böhm. Museum, Prager Universitäts-Sammlungen, Dr. Wrany).

Jüngerer Bildung als die Stephanite vom Barbaragang dürften jene von der Kreuzkluft (17—20. Lauf) sein; sie sitzen mit Pyrargyrit auf Drusen eines, wie es scheint, jüngeren Calcites als Dolomit I.

Die jüngsten Stephanitbildungen repräsentiren jene Krystalle, die auf Haar- und Drahtsilber sitzen, (Eusebgang 24.—27. Lauf.) das in, mit Steinmannit, jüngerem Quarz und Calcit ausgekleideten Drusenräumen aufgewachsen ist (Universität) oder jüngeren Baryt zur Unterlage hat.

An einem Stücke in böhm. Museum ist das Drathsilber ganz in ein Aggregat winziger Stephanitkryställchen übergangen.

An Stephaniten von Přibram habe ich nicht weniger als 68 Formen nachweisen können — im Ganzen sind an dieser Species 90 einfache Gestalten bekannt —, sie sind die flächenreichsten unter allen bisher untersuchten Vorkommen dieses Minerales. Die nachgewiesenen Formen finden sich in der im Vorhergehenden mitgetheilten Tabelle angeführt. Ebenso wie durch die grosse Anzahl der beobachteten Gestalten zeichnen sich die Přibramer Stephanite durch eine

grössere Manigfaltigkeit der Combinationen sowie durch wechselnden Habitus derselben aus; mit Ausnahme des tafeligen, sind alle früher aufgezählten Combinations-Typen vertreten. Von dieser Localität habe ich mehr als 60, z. Thl. ganz ausgezeichnete Krystalle untersucht, von denen ich im nachfolgenden die irgendwie bemerkenswerthen näher besprechen werde.

Das reiche Material, welches mir zur Verfügung stand, verdanke ich z. Thl. den Herren Hofrath F. M. Ritter von Friese in Wien, Hofrath E. Jarolímek in Příbram und Dr. A. Wrany in Prag, einen ansehnlichen Theil, namentlich ältere Vorkommen, entlehnte ich aus dem böhmischen Museum, die neueren Anbrüche habe ich gelegentlich wiederholter Besuche am Fundorte erworben.

Fig. 14. Säulenförmiger, 4 mm hoher und fast ebenso breiter Krystall (Barbaragang 12. Lauf) mit mehreren sehr dünnen Zwillingslamellen nach *o* 110 und z. Thl. corrodirten, mittelmässig reflectirenden Flächen:

o 110; *b* 010; *a* 100; *c* 001; *h* 112; *P* 111; *β* 101; *d* 021; *k* 011; *m* 113.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
b 010	: *o* 110	57°	49′	57°	49′	28″
c 001	: *m* 113	23	$14\frac{1}{2}$	23	12	47
	: *h* 112	32	44	32	45	12
	: *P* 111	52	$9\frac{3}{4}$	52	8	40
	: *o* 110	90	$0\frac{1}{2}$	90	0	0
	: *k′* $0\bar{1}1$	34	42	34	24	59
	: *d′* $0\bar{2}1$	53	35	53	52	44
	: *b′* $0\bar{1}0$	90	1	90	0	0
	: *β* 101	47	15	47	26	23
	: *a* 100	89	56	90	0	0
P′ $1\bar{1}1$	: *β* 101	24	59	24	51	47
	: *P* 111	49	49	49	43	44

Fig. 7. 6 mm hoher und 4 mm breiter säulenförmiger, einfacher Krystall (Barbaragang 12. Lauf); sämmtliche Flächen geben nur verschwommene Reflexe.

o 110; *b* 010; *P* 111; *β* 101; *m* 113; *h* 112; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *ω* 134.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
b 010	: *o* 110	57°	42′	57°	49′	28″
c 001	: *m* 113	23	13	23	12	47
	: *h* 112	32	48	32	45	12

	gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : *P* 111	52	10	52	8	40
b 010 : *d* 021	36	5	36	7	16
: *k* 011	55	37	55	35	1
: *t* 023	65	28	65	27	3
P 111 : *ω* 134	28	59	29	0	45
: *t* 023	42	48½	42	52	16
k 011 : *ω* 134	15	23	15	22	35
: *h* 112	30	59	31	3	36

Fig. 9. An beiden Polen ausgebildeter, verticalsäulenförmiger, nach 110 breitgedehnter Krystall (Eusebgang 18. Lauf), 6 mm hoch, 3 mm breit und 2 mm dick. Am unteren, nicht messbaren Pol sind zahlreiche Zwillingslamellen eingeschaltet.

o 110; *b* 010; *π* 130; *h* 112; *P* 111; *k* 011; *ϰ* 043; *d* 021; *e* 041; *ω* 134; *w* 131; *γ* 151; *β* 101.

	gem. (Mttl.)		gerechnet		
o 110 : *π* 130	29°	53′	29°	54′	31″
: *b* 010	57	54	57	49	28
: *P* 111	37	53	37	51	20
: *h* 112	57	14½	57	14	48
b 010 : *e* 041	20	0	20	2	47
: *d* 021	36	5	36	7	16
: *ϰ* 043	47	22	47	35	16
: *k* 011	55	34	55	35	1
k 011 : *ω* 134	15	26	15	22	35
: *h* 112	31	8	31	3	36
o 110 : *w* 131	37	7	37	13	11
: *d* 021	64	33	64	31	22
P 111 : *γ* 151	41	57	41	47	33
: *w* 131	29	28	29	24	28
: *P′* $1\bar{1}1$	49	40	49	43	44
: *b* 010	65	3	65	8	13

Fig. 6. Recht gut entwickelter, 5 mm hoher, 3½ mm breiter Krystall mit 2 dünnen Zwillingslamellen nach *o* 110 und sehr ausgedehnter Basis. Die Prismenzone gestattet ziemlich gute Messungen.

c 001; *o* 110; *b* 010; **U* 120; *π* 130; **I* 150; *P* 111; *h* 112; *ρ* 241; *k* 011; **j* 032, *d* 021.

	gem. (Mttl.)		gerechnet		
b 010 : *I* 150	17°	38¼	17°	38′	7″
: *π* 130	27	53¼	27	54	57

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
b 010 : *U*	120	38	27¼	38	28	32
: *o*	110	57	46¼	57	49	28
c 001 : *k*	011	34	19	34	24	59
: *j*	032	45	44	45	46	49
: *d*	021	53	55	53	52	44
ρ 241 : *π*	130	18	55	19	2	49
: *P*	111	27	54	27	45	50

Fig. 16. Kleines kaum 3 mm. hohes und 1·8 mm. breites Säulchen mit recht gut reflectirenden Flächen. Das Kryställchen stammt vom Eusebgang und war mit mehreren grösseren aber minder gut entwickelten Stephaniten auf einer Calcitdruse aufgewachsen.

o 110; *π* 130; *b* 010; *P* 111; *h* 112; *m* 113; *c* 001; *t* 023; *d* 021; *e* 041; *β* 101; *γ* 151; *ν_3 192.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
b 010 : *π*	130	27°	52′	27°	54′	57″
: *o*	110	57	51	57	49	28
c 001 : *β*	101	47	23	47	26	23
: *t*	023	24	34	24	32	57
: *d*	021	53	46	53	52	44
: *e*	041	69	51	69	57	13
: *m*	113	23	13¾	23	12	47
: *h*	112	32	48	32	45	12
: *P*	111	52	8½	52	8	40
o 110 : *γ*	151	42	38	42	36	39
: ν_3	192	50	13½	50	13	34
: *e*	041	60	3½	59	59	0

Fig. 29. Verticalsäulenförmiger, bunt angelaufener, 3·5 mm hoher und 3 mm breiter Krystall wahrscheinlich vom Johanngang; das Kryställchen hat eine reich entwickelte Brachydomen-Zone, die Flächen sind aber nicht besonders glänzend und gestatten keine scharfen Messungen. In der Verticalzone konnte wegen starker Riefung nur das Grundprisma neben den Pinakoiden constatirt werden.

o 110; *a* 100; *b* 010; *c* 001; *s* 012; *t* 023; *𝔞 045; *k* 011; *d* 021; *β* 101; *g* 201; *q* 114; *h* 112; *P* 111; *p* 332.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
b 010 : *o*	110	57°	40′	57°	49′	28″
: *a*	100	90	3	90	0	0
c 001 : *s*	012	18	53	18	54	36
: *t*	023	24	37½	24	32	57

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : *a*	045	28	46	28	43	36
: *k*	011	34	23½	34	24	59
: *d*	021	53	59	53	52	44
: *q*	114	18	23 *cca*	17	49	50
: *h*	112	32	13 „	32	45	12
: *P*	111	52	13 „	52	8	40
: *p*	332	62	44 „	62	36	31
: *β*	101	47	14 „	47	26	23
: *g*	201	65	44 „	65	20	21

Fig. 3. Beiderseits entwickeltes, z. Thl. aber mit anderen Individuen regellos verwachsenes 3 mm hohes 2 mm breites Kryställchen mit aufsitzenden, winzigen Pyritkörnchen (Eusebgang). Die Flächen sind durchwegs vorzüglich gebildet, und geben sehr gute Reflexe, nur von den ganz schmalen Flächen reflectirte Bilder sind etwas lichtschwach. An diesen Kryställchen sind die Pyramiden die Grundreihe und die brachydiagonale Zone recht flächenreich.

o 110; *b* 010; *c* 001; *s* 012; *t* 023; *k* 011; **j* 032; *d* 021; *e* 041; *β* 101; *ω* 134; *v* 132; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *p* 332; *r* 221.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
o 110 : *o'*	110	64°	21′	64°	21′	4″
: *b*	010	57	49	57	49	28
c 001 : *m*	113	23	14½	23	12	47
: *h*	112	32	46	32	45	12
: *P*	111	52	8½	52	8	40
: *p*	332	62	37	62	36	31
: *r*	221	68	48	68	45	47
: *s*	012	18	58	18	54	36
: *t*	023	24	36	24	32	57
: *k*	011	34	28	34	24	59
: *j*	032	45	38	45	46	59
: *d*	021	53	54	53	52	44
: *e*	041	69	57	69	57	13
o' 1$\bar{1}$0 : *β*	101	51	27½	51	25	55
: *h*	112	76	28½	76	27	23
k 011 : *ω*	134	15	22	15	22	35
: *v*	132	23	35	23	34	33
d 021 : *v*	132	22	13¾	22	14	53
ω 134 : *v*	132	19	7	19	7	54

Fig. 8. Flächenreiches, vollkommen einfaches Säulchen, 3 mm hoch, 1·5 mm breit, nur auf der vorderen Hälfte ausgebildet (Eusebgang); selbst die kleinsten Flächen geben befriedigende Reflexe; dessgleichen ist an diesem Kryställchen die Prismenzone recht gut messbar.

a 100; *λ* 310; *o* 110; **U* 120; *π* 130; *b* 010; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *p* 332; *r* 221; *d* 021: *e* 041; δ_3 081; *β* 101; *g* 201; *ξ* 312; *w* 131; *γ* 151.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
a 100	: *λ* 310	11°	54′ *cca*	11°	50′	38″
	: *o* 110	32	11	32	10	32
	: *U* 120	51	37 *cca*	51	31	28
	: *π* 130	62	11 „	62	5	3
	: *b* 010	90	0	90	0	0
	: *g* 201	24	40	24	39	39
	: *β* 101	42	33	42	33	37
o 110	: *r* 221	21	16	21	14	13
	: *p* 332	27	20	27	23	29
	: *P* 111	37	51½	37	51	20
	: *h* 112	57	16	57	14	48
	: *m* 113	66	46½	66	47	13
P 111	: *ξ* 312	18	6	18	6	10
	: *g* 201	30	19	30	17	59
	: *o′* 1$\bar{1}$0	69	59	70	0	57
	: *d* 021	45	30	45	27	43
b 010	: *γ* 151	23	25	23	20	40
	: *w* 131	35	47	35	43	52
	: *P* 111	65	9	65	8	13
	: *d* 021	35	56	36	7	16
	: *e* 041	20	4	20	2	47
	: δ_3 081	10	17	10	20	22

Fig. 11. Kleines, kurzsäulenförmiges, einfaches vorzüglich reflectirendes Kryställchen mit sehr ausgedehnten *P*-Flächen, bemerkungswerth wegen der zu *T* 142 vicinalen Form t_2 3.13.16; beide Gestalten bilden mit der vom Rath'schen Fläche t_1 3.11.6 eine arithmetische Reihe (Eusebgang).

o 110; *P* 111; *b* 010; *c* 001; *m* 113; *h* 112; *p_1 443; *p* 332; *r* 221; *r_1 773; *g* 201; *ξ* 311; *t* 023; *d* 021; *e* 041; *ω* 134; **K* 155; *T* 142; *t_2 3.13.6.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
b 010 : *o*	110	57°	50′	57°	49′	28″
o 110 : *o′*	$1\bar{1}0$	64	20	64	21	4
c 001 : *m*	113	23	13 3/4	23	12	47
: *h*	112	32	45 2/3	32	45	12
: *P*	111	52	8 1/2	52	8	40
: p_1	443	59	42 3/4	59	45	40
: *p*	332	62	32	62	36	31
: *r*	221	68	46	68	45	47
: r_1	773	71	33 3/4	71	34	37
: *t*	023	24	33	24	32	37
: *d*	021	53	51 1/2	53	52	44
: *e*	041	69	49	69	57	13
d 021 : *T*	142	17	47 1/2	17	47	45
: *r*	221	52	3 3/4	52	5	12
: t_2	3.13.6	17	3	17	3	13
b 010 : t_2	3.13.6	37	33	37	29	21
: *T*	142	39	43 1/2	39	43	29
: *h*	112	73	14	73	15	20
: *h′*	$\bar{1}12$	106	41	106	44	40
P 111 : *K*	155	31	45 1/2	41	45	0
K 155 : *K‴*	$\bar{1}55$	20	20 1/2	20	22	20
P 111 : *ζ*	311	27	24 *cca*	27	42	26
o 110 : *ζ*	311	26	4	26	4	12
: *g*	201	39	45 1/2	39	42	58
d 021 : *P*	111	45	22	45	27	43
: *o‴*	$\bar{1}10$	64	34	64	31	22

Fig. 17. Kleines, 1·5 mm hohes und ebensoviel breites, sehr flächenreiches Kryställchen von kurzsäulenförmigem Typus, beiderseits entwickelt. (Unbekannter Gang.) Die *λ*-Flächen 310, sonst immer nur untergeordnet, sind sehr breit, aber gleich *o* 110 stark gerieft, alle anderen Flächen spiegeln recht gut; die *P*-Flächen 111 sind einerseits sehr ausgedehnt.

c 001; *P* 111; *λ* 310; *b* 010; *o* 110; **U* 120; *π* 130; *a* 100; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *ω* 134; *T* 142; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *r* 221; *ξ* 312; *ζ* 311; *ϱ* 241.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
b 010 : *π*	130	27°	50′	27°	54′	57″
: *U*	120	38	29	38	28	32
: *o*	110	57	44 1/2	57	49	28

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
b 010 : *λ*	310	78	10	78	9	22
c 001 : *q*	114	18	4	17	49	50
: *m*	113	23	14	23	12	47
: *P*	111	52	$8^3/_4$	52	8	40
: *r*	221	68	$48^1/_2$	68	45	47
: *t*	023	24	$31^1/_2$	24	32	57
: *k*	011	34	$25^1/_2$	34	24	59
: *d*	021	53	$52^3/_4$	53	52	44
: *e*	041	69	$55^1/_2$	69	57	13
P 111 : *ξ*	311	27	27 *cca*	27	42	26
: *a*	100	48	$1^1/_2$	48	3	50
ω 134 : *ω‴*	$\bar{1}34$	27	37 *cca*	27	13	30
ϱ 241 : *U*	120	15	55	15	56	34
: *π*	130	19	$2^1/_2$	19	2	49
d 021 : *π*	130	44	$28^1/_2$	44	27	25
: *T*	142	17	$48^1/_4$	17	47	45
P 111 : *ω*	134	28	$59^1/_2$	29	0	45
: *t*	023	42	54	42	52	16

Fig. 10. stellt einen einfachen, sehr gut gebildeten kurzsäulenförmigen Krystall — 3 mm breit, 2 mm dick und 1·3 mm hoch — dar, dessen sämmtliche Flächen ausgezeichnet spiegeln. Sehr reich entwickelt ist an demselben die Zone der Grundpyramiden und jene der vicinalen Formen von *ω* 134. Der Krystall ist einer kleinen Druse durchwegs vorzüglicher Krystalle, die mit Pyrit auf krystallisirtem Calcit über einem körnigen Gemenge von Siderit, Galenit, Blende und Quarz sitzen, entnommen. (Eusebgang.)

c 001; *o* 110; *b* 010; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *p* 332; *r* 221; *r_2 331; *ω_2 135; *ω* 134; *ω_3 3.9.11; *ω_4 267; *ω_5 3.9.10; *T* 142; **K* 155; *β* 101; *g* 201; **G* 301; **B* 916; *ξ* 312; *ξ* 311; *λ* 310; **L* 210.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : *q*	114	17°	50′	17°	49′	50″
: *m*	113	23	12	23	12	47
: *h*	112	32	44	32	45	12
: *P*	111	52	9	52	8	40
: *p*	332	62	29	62	36	31
: *r*	221	68	$40^1/_2$	68	45	47
: r_2	331	75	$29^1/_2$	75	28	31
: *o*	110	90	0	90	0	0

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : ω_2	135	24	55	24	56	55
: ω	134	30	11¹/₃	30	10	45
: ω_3	3.9.11	32	22¹/₂	32	23	26
: ω_4	267	33	36³/₄	33	36	29
: ω_5	3.9.10	34	57¹/₂	34	54	30
: *K*	155	35	44	35	42	48
: *T*	142	55	52	55	51	18
K 155 : *k*	011	10	12	10	11	10
: *P*	111	31	44	31	45	0
P 111 : ξ	311	27	40¹/₂	27	42	26
: *a*	100	47	59 *cca*	48	3	50
d 021 : *T*	142	17	45¹/₂	17	47	45
: *r*	221	52	2	52	5	12
b 010 : *p*	332	61	42³/₄	61	46	49
: ξ	312	79	51	79	51	34
: *B*	916	86	35¹/₂	86	35	17
: *o*	110	57	50	57	49	28
: λ	310	78	6	78	9	22
: *L*	210	72	26	72	32	17
c 001 : β	101	47	23	47	26	23
: *g*	201	65	20¹/₂	65	20	21
: *G*	301	72	56	72	58	53

Fig. 27. Kurzsäulenförmiger 4¹/₂ mm l., 3 mm br., 3¹/₂ mm h. nur am linken Pol der Makrodiagonale ausgebildeter Krystall mit meist vorzüglichen Flächen. Nach 110 durchsetzt ihn eine papierdünne Zwillingslamelle. (Barbaragang.)

c 001; *t* 023; *k* 011; **j* 032; *d* 021; *b* 010; *m* 113; *h* 112 *P* 111; *o* 110; **I* 150; λ 310; *a* 100; β 101; *g* 201; *τ 512; ξ 311; *Σ 211; *ψ 532; γ 151.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
b' $0\bar{1}0$: *I*	$1\bar{5}0$	17°	41′	17°	38′	7″
: *o'*	$1\bar{1}0$	57	48	57	49	28
: λ'	$3\bar{1}0$	78	16	78	9	22
: *a'*	$\bar{1}00$	90	2	90	0	0
: γ'	$1\bar{5}1$	23	23	23	20	40
: *P'*	$1\bar{1}1$	65	9	65	8	13
: β	101	89	59	90	0	0
: *d'*	$0\bar{2}1$	36	7¹/₂	36	7	16
: *j'*	$0\bar{3}2$	44	6	44	13	1

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
b' $0\bar{1}0$: k'	$0\bar{1}1$	55	35½	55	35	1
: t'	$0\bar{2}3$	65	28	65	27	3
c 001 : m'	$1\bar{1}3$	23	13	23	12	47
: h'	$1\bar{1}2$	32	44½	32	45	12
: P'	$1\bar{1}1$	52	10½	52	8	40
P' $1\bar{1}1$: Σ'	$2\bar{1}1$	19	17 *cca*	18	57	55
: ζ'	$3\bar{1}1$	27	48	27	42	26
: k'	$0\bar{1}1$	41	55	41	56	10
o' $1\bar{1}0$: ψ'	$5\bar{3}2$	22	2	22	4	0
: Σ'	$2\bar{1}1$	27	31 *cca*	27	37	49
: ζ'	$3\bar{1}1$	26	1	26	4	12
: τ'	$5\bar{1}2$	31	40 *cca*	31	37	30
: g'	201	39	36 *cca*	39	12	58
: P	111	70	1	70	0	57

Fig. 23. Ein einfacher, 2·5 mm langer, 2 mm breiter und 2·5 mm hoher Krystall von pyramidalsäulenförmigem Habitus, nach einer Kante 001 : 111 lang gedehnt, theilweise auf der Unterseite ausgebildet. (Barbaragang.) Mit Ausnahme der *b*-Flächen 010 sind alle Flächen von tadelloser Beschaffenheit. Durch 101 und 112 setzt eine gegen die Verticale geneigte, sehr dünne Polybasit-Tafel hindurch.

c 001; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *b* 010; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *a* 100; *λ* 310; **U* 120; *π* 130; *β* 101; *g* 201; *ω* 134; **φ* 535; **Σ* 211; **ϑ* 152; *γ* 151; **Γ* 371.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : t	023	24°	33′	24°	32′	57″
: k	011	34	24¼	34	24	59
: d	021	53	52	53	52	44
: e	041	70	5	69	57	13
: m	113	23	12¾	23	12	47
: h	112	32	45½	32	45	12
: P	111	52	8⅔	52	8	40
b 010 : π	130	27	56½	27	54	57
: U	120	38	26	38	28	32
: o	110	57	48½	57	49	28
: λ	310	78	6	78	9	22
: a	100	90	1	90	0	0
: γ	151	23	20	23	20	40
: P	111	65	9	65	8	13
: β	101	90	0	90	0	0

		gem. (Mttl.)			gerechnet		
β 101 : *φ*	535	15	35		15	32	18
: *P*	111	24	56		24	51	47
a 100 : *β*	101	42	33½		42	33	37
: *g*	201	24	37½		24	39	39
o 110 : *Σ*	211	27	41		27	37	49
: *β*	101	51	24		51	25	55
: *h′*	$1\bar{1}2$	76	29		76	27	23
b 010 : *ϑ*	152	33	39½		33	36	52
: *h*	112	73	11		73	15	20
π 130 : *Γ*	371	11	42		11	38	24
Γ 371 : *P*	111	35	8½		35	10	14
: *h′*	$1\bar{1}2$	80	29½	*cca*	80	39	43
: *d′*	$0\bar{2}1$	123	44	„	123	54	9
Σ 211 : *a*	100	28	53½	„	29	5	55
: *P*	111	19	10	„	18	57	55
: *β*	101	23	55	„	23	48	6
ω 134 : *k*	011	15	24		15	22	35
: *h*	112	15	38½		15	41	1
: *β*	101	40	38½		40	42	39

Fig. 15. Ein von den gewöhnlichsten Formen begränzter Krystall von pyramidalem Habitus, 3 mm breit, 2½ mm hoch (Barbaragang). Sämmtliche Flächen sind nur mittelmässig; *o* 110 ist stark vertikal, *b* 010 horizontal gerieft, *β* 101 giebt undeutliche, verschwommene Reflexe; nach 110 durchsetzt den Krystall eine Zwillingslamelle.

c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *k* 011; *d* 021; *b* 010; *β* 101.

		gem. (Mttl.)			gerechnet		
c 001 : *m*	113	23°	12½′		23°	12′	47″
: *h*	112	32	44¼		32	45	12
: *P*	111	52	8		52	8	40
: *k*	011	34	36	*cca*	34	24	59
: *d*	021	53	56		53	52	44
P 111 : *β*	101	24	48½		24	51	47
: *d*	021	45	29½		45	27	43

Fig. 28. Ausgezeichneter, einfacher Krystall — 2·5 mm breit, 2 mm hoch von pyramidalem Typus; die Grundpyramide ist vorherrschend, die Basis und das Prisma sehr untergeordnet. (Fundgrubner Gang.)

P 111; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *l* 223; *p_2 554; *p* 332; *r* 221; *o* 110; *β* 101; *t* 023; *k* 011; *ϰ* 043; *d* 021; *e* 041; *ω_3 3.9.11; *ω_4 267; *v* 132; *T* 142.

		gemess. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : *q*	114	17°	48′	17°	49′	50″
: *m*	113	23	$12\frac{3}{4}$	23	12	47
: *h*	112	32	43	32	45	12
: *l*	223	40	37	40	37	16
: *P*	111	52	9	52	8	40
: p_2	554	58	4	58	7	38
: *p*	332	62	40	62	36	31
: *r*	221	68	46	68	45	47
: *o*	110	89	$55\frac{1}{2}$ *cca*	90	0	0
: *t*	023	24	31	24	32	57
: *k*	011	34	24	34	24	59
: *ϰ*	043	42	$25\frac{3}{4}$	41	24	44
: *d*	021	53	$51\frac{1}{4}$	53	52	44
: *e*	041	69	$51\frac{1}{2}$	69	57	13
P 111 : *T*	142	29	$17\frac{3}{4}$	29	17	56
d 021 : *T*	142	17	$48\frac{1}{2}$	17	47	45
T 142 : *T‴*	$\bar{1}42$	35	37	35	35	30
: *ϰ*	043	21	$6\frac{1}{2}$	21	4	6
ϰ 043 : ω_4	267	19	8	19	8	4
: *h*	112	35	25	35	23	20
m 113 : *T*	142	38	47	38	46	40
c 001 : ω_3	3.9.11	32	$23\frac{1}{2}$	32	23	26
: ω_4	267	33	$36\frac{1}{2}$	33	36	29
: *v*	132	49	22	49	18	39

Fig. 19. Kleines, kaum 2 mm breites und 1·5 mm hohes, einfaches Kryställchen von pyramidalem Typus, sehr flächenreich und ganz ausgezeichnet spiegelnd. (Fundgrubner Gang).

c 001; *m* 113; *h* 112; *l* 223; *P* 111; *p_2 554; *o* 110; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *b* 010; *β* 101; **K* 155; **H* 122; *w* 131; **W* 3.11.3; *T* 142; *ω_3 3.9.11; *ω_4 267.

		gemess. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : *m*	113	23°	$12'\frac{1}{2}$	23°	12′	47″
: *h*	112	32	45	32	45	12
: *l*	223	40	$33\frac{3}{4}$	40	37	16
: *P*	111	52	$7\frac{3}{4}$	52	8	40
: p_2	554	58	9	58	7	38

		gcm. (Mttl.)			gerechnet		
c 001 : *o*	110	90	$0^{1}/_{2}$		90	0	0
: *t*	023	24	20	*cca*	24	32	57
: *k*	011	34	13	„	34	24	59
: *d*	021	54	0	„	53	52	44
: *b*	010	90	3	„	90	0	0
P 111 : *H*	122	17	36		17	44	44
: *K*	155	31	46		31	45	0
: *k*	011	41	$56^{3}/_{4}$		41	56	10
: ω_4	267	27	$8^{1}/_{2}$		27	8	30
h 112 : ω_4	267	16	$14^{1}/_{2}$		16	15	28
: *K*	155	22	$27^{1}/_{2}$		22	27	57
P 111 : *T*	142	29	$16^{1}/_{2}$		29	17	56
T 142 : *K'''*	$\bar{1}55$	33	$58^{1}/_{2}$		33	56	51
: *h'''*	$\bar{1}12$	56	$33^{1}/_{2}$	*cca*	56	22	49
: ω_4'''	$\bar{2}67$	40	10		40	8	33
ω_4 267 : *m'''*	$\bar{1}13$	38	33		38	35	26
: *t*	023	16	8		16	6	10
P 111 : *β*	101	24	52		24	51	47
: *w*	131	29	29		29	24	21
: *W*	3.11.3	34	39		34	39	32
: *b*	010	65	15	*cca*	65	8	13
d 021 : *T*	142	17	42		17	47	45
: *W*	3.11.3	25	56		26	3	11
b 010 : *W*	3.11.3	30	27		30	28	41

Fig. 26. Flächenreicher, 5 mm hoher, 4 mm breiter Krystall mit vorwaltend ausgebildeten Pyramiden und Brachydonem und untergeordneter Verticalzone, mit einem zweiten, lamllaren Individuum nach $\bar{1}10$ verwachsen. (Barbaragang).

c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *s* 012; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *b* 010; *ω* 134; *v* 132; **Ξ* 354; *γ* 151; **Γ* 371; *F** 519; **Σ* 211.

		gemess. (Mttl.)			gerechnet		
c 001 : *m*	113	23°	9′	*cca*	23°	12′	47″
: *h*	112	32	$45^{2}/_{3}$		32	45	12
: *P*	111	52	$8^{1}/_{4}$		52	8	40
: *s*	012	18	47	*cca*	18	54	36
: *t*	023	24	31		24	32	57
: *k*	011	34	22		34	24	59
: *d*	021	53	52		53	52	44

			gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001	: *ω*	134	30	13	30	10	45
	: *v*	132	49	16½	49	18	39
	: *Γ*	371	80	14	80	13	21
k 011	: *ω*	134	15	25	15	22	35
	: *Σ'*	$\bar{2}11$	79	58	79	53	10
	: *o'*	$1\bar{1}0$	107	4 *cca*	107	30	59
	: *v'''*	$\bar{1}32$	23	31	23	34	33
	: *o'''*	$\bar{1}10$	72	29	72	29	1
P 111	: *Ξ*	354	11	9	11	14	32
	: *v*	132	23	19	23	13	7
	: *d*	021	45	25½	45	27	42
	: *o'''*	$\bar{1}10$	109	59½	109	54	4
d 021	: *v'''*	$\bar{1}32$	22	15	22	14	53
	: *Ξ'''*	$\bar{3}54$	34	12½	34	12	24
	: *P'''*	$\bar{1}11$	45	22¾	45	27	42
o 110	: *F*	591	17	45½	17	44	55
	: *Γ*	371	25	23½	25	24	9
	: *γ*	151	42	33	42	36	39
	: *e*	041	59	58	59	59	0
	: *b*	010	57	49	57	49	28
d 021	: (*P*)	111	5	30½	5	29	29

Fig. 21. Der flächenreichste unter allen untersuchten Stephanit-Krystallen; 31 einfache Formen participiren an dieser sehr flächenreichen Combination und gestalten sie fast zu einer Halbkugel. Von besonderem Interesse sind die in der Zone [*c π*] zahlreicher als an jedem anderen der gemessenen Krystalle auftretenden Vicinalformen. Trotz der Kleinheit, — der ganze Krystall ist 5 mm breit und 2¾ mm hoch — sind fast sämmtliche Flächen ganz vorzüglich und geben scharfe Reflexe. (Eusebgang.)

c 001; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *r* 221; *o* 110; *a* 100; *𝔲 350; **U* 120; *π* 130; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *b* 010; $\beta^{1}/_{2}$ 102; *β* 101; *ξ* 311; $*\omega_1$ 5.15.27; *ω* 134; $*\omega_4$ 267; $*\omega_5$ 3.9.10; $*\omega_6$ 13.39.40; *f* 133; *w* 131; **K* 155; **H* 122; $*h_1$ 356; *T* 142; $*t_2$ 3.13.6.

			gemess. (Mttl.)		gerechnet		
b 010	: *π*	130	27°	56'½	27°	54'	57"
	: *U*	120	38	29	38	28	32
	: 𝔲	350	43	39	43	38	31
	: *a*	100	90	8 *cca*	90	0	0
c 001	: *q*	114	17	50⅓	17	49	50

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : *m*	113	25	$11^{1}/_{3}$	23	12	47
: *h*	112	33	$45^{3}/_{4}$	92	45	12
: *P*	111	52	9	52	8	40
: *r*	221	68	45	68	45	47
: *t*	023	24	34	24	32	57
: *k*	011	34	$25^{1}/_{2}$	34	24	59
: *d*	021	53	53	53	52	44
: *e*	041	69	50 *cca*	69	57	13
: *b*	010	90	$0^{1}/_{2}$	90	0	0
: $\beta^{1}/_{2}$	102	28	31	28	34	7
: β	101	47	$27^{1}/_{2}$	47	26	23
: ω_1	5.15.27	23	13	23	18	16
: ω	134	30	11	30	10	45
: ω_4	267	33	$36^{1}/_{3}$	33	36	29
: ω_5	3.9.10	34	48	34	54	30
: ω_6	13.39.40	37	8	37	5	19
: *f*	133	37	$45^{1}/_{4}$	37	47	18
: *w*	131	66	42	66	43	56
: π	130	84	$59^{1}/_{2}$	90	0	0
P 111 : *H*	122	17	44	17	44	44
: *f*	133	25	19	25	16	3
: *K*	155	31	51	31	45	0
: *k*	011	41	59	41	56	10
: ξ	311	27	$43^{1}/_{2}$	27	42	26
d 021 : *T*	142	17	$50^{1}/_{2}$	17	47	45
: *r*	221	52	$4^{1}/_{2}$	52	5	12
b 010 : t_2	3.13.6	37	30	37	29	21
: *T*	142	39	43	39	43	29
: *H*	122	58	56	58	57	50
: h_1	356	63	28	63	22	10
: *h*	112	73	11	73	15	20
: *h'*	$1\bar{1}2$	106	42	106	44	40
: *H'*	$1\bar{2}2$	120	59	121	2	10

Fig. 24. Ein 4 mm. breiter, 3 mm langer und $1^{1}/_{2}$ mm hoher, einfacher Krystall mit stark ausgedehnter Endfläche und ziemlich gross entwickelter Vicinalfläche ω_4 267. Sämmtliche Flächen, die Brachydomen ausgenommen, reflectiren sehr gut. (Fundgrubner Gang.)

c 001; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *p* 332; *o* 110; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *b* 010; *ω_3 3.9.11; *ω_4 267; *v* 132; *w* 131; **R* 121; ϱ 241; **K* 155.

		gemess. (Mttl.)	gerechnet
c 001 : *q*	114	17° 49′ 3/4	17° 49′ 50″
: *m*	113	23 12 1/2	23 12 47
: *h*	112	32 44	32 45 12
: *P*	111	52 8 3/4	52 8 40
: *p*	332	62 30 *cca*	62 36 31
: *t*	023	24 31 „	24 32 57
: *k*	011	34 21 „	34 24 59
: *d*	021	53 58 „	53 52 44
: *b*	010	89 59	90 0 0
: ω_3	3.9.11	32 23 1/2	32 23 26
: ω_4	267	33 34 3/4	33 36 29
: *v*	132	49 25	49 18 39
: *w*	131	66 48 1/2	66 43 56
d 021 : *o*	110	64 22 *cca*	64 31 22
: *ϱ*	241	39 32	39 38 53
: *w*	131	27 17	27 18 13
: *P*	111	45 28 1/2	45 27 42
o 110 : *R*	121	35 3	34 59 28
: *v*	132	48 58 1/2	48 54 28
: *k*	011	72 36 *cca*	72 29 1
c 001 : *R*	121	60 15	60 15 35
: *ϱ*	241	74 0	74 3 26
P 111 : ω_4	267	27 10	27 8 30
: *v*	132	23 21 *cca*	23 13 7
ω_4 267 : *h*	112	16 13	16 15 28
: *k*	011	15 34	15 31 43
P 111 : *K*	155	31 51 *cca*	31 45 0
: *k*	011	41 58	41 56 10
ω_3 3.9.11 : *t*	023	15 16	15 13 48

Fig. 30. Kleiner, 3 mm langer, 1 1/2 mm breiter und 2 mm hoher Krystall, von rein pyramidalem Typus, nach einer Kante 001 : 110 lang gedehnt. Die Flächen der Verticalzone fehlen ganz, *ω* 134 ist recht gross entwickelt. Der Krystall reflectirt sehr gut. (Barbaragang).

c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *ω* 134; *β* 101.

		gem. (Mttl.)	gerechnet
c 001 : *m*	113	23° 13 1/2	23° 12′ 47″
: *h*	112	32 44 1/2	32 45 12
: *P*	111	52 8 3/4	52 8 40

	gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : *t* 023	24	33	24	32	57
: *k* 011	34	23½	34	24	59
: *d* 021	53	54	53	52	44
: *β* 101	47	26	47	26	23
: *ω* 134	30	11	30	10	45
P 111 : *β* 101	24	52¼	24	51	47
k 011 : *ω* 134	15	21½	15	22	35
: *h* 112	31	1⅔	31	3	36

Fig. 31. Brachydiagonal-säulenförmiger; 3 mm langer, 1½ mm dicker, fast ringsum entwickelter Krystall mit ziemlich guten Flächen; zwei dünne Zwillingslamellen durchsetzen denselben nach *o* 110. (Johanngang).

c 001; *s* 012; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; **E* 061; *q_1 115; *m* 113; *h* 112; *l* 223; *P* 111; *r* 221; *r_2 331; *o* 110; *a* 100; *β* 101; **H* 122; *f* 133; *ϱ* 241; *w* 131; **ϑ* 152; *π* 130.

	gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : *s* 012	18°	54′	18°	54′	36″
: *t* 023	24	32½	24	32	57
: *k* 011	34	25½	34	24	59
: *d* 021	53	51½	53	52	44
: *e* 041	69	49 *cca*	69	57	13
: *E* 061	75	16	75	19	40
: q_1 115	14	19½	14	25	50
: *m* 113	23	13	23	12	47
: *h* 112	32	46½	32	45	12
: *l* 223	40	30	40	37	16
: *P* 111	52	9½	52	8	40
: *r* 221	68	45	68	45	47
: r_2 331	75	22	75	28	31
: *β* 101	47	24	47	26	23
a 100 : *β* 101	42	38	42	33	37
c 001 : *H* 122	41	11¾	41	11	28
: *ϱ* 241	74	4	74	3	26
: *f* 133	37	51	37	47	18
: *w* 131	56	45½	66	43	56
d 021 : *P* 111	45	32	45	27	42
: *ϑ* 152	16	16	16	24	4
: *w* 131	27	17	27	18	13
: *ϱ* 241	39	40	39	38	53

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
P 111 : *a*	100	48	2	48	3	55
: *H*	122	17	45	17	44	44
: *f*	133	25	17	25	16	13
: *k*	011	41	58	41	56	10

Fig 32. Einfacher, brachydiagonal säulenförmiger Krystall 3½ mm lang, 2 mm breit, an beiden Polen der Brachydiagonale ausgebildet. (Johanngang.)

c 001; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *l* 223; *P* 111; *r* 221; *o* 110; *β* 101; *π* 130; **l* 150; *ω* 134; *f* 133; *w* 131; *ϱ* 241.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
o 110 : *o'*	$1\bar{1}0$	64°	22'	64°	21'	4"
: *π*	130	29	56	29	54	57
: *l*	150	39	53½ *cca*	40	11	21
c 001 : *q*	114	17	50	17	49	50
: *m*	113	23	11	23	12	47
: *h*	112	32	45¾	32	45	12
: *l*	223	40	41	40	37	16
: *P*	111	52	10	52	8	40
: *ω*	134	30	10	30	10	45
: *w*	131	66	47	66	43	56
: *π*	130	89	57	90	0	0
: *t*	023	24	34	34	24	57
: *k*	011	34	26	24	32	59
: *d*	021	53	53	53	52	44
: *e*	041	70	0	69	57	13
d 021 : *w*	131	27	18¾	27	18	13
: *ϱ*	241	39	28 *cca*	39	38	53
: *o*	110	64	30	64	31	22
P 111 : *ϱ*	241	27	43¾	27	45	50
: *π*	130	46	51	46	48	39
: *h'*	$1\bar{1}2$	45	30¼	45	29	29
: *d'*	$0\bar{2}1$	88	46	88	43	55
k 011 : *ω*	134	15	21	15	22	35
: *h*	112	31	2½	31	3	36

Fig. 38. Kleiner, kurzsäulenförmiger, symmetrischer Zwilling nach *o* 110, 4 mm breit 1½ mm hoch[1]). Fast alle Flächen spiegeln nur

[1]) Sämmtliche Zwillinge sind der leichteren Orientirung wegen horizontal projicirt, die meisten der Ausbildung des Krystalls entsprechend entworfen.

mittelmässig, daher die Messungsresultate nur approximativ. (Kreuzklüftner Gang).

c 001; *h* 112; *l* 223; *P* 111; *r* 221; *o* 110; *β* ½ 102; *β* 101; *a* 100; *λ* 310; *π* 130; *b* 010; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
o 110 : (*o*)	110	51°	21′½	51°	17′	52″
: *a*	100	32	10½	32	10	32
a 100 : *λ*	310	11	56	11	50	38
: *π*	130	62	3½	62	5	3
c 001 : *h*	112	32	47	32	45	12
: *l*	223	40	30	40	37	16
: *P*	111	52	8	52	8	40
: *r*	221	69	5	68	45	47
: *o*	110	89	59	90	0	0
: *β* ½	102	28	27	28	34	7
: *β*	101	47	23	47	26	23
: *t*	023	24	38	24	32	57
: *k*	011	33	59	34	24	59
: *d*	021	53	46	53	52	44
: *e*	042	69	46	69	57	13
: *b*	010	90	0½	90	0	0
P 111 : *β*	101	24	53	24	51	47
: (*P*)	111	40	0½	39	58	8
a 100 : (*a*)	100	115	37	115	38	56
β 101 : (*β*)	101	77	12	77	8	10

Fig. 41. Sehr kleiner — 1½ mm hoher, ¾ mm dicker — nach *o* 110 tafelig ausgebildeter Zwilling mit spiegelglatten Flächen in der Prismenzone und ausgedehnter Basis; die Pyramiden und Domen bilden nur ganz schmale Facetten, die auf dieselben bezüglichen Messungen sind nur approximativ. An das Hauptindividuum ist nach $\bar{1}10$ ein zweites verbrochenes Individuum angefügt. (Unbekannter Gang.)

c 001; *o* 110; *b* 010; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *t* 023; *k* 011; *ϰ* 043; *d* 021; *e* 041; *w* 131.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
o 110 : *b*	010	57°	47′½	57°	49′	28″
c 001 . *q*	114	17	44	17	49	50
: *m*	113	23	9	23	12	47
: *h*	112	32	48	32	45	12
: *P*	111	52	6	52	8	40

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : *t*	023	24	30	24	32	57
: *k*	011	34	28½	34	24	59
: *ϰ*	043	42	31	42	24	44
: *d*	021	53	51	53	52	44
: *e*	041	70	4	69	57	13
: *b*	010	90	0½	90	0	0
b' 0$\bar{1}$0 : *w''*	$\bar{1}$31	35	42	35	43	52
P 111 : *w*	131	29	26¼	29	24	21
b' 010 : (b'_I)	0$\bar{1}$0	64	20½	64	21	4
: (b'_{II})	0$\bar{1}$0	64	19	64	21	4
d' 0$\bar{2}$1 : (d'_I)	0$\bar{2}$1	56	1	55	57	16

Fig. 45. Sehr schöner, 4 mm langer, 3 mm breiter und hoher Drilling von kurzsäulenförmigem Habitus nach *o* 110, an beiden Enden der Verticalaxe ausgebildet, jedoch auf dem unteren Pol und rechter Seite mit einem grösseren Individuum regellos verwachsen. (Eusebgang).

c 001; *m* 113; *h* 112; *l* 223; *P* 111; *p* 332; *r* 221; *o* 110; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *b* 010; *β* 101; *ξ* 312; *f* 133; *v* 132; *w* 131; *π* 130; **I* 150; *a* 100.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : *m*	113	23°	15′	23°	12′	47″
: *h*	112	32	45¾	32	45	12
: *l*	223	40	39⅓	40	37	16
: *P*	111	52	9	52	8	40
: *r*	221	68	49	68	45	47
: *o*	110	90	0⅓	90	0	0
: *t*	023	24	36	24	32	57
: *k*	011	34	25	34	24	59
: *d*	021	53	53½	53	52	44
: *e*	041	69	50	69	57	13
: *β*	101	47	26	47	26	23
: *f*	133	37	42	37	47	18
: *v*	132	49	16½	49	18	39
: *w*	131	66	42½	66	43	56
: *π*	130	89	59½	90	0	0
: *ξ*	312	59	7	59	4	22
o 110 : *ξ*	312	36	24	36	27	0
: *β*	101	51	22	51	25	55
: *h'*	1$\bar{1}$2	76	24	76	27	23

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
o 110 :	k' $0\bar{1}1$	107	23	107	20	59
:	(β_{I}) 101	77	10½	77	8	10
o' $1\bar{1}0$:	ξ 312	51	55	51	54	47
:	P 111	70	1	70	0	57
:	v 132	93	15	93	14	4
:	(P_{II}) 111	110	10 *cca*	109	59	5
(o_{I}) 110 :	d' $0\bar{2}1$	64	34	64	31	22
:	(P'_{I}) $1\bar{1}1$	70	2	70	0	57
:	P' $1\bar{1}1$	110	0	109	59	5
:	β 101	128	36	128	34	5
:	ξ 312	143	26	143	33	0
:	o 110	180	0	180	0	0
(P'_{I}) $1\bar{1}1$:	d' $0\bar{2}1$	5	28	5	29	29
t 023 :	(t_{II}) 023	25	27	25	21	49
v 132 :	(P_{II}) 111	16	50	16	45	23
w 131 :	(P_{II}) 111	23	24	23	23	36
(o'_{I}) $1\bar{1}0$:	b' $0\bar{1}0$	6	28	6	31	36
(o_{I}) 110 :	b' $0\bar{1}0$	57	50½	57	49	28
b' $0\bar{1}0$:	l' $1\bar{5}0$	17	25	17	38	7
:	o' $1\bar{1}0$	57	49	57	49	28
:	a 110	89	59¼	90	0	0

Fig. 46. Nach *b* 010 dicktafeliger, polysynthetischer Krystall — 7 mm lang, 4 mm breit, 5 mm hoch — nach beiden Flächen von *o* 110 durchsetzt denselben eine Unzahl dünner Zwillingslamellen, die auf der Endfläche eine damascirte Zeichnung auf den Flächen der Verticalzone eine ungewöhnlich starke Riefung hervorbringen. Die Reflexe mit Ausnahme der Brachydomen sind durchwegs sehr unverlässlich. (Gang unbekannt).

c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *β* 101; *b* 010; *o* 110.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 :	*m* 113	23°	6′	23°	12′	47″
:	*h* 112	32	40	32	45	12
:	*P* 111	51	23	52	8	40
:	*o* 110	89	52	90	0	0
:	*t* 023	24	32	24	32	57
:	*k* 011	34	25	34	24	59
:	*d* 021	53	53	53	52	44
:	*b* 010	90	1	90	0	0

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
β 101 :	*h* 112	25	30	25	1	28
:	*o'* $1\bar{1}0$	51	20	51	25	55

Fig. 48. Ein ausgezeichneter, an beiden Polen der Verticalaxe ausgebildeter, 6 mm hoher, 4 mm breiter Krystall mit z. Thl. tadellosen Flächen; in demselben ist eine ziemlich breite Zwillingslamelle nach π 130 eingeschaltet. (Eusebgang).

c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *r* 221; *o* 110; *t* 023; *k* 011; *d* 021; $*\delta_4$ 0.14.1; *b* 010; ω 134; $*\omega_5$ 3.9.10; *f* 133; *w* 121; β 101; λ 310.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
b' $0\bar{1}0$:	*o'* $1\bar{1}0$	57°	49'	57°	49'	28"
:	(*o'*) $1\bar{1}0$	66	17½	66	20	38
o' $1\bar{1}0$:	(*o'*) $1\bar{1}0$	8	28	8	31	10
:	λ' $3\bar{1}0$	20	18	20	19	54
λ 310 :	λ' $\bar{3}10$	23	40	23	41	16
c 001 :	*m* 113	23	12	23	12	47
:	*h* 112	32	46	32	45	12
:	*P* 111	52	9	52	8	40
:	*r* 221	68	53	68	45	47
:	*o* 110	90	0	90	0	0
:	*t'* $0\bar{2}3$	24	32½	24	32	57
:	*k'* $0\bar{1}1$	34	24⅕	34	24	59
:	*d'* $0\bar{2}1$	53	52	53	52	44
:	δ'_4 $0.\overline{14}.1$	84	5½	84	2	53
:	ω 134	30	10¾	30	10	45
:	ω_5 3.9.10	34	55½	34	54	34
:	*f* 133	37	48	37	47	18
:	*w* 131	66	40	66	43	56
d' $0\bar{2}1$:	ω' $1\bar{3}4$	29	45½	29	43	32
:	*m'* $1\bar{1}3$	44	40	44	39	29
o' $1\bar{1}0$:	*k'* $0\bar{1}1$	72	30	72	29	1
k' $0\bar{1}1$:	ω'' $\overline{13}4$	15	22	15	22	35
o' $1\bar{1}0$:	β 101	51	30	51	25	55
P 111 :	*w* 131	29	26	29	24	21
:	ω 134	29	1	29	0	45
h' $1\bar{1}2$:	(*h'*) $1\bar{1}2$	4	35	4	36	20
P' $1\bar{1}1$:	(*P'*) $1\bar{1}1$	6	44	6	43	23
P 111 :	(*h'*) $1\bar{1}2$	40	54	40	53	10
:	*h'* $1\bar{1}2$	45	30	45	29	29
:	*d'* $0\bar{2}1$	88	38	88	43	55

Fig. 47. Einer der schönsten und bestgebildeten Krystalle, 4 mm breit, 3 mm hoch. Alle etwas mehr ausgedehnten Flächen gaben ganz scharfe Signalreflexe auch jene in der fast stets mehr oder minder stark gerieften Prismenzone nicht ausgenommen; die ganz kleinen und schmalen Flächen gaben zwar ein lichtschwaches, aber immerhin deutliches Bild und gestatteten ganz sichere Einstellungen. Der Krystall ist ein Doppelzwilling; an das normal gestellte Individuum ist nach *o″* $1\bar{1}0$ ein Zwillings-Individuum nach dem ersten Gesetze, nach *π* 130 ein zweites nach dem zweiten Gesetze angewachsen. (Johanngang.)

c 001; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *r* 221; *s* 012; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *b* 010; *o* 110; *π* 130; *λ* 310; *a* 100; $\beta^1/_2$ 102; *β* 101; *ω* 134; *w* 131; *T* 142.

				gem. (Mttl.)		gerechnet		
o	110 :	*λ*	310	20°	$19^1/_2$	20°	19′	54″
	:	*a*	100	32	10	32	10	32
	:	*o′*	$1\bar{1}0$	64	22	64	21	4
λ	310 :	*a*	100	11	$50^3/_4$	11	50	38
o	110 :	*π*	130	29	$54^1/_2$	29	54	31
b	010 :	*π*	130	27	$55^1/_2$	27	54	57
(o'_{I})	$1\bar{1}0$:	*π′*	$1\bar{3}0$	21	$27^1/_2$	21	23	21
o′	$1\bar{1}0$:	(π'_{II})	$1\bar{3}0$	38	$19^3/_4$	38	25	41
	:	(b'_{II})	010	66	$15^1/_2$	66	20	38
c	001 :	*s*	012	18	54	18	54	36
	:	*t*	023	24	33	24	32	57
	:	*k*	011	34	$24^3/_4$	34	24	59
	:	*d*	021	53	53	53	52	44
	:	*e*	041	69	59	69	57	13
	:	*b*	010	90	0	90	0	0
	:	*q*	114	17	51	17	49	50
	:	*m*	113	23	13	23	12	47
	:	*h*	112	32	$45^1/_3$	32	45	12
	:	*P*	111	52	$8^1/_2$	52	8	40
	:	*r*	221	68	$44^1/_2$	68	45	47
	:	*o*	110	90	$0^1/_4$	90	0	0
	:	$\beta'^1/_2$	$\bar{1}02$	28	37	28	34	7
	:	*β′*	$\bar{1}01$	47	27	47	26	23
	:	*ω*	134	30	$10^3/_4$	30	10	45
	:	*w*	131	66	45	66	43	56
k′	$0\bar{1}1$:	*w′*	$1\bar{3}1$	38	20	38	18	22

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
k' $0\bar{1}1$	: T' $1\bar{4}2$	26	8½	26	8	21
	: m'' $\bar{1}\bar{1}3$	28	45	28	44	29
	: $\beta' \, ^1/_2$ $\bar{1}02$	43	36	43	34	19
	: (k'_I) $0\bar{1}1$	35	1½	35	1	59
h' $1\bar{1}2$	: (h'_I) $1\bar{1}2$	27	7½	27	5	14
ω' $1\bar{3}4$	: (ω'_I) $1\bar{3}4$	4	16	4	16	50
k' $0\bar{1}1$	: (h'_I) $1\bar{1}2$	3	58	3	58	27
	: (ω'_I) $1\bar{3}4$	19	40½	19	39	23
(k'_I) $0\bar{1}1$	: h' $1\bar{1}2$	3	54½	3	58	27
	: ω' $1\bar{3}4$	19	38	19	39	23
(d'_{II}) $0\bar{2}1$	: P' $1\bar{1}1$	51	50½	51	51	15
	: h' $1\bar{1}2$	47	49	47	50	46
	: m' $1\bar{1}3$	47	57½	47	58	11
	: o' $1\bar{1}0$	71	5	71	5	17
m''' $\bar{1}\bar{1}3$	: (m'''_{II}) $\bar{1}\bar{1}3$	3	20	3	21	16
h''' $\bar{1}\bar{1}2$	: (h'''_{II}) $\bar{1}\bar{1}2$	4	35	4	36	20

Joachimsthal.

In früherer Zeit ist der Stephanit in Joachimsthal neben Rothgiltigerzen und Silberglanz recht häufig vorgekommen, wie dies die zahlreichen, in Sammlungen aufbewahrten Stufen darthun; in neuerer Zeit ist sein Vorkommen auf den Joachimsthaler Gängen ein recht seltenes geworden, wie überhaupt die Ergiebigkeit des, einst an zahlreichen, schönen und seltenen Mineralien so reichen Bergbaues stark im Niedergang begriffen ist. Nach J. F. Vogl, dem wir wichtige Angaben über das Vorkommen der Mineralien im Joachimsthaler Grubenrevier verdanken,[1]) kam der Stephanit nur an Mitternachtsgängen vor (Kaiser Josef-, Maria-, Prokopi-, Klementi-, Anna-, Becker-, Geschieber-, Hildebrand-, Häuerzecher-, Evangelistengang und Rose von Jericho). Die von Zippe stammenden Etiquetten der Stücke im böhmischen Museum geben die Fundstelle nicht näher an.

Die zahlreichen Joachimsthaler Handstücke, welche ich im böhmischen Museum, in der Universitätssammlung sowie in Privatsammlungen besichtigt habe, zeigen den Stephanit meist auf Calcit oder Dolomit sitzend, häufig begleitet von Argentit, Pyrargyrit und Eisenkies, seltener von Quarz und Silber. Als Unterlage dient der Calcit-

[1]) Gangverhältnisse und Mineralreichthum Joachimsthals 1857. 79

oder Dolomitdruse entweder körniger Kalk, der mehr oder minder reich mit Pyritkörnchen imprägnirt zu sein pflegt, oder es sitzt dieselbe unmittelbar auf dem bekannten, glimmerreichen Schiefer auf. An einem Stücke bildet die Unterlage ein zertrümmertes und durch Kalkspath verkittetes Schiefergestein. Minder häufig findet sich der Stephanit auf dichtem, mit Chloanthit innig gemengtem, nach Silberkies pseudomorphem Leberkies; auch in diesem Falle wird er von den oben angeführten Mineralien, Dolomit, Glaserz, Pyrargyrit, Pyrit, nebstdem aber auch von verschiedenen Zersetzungsprodukten der Unterlage, namentlich Annabergit, begleitet. An einem der mir vorliegenden Stücke fand ich eine kleine Gruppe von tafeligen Pyrostilpnit-Kryställchen.

Der Habitus der Joachimsthaler Stephanite ist in weitaus den häufigsten Fällen tafelig; denselben bedingen entweder die Endfläche oder aber sehr flache Pyramiden; weniger häufig sind die Kryställchen nach der Verticalrichtung kurz oder lang säulenförmig. Die tafeligen Krystalle sind gewöhnlich zu kleinen Drusen, deren Individuen nur mässig hervorragen, aggregirt oder bilden stark verwachsene Gruppen, seltener bedecken dieselben, in nahe paralleler Stellung an einander gereiht, grössere Flächen. Die säulenförmigen Individuen trifft man nicht selten vereinzelnt neben Glaserz und Pyrargyrit aufgewachsen.

Bezüglich des Flächenreichthums und der Beschaffenheit der Flächen halten die Stephanite von Joachimsthal entschieden keinen Vergleich mit Přibramer Krystallen aus. Unter den zahlreichen Individuen einer Druse findet man nur selten einen zur goniometrischen Untersuchung geeigneten Krystall; Riefung, Drusigkeit und Krümmung der Flächen, der polysynthetische Bau und regellose, mehrfache Verwachsung gestalten sie zu wenig geeigneten Objekten für erwähnte Zwecke. Den zahlreichen Stücken, die ich zur Verfügung hatte, habe ich nur 7 halbwegs verwendbare Kryställchen entnehmen können, an denen im Ganzen 15 einfache Formen nachgewiesen wurden.

Fig. 20. An einer kleinen Druse sehr flacher, oberflächlich geschwärzter Calcit-Rhomboëder gewahrte ich ausser unvollkommen gebildeten, stark verwachsenen, tafeligen Stephaniten, zwei kleine, frei aufgewachsene Kryställchen, welche die zuerst von Haidinger beobachtete und seither in allen Lehrbüchern aufgenommene Combination *P* 111; *d* 021; *c* 001; aufweisen. Die Endflächen derselben sind gewölbt, dabei auch uneben und reflectiren gar nicht einheitlich, die *P*- und *d*-flächen sind drusig und mannigfach geknickt, auch zu approxi-

mativen Bestimmungen der Flächenneigung kaum geeignet, wie die aus zahlreichen Beobachtungen abgeleiteten Messungsresultate darthun:

	gemess. (Mttl.)	gerechnet
P 111 : *P'* 111	101° 56	102° 51' 50"
: *P* 11$\bar{1}$	76 3	75 42 40
: $\bar{d}$ 021	45 50	45 27 42

Fig. 34. Einer zweiten Stufe konnte ich ganz kleine — 2½ mm breite, 1 mm hohe — stark glänzende Täfelchen entnehmen, die sich als Zwillinge nach *o* 110 zu erkennen gaben. Sämmtliche Flächen sind in der früher angegebenen Richtung schwach gerieft, *c* 001 etwas uneben.

c 001; *o* 110; *b* 010.

	gemess. (Mttl.)	gerechnet.
o 110 : *o'* 1$\bar{1}$0	64° 29'½	64° 21' 4"
: *b* 010	57 30	57 49 28
b 010 : (*o*) 110	6 19	6 31 36

Fig. 2. Ein säulenförmiges, 2 mm breites, 2½ mm hohes Kryställchen, von zwei Zwillingslamellen nach *o* 110 durchsetzt. Die Flächen der Verticalzone sind sehr stark gerieft und unmessbar, die Endfläche und die Pyramiden reflectiren nur verschwommene Signalbilder. Das Kryställchen war mit Argentit auf schmutzig gelbem, linsenförmigem Calcit aufgewachsen.

c 001; *q* 114; *m* 113; *l* 223; *P* 111; *t* 023; *ϰ* 043; *d* 021; *o* 110; *b* 010.

	gemess. (Mttl.)	gerechnet
c 001 : *q* 114	17° 40'	17° 49' 50"
: *m* 113	23 25½	13 12 47
: *l* 223	40 41	40 37 16
: *P* 111	52 9½	52 8 40
: *o* 110	90 7	90 0 0
: *t* 023	24 26	24 32 57
: *ϰ* 043	42 30	42 24 44
: *d* 021	53 46	53 52 44

Fig. 36. Ein kleiner, 2 mm langer, 1¼ mm breiter, ¾ mm hoher, wesentlich von flachen Pyramiden gebildeter Zwillings-Krystall nach *o* 110, an dem die Endfläche ganz fehlt, die Domen und Prismen nur sehr untergeordnet auftreten. Die Flächen geben sehr mittelmässige Reflexe, nur *ω* 134, das ungewöhnlich ausgedehnt ist, und *h* 112 spiegeln gut; die Neigungen der kleineren Flächen konnten z. Thl. nur mit vorgesetzter Loupe am Beobachtungsfernrohre er-

mittelt werden. Der grossen Mehrzahl der tafeligen oder linsenförmigen Krystalle, die recht oft eine sternförmige Basis aufweisen, liegt die Combination dieses Kryställchens zu Grunde; sie sind durchwegs nach beiden *o*-Flächen gebildete Zwillingsgruppen.

q 114; *h* 112, *P* 111; *o* 110; *π* 130; *ω* 134; *f* 133; *v* 132; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *b* 010; *a* 100.

			gemess. (Mttl.)		gerechnet		
a 100	: *o*	110	32°	4′	32°	10′	32″
b 010	: *o*	110	57	53	57	49	28
	: *π*	130	28	9	27	54	57
o 110	: (*b*)	010	6	21	6	31	36
	: *P*	111	37	45½	37	51	20
	: *h*	112	57	14½	57	14	48
	: *q*	114	72	44	72	10	10
	: *ω*	134	64	15	64	10	0
b 010	: *d*	021	36	10	36	7	16
	: *k*	011	55	40	55	34	1
	: *t*	023	65	40	65	27	3
ω 134	: *ω‴*	$\bar{1}34$	27	14½	27	14	25
	: *P*	111	29	3	29	0	45
	: *t*	023	13	42	13	51	58
	: *h*	112	15	38	15	41	1
	: *h‴*	$\bar{1}12$	41	40	41	39	0
	: *o‴*	$\bar{1}10$	87	59	87	51	36
	: (*ω*)	134	4	15	4	16	15
h 112	: (*k*)	011	3	55	3	58	25
ω 134	: *f*	133	7	45	7	36	33
	: *v*	132	19	1	19	7	54
	: *π*	130	59	51	59	49	15

Ratibořic.

Von diesem, ehedem ergiebigen Silberbergbau bewahrt das böhmische Museum einige Handstücke von Stephanit mit ansehnlichen, bis 12 mm hohen, säulenförmigen Krystallen, die jedoch für das goniometrische Studium wegen ihres polysynthetischen Baues kein taugliches Material abgeben. Sie sitzen mit wasserhellen Quarzkrystallen, Pyrit und Tetraëdrit auf Drusen von Galenit und brauner Blende über talkigem Schiefer. Als jüngere Bildung haben sich schmutzig

gelbliche und graulich weisse flache Kalkspath-Rhomboeder und kleine Dolomit-Kryställchen über den genannten Mineralien abgelagert.

Auf einer kleinen Pyrargyrit-Stufe von derselben Localität bemerkte ich auf unvollkommen ausgebildeten, grossen Rothgülden-Krystallen kleine, schwarze, lebhaft glänzende aber stark verzerrte Kryställchen sitzen, die sich bei näherer Untersuchung gleichfalls als Stephanit erwiesen und trotz ihrer Kleinheit, — sie haben höchstens $^3/_4$ mm Höhe und $1^1/_4$ mm Breite — am Goniometer recht gute Reflexe gaben; ihr Typus lässt sich als kurzsäulenförmig-pyramidal bezeichnen. In der Form weichen die einzelnen Kryställchen nur in so weit von einander ab, als Flächen, die an einem mehr ausgebreitet sind, am anderen nur untergeordnet auftreten oder ganz fehlen. Paragenetisch zeigt das Stück folgende Succession der Mineralabscheidung: Talkschiefer; drusiger, graulichweisser Quarz; braune körnige Blende mit eingesprengtem Galenit; unvollkommen ausgebildete Pyrargyrit-Krystalle, bis 8 mm hoch, 10 mm dick, stark verwachsen; graulichweise, durchscheinende Calcit-Rhomboeder, theils einzeln, theils gruppenweise auf Pyrargyrit sitzend; winzige Stephanit-Kryställchen z. Thl. auf Pyrargyrit, z. Thl. auf Calcit aufgewachsen.

Fig. 13. stellt eine der flächenreichsten beobachteten Combinationen dar.

c 001; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *λ* 310; *b* 010; *f* 133; *T* 142; *d* 021; *k* 011; *t* 023.

		gemess. (Mttl.)		gerechnet		
b 010 : *o*	110	57°	43′	57°	49′	28″
: *λ*	310	78	6	78	9	22
λ 310 : *λ′*	$3\bar{1}0$	23	36	23	41	16
c 001 : *h*	112	32	47	22	45	12
: *P*	111	52	10	52	8	40
: *o*	110	89	57	90	0	0
: *f*	133	37	$47^1/_2$	37	47	18
: *T*	142	55	50	55	51	18
d 021 : *T*	142	17	43	17	47	45
f 133 : *h*	112	17	47	17	49	34
: *d*	021	25	26	25	24	52
: *P′*	$1\bar{1}1$	63	11	63	19	3

Altwožic.

Gleich den Ratibořicer Erzgängen streichen auch jene von Altwožic in talkigem Gneiss; die Füllung derselben ist gleich jenen der

vorgenannten Localität vorzugsweise quarzig und die Ausscheidungen der erzigen Mittel analog. Nächst dem Quarz sind in wechselnden Zeiträumen Blende und Galenit abgesetzt worden; erstere bildet häufig ansehnliche, schwarze oder dunkelbraune Zwillingskrystalle, die auf grossen Quarzkrystallen sitzen oder schöne Drusen zusammensetzen; letzterer, gewöhnlich mit der Blende vergesellschaftet, ist licht bleigrau und zeigt häufig die Mittelform vom Hexaëder und Oktaëder, an der untergeordnet Ikositetraëder und Triakisoktaëder auftreten. Die Oktaëder-Flächen sind stets glänzend und mitunter angeflossen, die Hexaëder-Flächen eben, fein drusig oder matt.

Mit dem Galenit z. Thl. von gleichzeitiger Bildung ist der Stephanit, nachdem man die scheinbar aufgewachsenen Krystalle desselben oft bis zu einem Dritttheil in ersterem eingesenkt findet. Als jüngere Bildungen sitzen auf den vorerwähnten Drusen Pyrargyrit, Calcit und Dolomit; Pyrit, der in Ratibořic ein constanter Begleiter der genannten Mineralien gewesen ist, scheint hier zu fehlen.

Die Stephanit-Krystalle sind ausnahmslos vertical-säulenförmig und wenn auch scheinbar ganz einfach, stets Zwillinge, oft nach beiden Gesetzen gebildete Zwillingsgruppen. Die Flächen der Prismenzone sind immer recht stark vertical gerieft, geben aber, trotzdem ihre Reflexbilder verschwommen sind, annähernd befriedigende Messungsresultate; die Endfläche spiegelt vorzüglich, dessgleichen auch die Pyramiden und Domen.

Fig. 37. stellt ein 1 mm hohes und ebenso breites Säulchen dar, das anscheidend ein einfacher Krystall, in Wirklichkeit ein Vierling ist. An das Hauptindividuum ist gemäss dem ersten Gesetze nach o'' $\bar{1}\bar{1}0$ das erste Zwillingsglied angewachsen, an welches ein drittes nach o_I'' $\bar{1}\bar{1}0$ angefügt erscheint, welches das letzte Zwillingsindividuum, nach dem zweiten Gesetze orientirt, trägt. Dem gemäss findet sich in der nur von Prismen gebildeten Verticalzone an diesem Kryställchen nur zu einer Fläche die parallele Gegenfläche, Brachypinakoid und Brachydomen fehlen ganz; dessgleichen sind nur die Pyramiden, die der Zone der beiden parallelen Prismenflächen angehören, in einer Zone.

c 001; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *β* 101.

	gem. (Mttl.)	gerechnet
o 110 : o' $1\bar{1}0$	64° 21'1/2	64° 21' 4"
o' 110 : (o'_I) $1\bar{1}0$	51 8	51 17 52
(o_I) 110 : (o_{II}) 110	51 12	51 17 52
(o_{II}) 110 : (o_{III}) 110	8 29 1/2	8 31 10

		gem. (Mttl.)	gerechnet
c 001 : h	112	32 45¾	32 45 12
: P	111	52 9	52 8 40
: β	101	47 25½	47 26 23
P' $\bar{1}11$: (P'_{I})	$\bar{1}11$	39 56	39 58 8
(P_{II}) 111 : (P_{III})	111	6 46	6 43 23
P 111 : β	101	24 54	24 51 47
: P'	$\bar{1}11$	49 42	49 43 34

Noch complicirter als die eben beschriebene Zwillingsgruppe ist der in Fig. 49 projicirte, 1½ mm hohe und 2 mm breite Krystall; scheinbar ein hexagonales Säulchen, besteht derselbe gleich dem vorigen aus vier Einzelkrystallen, die nach den beiden Gesetzen verzwillingt, durch einander penetriren. Nimmt man das grösstenwickelte Individuum normal gestellt an, so erscheint an dasselbe nach o''' $1\bar{1}0$ das zweite — (o'_{I}) — angewachsen, dessen π 130 als Zwillingsfläche für das dritte Glied — (o'_{II}) — der Zwillingsgruppe dient. Im normal gestellten Krystall ist nach dem zweiten Gesetze das vierte Individuum — (o'''_{III}) — eingekeilt, welcher das dritte Individuum penetrirend, auf der rückwärtigen Seite zum Vorschein kommt. Es befinden sich in dieser Zwillingsgruppe das normal gestellte und jenes mit I signirte, ferner das mit II und III bezeichnete Individuum nach dem ersten Gesetze in Zwillingsstellung, während zum normal gestellten III, zum mit I bezeichneten das Individuum II in der Zwillingslage nach dem zweiten Gesetze orientirt sind. An diesem Krystall steht keine Verticalfläche von einer zweiten um 180° ab. Sämmtliche Verticalflächen sind gerieft, ihre Reflexe verschwommen; alle übrigen Flächen reflectiren befriedigend.

c 001; m 113; h 112; P 111; r 221; t 023; k 011; d 021; β½ 102; β 101; o 110; π 130; b 010.

		gem. (Mttl.)	gerechnet
o 110 : o'	$1\bar{1}0$	64° 11	64° 21′ 4″
: b	010	57 54	57 49 28
: π	130	29 51	29 54 31
o' $1\bar{1}0$: (o'_{I})	$1\bar{1}0$	51 40½	51 17 52
(o'_{I}) $1\bar{1}0$: (o'_{II})	$1\bar{1}0$	8 22	8 31 10
(o'_{II}) $1\bar{1}0$: (b'_{II})	$0\bar{1}0$	57 49	47 49 28
(b'_{II}) $0\bar{1}0$: (b'_{III})	$0\bar{1}0$	64 22	64 21 4
b 010 : (b'_{III})	$0\bar{1}0$	55 52	55 49 54
: π'''	$\bar{1}30$	28 1	27 54 57

			gem. (Mttl.)		gerechnet		
(o'''_{III}) $\bar{1}10$	: o	110	8	44	8	31	10
	: o'	$1\bar{1}0$	55	17	55	49	54
c 001	: m	113	23	14²/₃	23	12	47
	: h	112	32	42	32	45	12
	: P	111	52	9	52	8	40
	: r	221	68	51	68	45	47
	: t	023	24	29	24	32	57
	: k	011	34	22	34	24	59
	: d	021	53	46³/₄	53	52	44
	: e	041	69	45	69	57	13
	: $\beta^{1}/_{2}$	102	29	0 *cca*	28	34	7
	: β	101	47	25	47	26	23
P 111	: P'	$1\bar{1}1$	49	42	49	43	34
	: (P'''_{III})	$\bar{1}11$	6	41	6	43	23
	: d	021	45	30	45	27	42
P' $1\bar{1}1$	: (P'''_{III})	$\bar{1}11$	43	22	43	23	18
	: (P'_{I})	$1\bar{1}1$	39	59	39	58	8
(P'_{I}) $1\bar{1}1$	: (P'_{II})	$1\bar{1}1$	6	46¹/₂	6	43	23
(P'_{II}) $1\bar{1}1$	: (d'_{II})	$0\bar{2}1$	45	29¹/₂	45	27	42
h 112	: (h'''_{III})	$\bar{1}12$	4	29	4	36	20
(h'_{I}) $1\bar{1}2$	: (h'_{II})	$1\bar{1}2$	4	48	4	36	20
k 011	: (k'_{III})	$0\bar{1}1$	30	37	30	41	17
(k'_{III}) $0\bar{1}1$	: (k'_{II})	$0\bar{1}1$	35	5	35	1	59
d 021	: (d'_{III})	$0\bar{2}1$	44	22¹/₂	44	26	30
(d'_{III}) $0\bar{2}1$	: (d'_{II})	$0\bar{2}1$	50	55	50	57	15
(P''_{II}) $\bar{1}\bar{1}1$	: (β'_{II})	$\bar{1}01$	24	46	24	51	47

Řemišov.

V. von Zepharovich führt in seinem Lexicon Řemišov nicht als Fundort des Stephanit an, ebenso fehlt diese Localität unter Galenit und Blende. Zippe von dem von Zepharovich seine Angaben entlehnte, fasst die Gänge von Ratibořic, Altwožic, Řemišov und Hlasová, [1]) die in geringer Entfernung in demselben Gebirgszuge im Gneiss streichen und ziemlich dieselben Mineralien führen, zusammen und erwähnt unter Stephanit gleichfalls nicht speciell diesen Fundort,

[1]) Verhandl. d. Gesell. d. vaterl. Museums 1840. 29. — Dr. A. Wrany besitzt von diesem Fundorte eine sehr schöne Pyrargyrit-Stufe, welches Mineral von dieser Localität auch nicht angeführt wird.

wiewohl die Etiquette des Stückes im böhmischen Museum von seiner Hand geschrieben ist.

Das Stück setzen einige grössere Galenit-Krystalle, die ähnlich jenen von Ratibořic und Altwožic glatte, an den Kanten etwas geflossene Oktaëder-, aber stark corrodirte Hexaëder-Flächen besitzen und auf körniger brauner Blende aufgewachsen sind, zusammen. Auf dem Galenit sitzen winzig kleine aber auch bis 6 mm hohe und 4 mm breite Stephanit-Säulchen, auf denen als jüngste Bildung graulichweisse, durchscheinende Calcit-Kryställchen, — $^{1}/_{2}$ R $01\bar{1}2$. $\infty P2$ $11\bar{2}0$, aufgewachsen sind.

Die Verticalflächen sind auch an Krystallen von diesem Fundorte stark gerieft, die Pyramiden und Domen von guter Beschaffenheit.

Fig. 25. stellt einen einfachen Krystall — 3 mm hoch, 2 mm breit — dar.

c 001; *m* 113; *l* 223; *P* 111; *r* 221; **α* 013; *s* 012; *t* 023; *ϰ* 043; *d* 021; δ_3 081; *β* 101; *o* 110; *π* 130; *b* 010.

		gem. (Mttl.)	gerechnet
o 110 : *b*	010	57° 53	57° 49′ 28″
: *o′*	$1\bar{1}0$	64 20	64 21 4
: *π*	130	30 8 *cca*	29 54 31
c 001 : *α*	013	12 49$^{1}/_{2}$	12 51 52
: *s*	012	18 37 *cca*	18 54 36
: *t*	023	24 38	24 32 57
: *ϰ*	043	42 30$^{1}/_{2}$	42 24 44
: *d*	021	53 49	53 52 44
: δ_3	081	79 43	79 39 38
: *m*	113	23 12	23 12 47
: *l*	223	40 57 *cca*	40 37 16
: *P*	111	52 10	52 8 40
: *r*	221	68 28 *cca*	68 45 47
P 111 : *β*	101	24 56	24 51 47
: *P′*	$1\bar{1}1$	49 41	49 43 34

Fig. 44. Ein 2 mm hohes und ebenso breites, sechsseitiges Säulchen mit einem nach *o* $\bar{1}10$ eingewachsenen keilförmigen Zwillingsindividuum und zwei sehr dünnen, parallel *o* 110 eingeschlossenen Zwillingslamellen.

c 001; *m* 113; *l* 223; *P* 111; *r* 221; *s* 012; *t* 023; *k* 011; *ϰ* 043; *d* 021: *e* 041; *E* 061; *o* 110; *λ* 310; *π* 130; *b* 010.

		gem. (Mttl.)	gerechnet
o′ $1\bar{1}0$: *o*	110	64° 24	64° 21′ 4″
: *λ′*	$3\bar{1}0$	20 20	20 19 54

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
b 010 :	*π* 130	27	56	27	54	57
:	*o* 110	57	48	57	49	28
(*b′*) $0\bar{1}0$:	*b′* $0\bar{1}0$	64	54 *cca*	64	21	4
:	*o‴* $\bar{1}10$	57	24 *cca*	57	49	28
c 001 :	*m* 113	23	11	23	12	47
:	*l* 223	40	41	40	37	16
:	*P* 111	52	8½	52	8	40
:	*r* 221	68	47	68	45	47
:	*s* 012	18	55	18	54	36
:	*t* 023	24	30½	24	32	57
:	*k* 011	34	30	34	24	59
:	*ϰ* 043	42	25	42	24	44
:	*d* 021	53	53	53	52	44
:	*e* 041	69	58	69	57	13
:	*E* 061	76	21	76	19	40

Fig. 35. Kleiner, ¾ mm hoher, 1½ mm breiter, Penetrations-Zwilling nach *o″* $\bar{1}10$.

c 001; *m* 113; *l* 223; *P* 111; *p* 332; *s* 012; *t* 023; *ϰ* 043; *d* 021; *o* 110; *b* 010.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 :	*s* 012	18°	59′	18°	54′	36″
:	*t* 023	24	34	24	32	57
:	*ϰ* 043	42	28	42	24	44
:	*d* 021	53	52⅔	53	52	44
:	*m* 113	23	10	23	12	47
:	*l* 223	40	35⅓	40	37	16
:	*P* 111	52	6½	52	8	40
:	*p* 332	62	58 *cca*	62	36	31
b 010 :	(*b*) 010	64	20	64	21	4
:	*o* 110	57	43	57	49	28
o′ $\bar{1}10$:	(*b′*) $0\bar{1}0$	6	30	6	31	36
:	(*o′*) $\bar{1}10$	51	20	51	17	52
b′ $0\bar{1}0$:	(*b′*) $0\bar{1}0$	64	18	64	21	4

Schemnitz.

Kleine, schwarze, stark glänzende Kryställchen, mit Calcit-Skalenoëdern und Quarz auf drusigem Eisenkies einzeln oder gruppenweise aufgewachsen, als „dunkles Rothgülden von Schemnitz“ be-

zeichnet, erwiesen sich als Stephanit, der bekanntlich an diesem Fundorte in wohlgebildeten Krystallen nicht besonders häufig ist.

Trotz ihrer sehr geringen Grösse, — sie sind höchstens $1^1/_2$ mm hoch und dick — und des ansehnlichen Flächenreichthums eignen sich die Kryställchen sehr wohl zum goniometrischen Studium, da sämmtliche Flächen vollkommen eben und lebhaft spiegelnd sind; selbst die kleinsten geben noch sehr verlässliche Messungsresultate, die grösser ausgedehnten häufig Winkelwerthe, die mit den berechneten Neigungen fast absolut übereinstimmen. Im folgenden theile ich die Ergebnisse der Messung an dem flächenreichsten der untersuchten Kryställchen, in Fig. 22. dargestellt, mit.

c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *ω* 134; *v* 132; *w* 131; **A* 313; *γ* 151; *β* 101; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; δ_1 071; *b* 010.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 100 : *t*	023	24°	32′	24°	32′	57″
: *k*	011	34	22	34	24	59
: *d*	021	53	55	53	52	44
: *e*	041	69	57	69	57	13
: δ_1	071	78	14	78	13	19
: *b*	010	90	0	90	0	0
: *m*	113	23	11	23	12	47
: *h*	112	32	$44^1/_2$	32	45	12
: *P*	111	52	$8^2/_3$	52	8	40
: *o*	110	90	$0^1/_3$	90	0	0
: *ω*	134	30	$9^1/_2$	30	10	45
: *v*	132	49	$17^1/_2$	49	18	39
: *w*	131	66	$44^1/_2$	66	43	56
β 101 : *A*	313	8	$48^1/_4$	8	46	52
: *P*	111	24	$55^1/_2$	24	51	47
: *w*	131	54	$16^1/_2$	54	16	8
· *γ*	151	66	42	66	39	20
: *b*	010	89	$59^1/_3$	90	0	0
: *o*	110	51	25	51	25	55
: *h*	112	25	2	25	1	28
: *ω*	134	40	42	40	42	29
: *k*	011	56	$5^1/_2$	56	5	4
e 041 : *ω*	134	44	$30^1/_2$	44	28	12
: *w*	131	26	$7^1/_4$	26	6	11
: *o′*	$\bar{1}10$	120	$3^1/_2$	120	1	0

Andreasberg.

Die Krystalle dieses Fundortes wurden bereits von *C. H. Schröder* goniometrisch untersucht, an denselben 40 einfache Gestalten nachgewiesen und einige recht flächenreiche Combinationen angegeben.[1]) *Schröder* giebt den Habitus der Andreasberger Stephanite als kurzsäulenförmig an, bemerkt aber, dass ihm nur Bruchstücke von Krystallen vorlagen und hat diesen entsprechend seine Krystallbilder entworfen. Über die Begleiter des Stephanites vermissen wir in der trefflichen Arbeit *Schröder's* jegliche Angaben.

Auf mein Ansuchen theilte mir Herr Prof. Dr. *H. Bücking* die Andreasberger Stephanite der Strassburger Universitäts-Sammlung freundlichst mit und Herr *J. C. A. Meine* in Hannover liess mir seinen ganzen Vorrath dieses Minerales zukommen. Wenn ich auch durch die Zuvorkommenheit beider genannten Herren, denen ich zu besonderem Danke verpflichtet bin, über eine ansehnliche Reihe des Andreasberger Vorkommens disponirt habe, kann ich doch kaum wesentliches den Angaben *Schröder's* hinzufügen. Von den durch Schröder nachgewiesenen Formen habe ich an dem mir vorliegenden Materiale nur 15 constatiren können, zu denen noch die an Přibramer Krystallen nachgewiesene Fläche *Γ* 371 — an einem langsäulenförmigen Krystall recht ausgedehnt — hinzukam. Der Habitus der mitunter sehr gut gebildeten Krystalle ist kurz- oder langsäulenförmig oder auch tafelig; letztere Krystalle sitzen auf Silberkies; die säulenförmigen haben entweder krystallisirten Calcit zur Unterlage und werden von Pyrargyrit, Argentit und Chalkopyrit begleitet oder sie sind in Drusenräumen von weissem, durchscheinenden Quarz aufgewachsen, der spärlich Galenitbrocken eingesprengt enthält und den bekannten grauen Andreasberger Schiefer überdeckt.

Fig. 1. Kleiner, 2 mm hoher und breiter, säulenförmiger Krystall, Zwilling nach *o* 110, mit stark gerieften Prismenflächen.

c 001; *h* 112; *P* 111: *o* 110; *k* 011; *d* 021; *b* 010; *v* 132.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : *h*	112	32°	42′	32°	45′	12″
: *P*	111	52	9	52	8	40
: *o*	110	89	56	90	0	0
: *k*	011	34	25	34	24	59
: *d*	021	53	52	53	52	44
: *b*	010	90	0½	90	0	0

[1]) Berg. u. Hüttenn. Zeitg. 1854. Nro. 29—31 u. Pogg. Ann. 95 Bd. 1885. 257.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
P 111 : *v*	132	23	46 *cca*	23	13	7
: *d*	021	45	26½	45	27	43
: *o‴*	$\bar{1}$10	110	1	109	59	5

Fig. 5. Langsäulenförmiges, in der Verticalzone stark gerieftes Kryställchen — 3 mm hoch, 1½ mm breit — zum Thl. auch auf der Unterseite ausgebildet.

c 001; *m* 113; *l* 223; *P* 111; *o* 110; *k* 011; *d* 021; *b* 010 *γ* 151; **Γ* 371.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : *m*	113	23°	18′ *cca*	23°	12′	47″
: *l*	223	40	39	40	37	16
: *P*	111	52	7	52	8	40
: *o*	110	90	3	90	0	0
: *k*	011	34	29 *cca*	34	24	59
: *d*	021	53	51½ *cca*	53	52	44
: *b*	010	90	0	90	0	0
o 110 : *Γ*	371	25	21	25	24	9
: *γ*	151	42	37½	42	36	39
b 010 : *Γ*	371	35	29½	35	27	58
: *o*	110	57	53 *cca*	57	49	28

Fig. 39. Fragment eines tafeligen Zwillingskrystalles nach *o* 110, dessen Endfläche sechsseitig getäfelt, die verticalen Flächen gerieft sind; sämmtliche Reflexe sind mehrfach oder verschwommen, die gemessenen Winkel weichen z. Thl. bis 20′ von den gerechneten ab.

c 001; *o* 110; *b* 010; *a* 100; *d* 021; *s* 012; *P* 111.

	gem. (Mttl.)		gerechnet		
b 010 : (*o‴*) $\bar{1}$10	6°	37′	6°	31′	36″
d 021 . (*P‴*) $\bar{1}$11	5	29	5	29	29

Fig. 40. Schöner Contactzwilling nach *o″* $\bar{1}$10, 7 mm hoch, 4½ mm breit, mit gleich gebildeten kleineren Zwillingen verwachsen (Samson).

c 001; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *d* 021; δ_1 071; *b* 010.

Sämmtliche Winkel stimmen bis auf wenige Minuten mit den gerechneten Werthen.

Fig. 42. Penetrationszwilling nach dem ersten Gesetze 11 mm hoch, 8 mm breit, gebildet von denselben Flächen wie Fig. 40 mit Ausnahme δ_1 071; dafür tritt *ϱ* 241 hinzu, welches durch oscillatorische Combinationen auf den *o*-Flächen eine schief verlaufende Riefung bedingt.

Fig. 43. Ein $8\frac{1}{2}$ mm hohes, dreiseitiges Säulchen, ein Zwilling nach dem ersten Gesetze, wobei die beiden Individuen nach einer zur Zwilligsebene normalen Fläche verwachsen erscheinen.

Ähnlich jenen vom Samson, sind die Krystalle von der Grube „Jakobsglück" gebildet, theils Contact-, theils Penetrations-Zwillinge nach *o* 110; auch sie geben stets mehrfache und kaum verlässliche Reflexe, namentlich sind die Säulen und die Domen stark gerieft, kaum messbar.

Freiberg.

Wiewohl der Stephanit im Freiberger Grubenrevier wiederholt reichlich eingebrochen ist, sind doch gute Krystalle verhältnissmässig nicht häufig. Aus neuerer Zeit liegen über dieses Vorkommen Notizen von Frenzel[1]) und Schimper[2]) vor. Ersterer führt wohl verschiedene Combinationen von lang- und kurzsäulenförmigem Habitus an, giebt aber keine Neigungsverhältnisse; letzterer hat an beiderseits ausgebildeten Krystallen eines neueren Anbruches 14 einfache Formen, darunter 2 neue, nachgewiesen.

Die von Schimper beobachteten Winkel der Flächennormalen, mit den theoretischen Werthen verglichen, sind die nachfolgenden:

		beobachtet		berechnet		
o 110 : *b*	010	57°	49′	57°	49′	28″ [3])
c 001 : *m*	113	23	13	23	12	47
: *h*	112	32	40	32	45	12
: *l*	223	40	$36\frac{1}{2}$	40	37	16
: *P*	111	52	$8\frac{1}{2}$	52	8	40
P 111 : *l*	223	11	32	11	31	24
: *p*	332	10	26	10	27	51
: *r*	221	16	40	16	37	7
: *o*	110	37	51	37	51	20
c 001 : *s*	012	18	55	18	54	36
: *k*	011	34	25	34	24	59
: *ϰ*	043	42	34	42	24	44
: *d*	021	53	58	53	52	44
β 101 : *P*	111	24	49	24	51	47

[1]) Min. Lex. d. k. Sachsen. 1 c.

[2]) Groth Mineralien-Sammlg. d. Strassb. Univ. 69.

[3]) Im Original ist sowohl der beobachtete als auch der berechnete Winkel irrig mit 47° 49′ und 47° $49\frac{1}{2}$′ angegeben.

Mir liegen Freiberger Krystalle von doppeltem Habitus vor, die einen sind tafelig nach *c* 001, die anderen kurzsäulenförmig nach der Verticale. Die tafeligen — Fig. 34. — erreichen bis 18 mm Breite und bilden rosettenförmige, lose Gruppen, ihre Endfläche ist mit zahlreichen rundlichen Erhöhungen versehen oder gewölbt, sie reflectirt nicht; die Verticalflächen sind ziemlich eben, mässig glänzend und fast stets stumpf gebrochen.

Die stumpfe Kante wurde am Goniometer zu $6^1/_2{}^0$ *cca* bestimmt, wesshalb die Tafeln als Zwillinge nach *c* 110 angesehen werden müssen. (*b* 010 : (*o*) 110 = 6° 31′ 36″ ber.)

Von den säulenförmigen Krystallen giebt Fig. 4. ein Bild; es ist dieselbe Combination, die auch der in Fig. 2. gezeichnete Joachimsthaler Krystall zeigt, nur sind die *m*- und *t*-Flächen ausgedehnter; sämmtliche Formen, *q* ausgenommen, sind schon in der Schimper-schen Flächentabelle aufgenommen. Die Krystalle sitzen einzeln auf einer Galenitdruse und sind von Pyrit und Calcit begleitet.

c 001; *q* 114; *m* 113; *l* 223; *P* 111; *o* 110; *t* 023; *ϰ* 043; *d* 021; *b* 010.

		gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001 : *q*	114	17°	49′	17°	49′	50″
: *m*	113	23	$12^1/_2$	23	12	47
: *l*	223	40	39	40	37	16
: *P*	111	52	$10^1/_2$	52	8	40
: *o*	110	89	55	90	0	0
: *t*	023	24	34	24	32	57
: *ϰ*	043	42	18	42	24	44
: *d*	021	53	49	53	52	44
: *b*	010	90	$0^1/_2$	90	0	0

Marienberg.

Herrn Prof. H. Bücking danke ich die Mittheilung von drei Stufen dieses Fundortes. Vom „Vater Abraham“ stammen säulenförmige, bis 5 mm hohe Krystalle, z. Thl. bunt angelaufen; sie sitzen auf drusigem und zelligem Quarz. Meist auf beiden Enden ausgebildet, zeigen sie als wesentliche Begrenzungselemente:

o 110; *b* 010; *c* 001; *P* 111; *d* 021; mitunter ist der eine Pol nur durch die Endfläche abgeschlossen. Die Krystalle sind vielfache Zwillinge, ihre Flächen stark gerieft, wiederholt gebrochen und drusig. Ein Handstück ohne nähere Fundortsangabe zeigt ziemlich

grosse, kurzsäulenförmige, stark verwachsene, polysynthetische Krystalle auf rosenrothem, lamellarem Baryt; sie werden wesentlich von: *o* 110; *π* 130; *b* 010; *c* 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *k* 011; *d* 021 begrenzt, sind aber zu genaueren Bestimmungen untauglich.[1]) Das letzte der Stücke, von der Grube „Alte drei Brüder“, zeigt so stark verwachsene Individuen, dass nur kleine Partien einzelner Krystalle frei ausgebildet erscheinen. Begleitet ist der Stephanit von Calcit, Proustit, Chalkopyrit, Chloanthit und Baryt.

Kongsberg.

C. Morton in Stockholm beschrieb recht flächenreiche, kurzsäulenförmige Stephanitkrystalle, die im Jahre 1882 die „Gottes Hülfe in der Noth“-Grube auf Kongsberg lieferte; sie waren von ausgezeichneter Ausbildung und ihre Flächen mit Ausnahme einiger Prismen und der Basis, reflectirten sehr gut.[2]) Morton hat an denselben 18 einfache Gestalten beobachtet, von denen vier bislang nicht bekannt waren.

Fig. 12. ist die Reproduction des Morton'schen Bildes, welches den grössten — 1·9 mm langen, 1·6 mm breiten, 3·2 mm hohen — und bestgebildeten Krystall darstellt; derselbe hat nach *o'* $1\bar{1}0$ eine ziemlich dicke Zwillingslamelle eingeschaltet, von der in der Zeichnung abgesehen wurde.

c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *r* 221; *o* 110; *f* 133; *v* 132; *w* 131; *σ* 258; *ϑ* 152; *ε* 2.22.7; n_2 156; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *b* 010.

		Morton gem. (Mttl.)		gerechnet		
a 100 : *o*	110	32°	9½	32°	10′	32″
b 010 : *o*	110	57	49	57	49	28
: (*o*)	110	6	34⅖	6	31	36
o 110 : *P*	111	37	50⅚	37	51	20
: *h*	112	57	16¼	57	14	48
: *m*	113	66	42¼	66	47	13
: *r*	221	21	16	21	14	13
a 100 : *β*	101	42	36	42	33	37
: $\beta^{2/3}$	203	54	1½	54	1	12
: $\beta^{1/2}$	102	61	21½	61	25	53

[1]) Die einfachen Formen wurden an Abdrücken durch approximative Messung sichergestellt.

[2]) Groth Zeitschr. f. K. u. M. Bd. 9, 238.

		Morton gem. (Mttl.)		gerechnet		
b 010 : *e*	041	19	57½	20	2	47
; *d*	021	36	1¼	36	7	16
: *k*	011	55	31½	55	35	1
: *t*	023	65	26½	65	27	3
c 001 : *w*	131	66	42½	66	43	56
: *v*	132	49	16¾	49	18	39
: *f*	133	37	0½	37	47	18
: ϑ	152	61	1	60	54	33
: n_2	156	30	55	30	55	34
b 010 : ϑ	152	33	35¾	33	35	52
: n_2	156	60	43	60	40	26
σ 258 : *a*	100	75	56½	75	56	57
: *b*	010	67	44	67	33	3
: *c*	001	26	35[1])	25	54	17
ε 2.22.7 : *b*	010	25	56	25	56	12
: *c*	001	65	16	65	18	54

Cornwall.

Den einzigen, bis jetzt bekannten Stephanit-Krystall von Wheal Newton in Cornwall (sowie von einem englischen Fundorte überhaupt) hat W. J. Lewis in Cambridge gemessen;[2]) er ist vielfach von Zwillingslamellen durchsetzt und sitzt auf einer Unterlage von Siderit und Quarz. Seine Pyramiden und Brachydomen reflectiren gut, β 101 zeigt runde Erhöhungen und giebt keine Reflexe. Fig. 33 ist eine Copie der von Lewis dargestellten Horizontalprojection.

---

[1]) Morton führt den berechneten Winkel $\sigma : c = 26^0\ 5'\ 46''$ an und erklärt die bedeutende Differenz von $0^0\ 29'\ 14''$ durch die Streifung der Basis, deren Bild schwer fixirt werden konnte. Aus Morton's Elementen berechnet sich die Neigung $\sigma : c = 26^0\ 54'\ 6''$ und somit reducirt sich die Differenz auf $0^0\ 19'\ 6''$. Offenbar liegt hier ein Schreibfehler vor; indem die Einheiten der Minuten als Zehner der Sekunden angesetzt wurden. Die aus meinen Elementen gerechneten Winkel der Flächen-Normalen verglichen mit Morton's Messungen, weisen genügend nach, dass dem von ihm abgeleiteten Axenverhältniss keineswegs ein Vorzug gebührt.

[2]) Groth Zeitsch. f. K. u. M. VII. Bd. 577.
pag. 577. soll es heissen $h : z$ $33^0\ 35^3/_4{}'$ statt $h : r$
$e : z$ 30 56 „ $s : z$
$e : \lambda$ 56 30 „ $z : \lambda$

c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *ω* 134; *T* 142; *π* 130; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *b* 010; *a* 100; *β* 101; ν_4 4.21.13 und 3.16.10.

			Lewis gem. (Mttl.)		gerechnet		
c 001	: *m*	113	23°	10½	32°	12′	47″
	: *h*	112	32	42¾	32	45	12
	: *P*	111	52	7	52	8	40
	: *o*	110	90	2½	90	0	0
	: *t*	023	24	33½	24	32	57
	: *k*	011	34	28¼	34	24	59
	: *d*	021	52	46½	53	52	44
	: *b*	010	90	25 *app.*	90	0	0
	: *ω*	134	30	8½	30	10	45
T 142	: *h*	112	33	35	33	31	51
	: *b*	010	39	45½ *app.*	39	43	29
	: *P*	111	29	15	29	17	56
d 021	: *π*	130	45	15	44	27	25
	: *h*	112	43	11	43	14	26
	: *P*	111	45	23½	45	27	43
k 011	: *ω*	134	15	17	15	22	35
	: *h*	112	30	56	31	3	36
h 112	: *o′*	$1\bar{1}0$	76	27	76	27	23
k 011	: *β*	101	56	½ *app.*	56	5	4
	: ν_4	3.16.10	18	25	18	3	20
	:	4.21.13	18	36	18	24	59
	: *T*	142	26	6	26	8	21
d 021	: *o*	110	64	37	64	31	22
ν_4'' $\bar{3}.1\bar{6}.10$	: *o′*	$1\bar{1}0$	78	41	78	20	2
$\bar{4}.2\bar{1}.13$	: *o′*	$1\bar{1}0$	79	4	78	27	49
T 142	: ν_4	3.16.10	7	30	8	5	1
	:	4.21.13			7	43	22

Mexico.

Ein ausgezeichneter, 20 mm hoher, 12 mm breiter Stephanit-Krystall aus Mexico in der Sammlung des Prof. Genth in Philadelphia bot wegen seiner ungewöhnlichen Ausbildung G. vom Rath[1]) Veranlassung zur goniometrischen Untersuchung, die eine 15-zählige

[1]) Groth Zeitschr. f. K. u. M. Bd. 10. 173.

Combination, darunter eine stark ausgedehnte neue Gestalt ergab Die Resultate der Messung stimmen, wie G. vom Rath hervorhebt, bis auf wenige Minuten mit den aus Schröder's Axen gerechneten Winkelwerthen.

Fig. 18. stellt die nach v. Rath's Zeichnung symmetrisch entworfene Combination dar.

c 001; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *f* 133; *π* 130; *ξ* 311; *λ* 310; t_1 3.11.6; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *b* 010; *a* 100; *g* 201.

Zur Ermittelung des Zeichens der neuen Form t_1 3.11.6 diente nach Sicherstellung des Einfallens derselben in die brachydiagonale Zone von *h* 112

	gem. v. Rath	gerechnet
c 001 : t_1 3.11.6	54° 0′	53° 51′ 15″

Erklärung der Tafeln.

Tafel I.

Stereographische Projection sämmtlicher, am Stephanit nachgewiesenen Formen. (Seite 131 bis 134.)

Tafel II.

Fig. 1. Andreasberg. (Seite 182.)
c 001; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *k* 011; *d* 021; *b* 010; *v* 132.

Fig. 2. Joachimsthal. (Seite 173.)
c 001; *q* 114; *m* 113; *l* 223; *P* 111; *t* 023; *κ* 043; *d* 021; *o* 110; *b* 010.

Fig. 3. Přibram, (Eusebgang). (Seite 152.)
o 110; *b* 010; *c* 001; *s* 012; *t* 023; *k* 011, *j* 032; *d* 021; *e* 041; *β* 101; *ω* 134; *v* 132; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *p* 332; *r* 221.

Fig. 4. Freiberg. (Seite 185.)
c 001; *q* 114; *m* 113; *l* 223; *P* 111; *κ* 043; *o* 110; *t* 023; *d* 021; *b* 010.

Fig. 5. Andreasberg. (Seite 183.)
c 001; *m* 113; *l* 223; *P* 111; *o* 110; *k* 011; *d* 021; *b* 010; *γ* 151; *Γ* 371.

Fig. 6. Přibram, (Barbaragang.) (Seite 150.)
c 001; *o* 110; *b* 010; *U* 120; *π* 130; *I* 150; *P* 111; *h* 112; *ϱ* 241; *k* 011; *j* 032; *d* 021.

Tafel III.

Fig. 7. Přibram, (Barbaragang). (Seite 149.)
o 110; *b* 010; *P* 111; *β* 101; *m* 113; *h* 112; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *ω* 134.

Fig. 8. Přibram, (Eusebgang). (Seite 153.)
a 100; *λ* 310; *o* 110; *U* 120; *π* 130; *b* 010; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *p* 332; *r* 221; *d* 021; *e* 041; δ_3 081; *β* 101; *g* 201; *ξ* 312; *w* 131; *γ* 151;

Fig. 9. Přibram, (Eusebgang). (Seite 150.)
o 110; *b* 010; *π* 130; *h* 112; *P* 111; *k* 011; *κ* 043; *d* 021; *e* 041; *ω* 134; *w* 131; *γ* 151; *β* 101.

Fig. 10. Přibram, (Eusebgang.) (Seite 155.)
c 001; *o* 110; *b* 010; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *p* 332; *r* 221; r_2 331; ω_2 135; *ω* 134; ω_3 3.9.11; ω_4 267; ω_5 3.9.10; *T* 142; *K* 155; *β* 101; *g* 201; *G* 301; *B* 916; *ξ* 312; *ζ* 311; *λ* 310; *L* 210.

Fig. 11. Přibram, (Eusebgang). (Seite 153.)
o 110; *P* 111; *b* 010; *c* 001; *m* 113; *h* 112; p_1 443; *p* 332; *r* 221; r_1 773; *g* 201; *ζ* 311; *t* 023; *d* 021; *e* 041; *ω* 134; *K* 155; *T* 142; t_2 3.13.6.

Fig. 12. Kongsberg. (Seite 186.)
c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *r* 221; *o* 110; *f* 133; *v* 132; *w* 131; *σ* 258: *ϑ* 152; *ε* 2.22.7; n_2 156; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *b* 010.

Tafel IV.

Fig. 13. Ratibořic. (Seite 175.)
c 001; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *λ* 310; *b* 010; *f* 133; *T* 142; *d* 021; *k* 011; *t* 023.

Fig. 14. Přibram, (Barbaragang). (Seite 140.)
o 110; *b* 010; *a* 100; *c* 001; *h* 112; *P* 111; *β* 101; *d* 021; *k* 011; *m* 113.

Fig. 15. Přibram, (Barbaragang). (Seite 158.)
c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *k* 011; *d* 021; *b* 010; *β* 101.

Fig. 16. Přibram, (Eusebgang.) (Seite 151.)
o 110; *π* 130; *b* 010; *P* 111; *h* 112; *m* 113; *c* 001; *t* 023; *d* 021; *e* 041; *β* 101; *γ* 151; ν_3 192.

Fig. 17. Přibram. (Seite 154.)
c 001; *P* 111; λ 310; *b* 010; *o* 110; *U* 120; π 130; *a* 100; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; ω 134; *T* 142; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *r* 221; ξ 312; ζ 311; ϱ 241.

Fig. 18. Mexico. (Seite 189.)
c 001; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *f* 133; π 130; ζ 311; λ 310; t_1 3.11.6; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *b* 010; *a* 100; *g* 201.

Tafel V.

Fig. 19. Přibram, (Fundgrubner Gang). (Seite 159.)
c 001; *m* 113; *h* 112; *l* 223; *P* 111: p_2 554; *o* 110; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *b* 010; β 101; *K* 155; *H* 122; *w* 131; *W* 3.11.3; *T* 142; ω_3 3.9.11; ω_4 267.

Fig. 20. Joachimsthal. (Seite 172.)
c 001; *P* 111; *d* 021.

Fig. 21. Přibram, (Eusebgang). (Seite 161.)
c 001; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *r* 221; *o* 110; *a* 100; u 350; *U* 120; π 130; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *b* 010; $\beta^{1/2}$ 102; β 101; ζ 311; ω_1 5.15.27; ω 134; ω_4 267; ω_5 3.9.10; ω_6 13.39.40; *f* 133; *w* 131; *K* 155; *H* 122; h_1 356; *T* 142; t_2 3.13.6.

Fig. 22. Schemnitz. (Seite 181.)
c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *o* 110; ω 134; *v* 132; *w* 131; *A* 313; γ 151; β 101; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; δ_1 071; *b* 010.

Fig. 23. Přibram, (Barbaragang). (Seite 157.)
c 001; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *b* 010; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *a* 100; λ 310; *U* 120; π 130; β 101; *g* 201; ω 134; φ 535; Σ 211; ϑ 152; γ 151; Γ 371.

Tafel VI.

Fig. 24. Přibram, (Fundgrubner Gang). (Seite 162.)
c 001; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *p* 332; *o* 110; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *b* 010; ω_3 3.9.11; ω_4 267; *v* 132; *w* 131; *R* 121; ϱ 241; *K* 155.

Fig. 25. Řemišov. (Seite 179.)
c 001; *m* 113; *l* 223; *P* 111; *r* 221; α 013; *s* 012; *t* 023; $\varkappa$ 043; *d* 021; δ_3 081; β 101; *o* 110; π 130; *b* 010.

Fig. 26. Přibram, (Barbaragang). (Seite 160.)
c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *s* 012; *t* 023; *k* 011;

d 021; *e* 041; *b* 010; *ω* 134; *v* 132; *Ξ* 354; *γ* 151; *Γ* 371; *F* 519; *Σ* 211.

Fig. 27. Přibram, (Barbaragang). (Seite 156.)
c 001; *t* 023; *k* 011; *j* 032; *d* 021; *b* 010; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *l* 150; *λ* 310; *a* 100; *β* 101; *g* 201; *τ* 512; *ξ* 311; *Σ* 211; *ψ* 532; *γ* 151.

Fig. 28. Přibram, (Fundgrubner Gang). (Seite 157.)
P 111; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *l* 223; p_2 554; *p* 332; *r* 221; *o* 110; *β* 101; *t* 023; *k* 011; *κ* 043; *d* 021; *e* 041; ω_3 3.9.11; ω_4 267; *v* 132; *T* 142.

Fig. 29. Přibram, (Johanngang?). (Seite 151.)
o 110; *a* 100; *b* 010; *c* 001; *s* 012; *t* 023; α 045; *k* 011; *d* 021; *β* 101; *g* 201; *q* 114; *h* 112; *P* 111; *p* 332.

Tafel VII.

Fig. 30. Přibram, (Barbaragang). (Seite 163.)
c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *ω* 134; *β* 101.

Fig. 31. Přibram, (Johanngang). (Seite 164.)
c 001; *s* 012; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *E* 061; q_1 115; *m* 113; *h* 112; *l* 223; *P* 111; *r* 221; r_2 331; *o* 110; *a* 100; *β* 101; *H* 122; *f* 133; *ϱ* 241; *w* 131; *ϑ* 152; *π* 130.

Fig. 32. Přibram, (Johanngang). (Seite 165.)
c 001; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *l* 223; *P* 111; *r* 221; *o* 110; *β* 101; *π* 130; *l* 150; *ω* 134; *f* 133; *w* 131; *ϱ* 241.

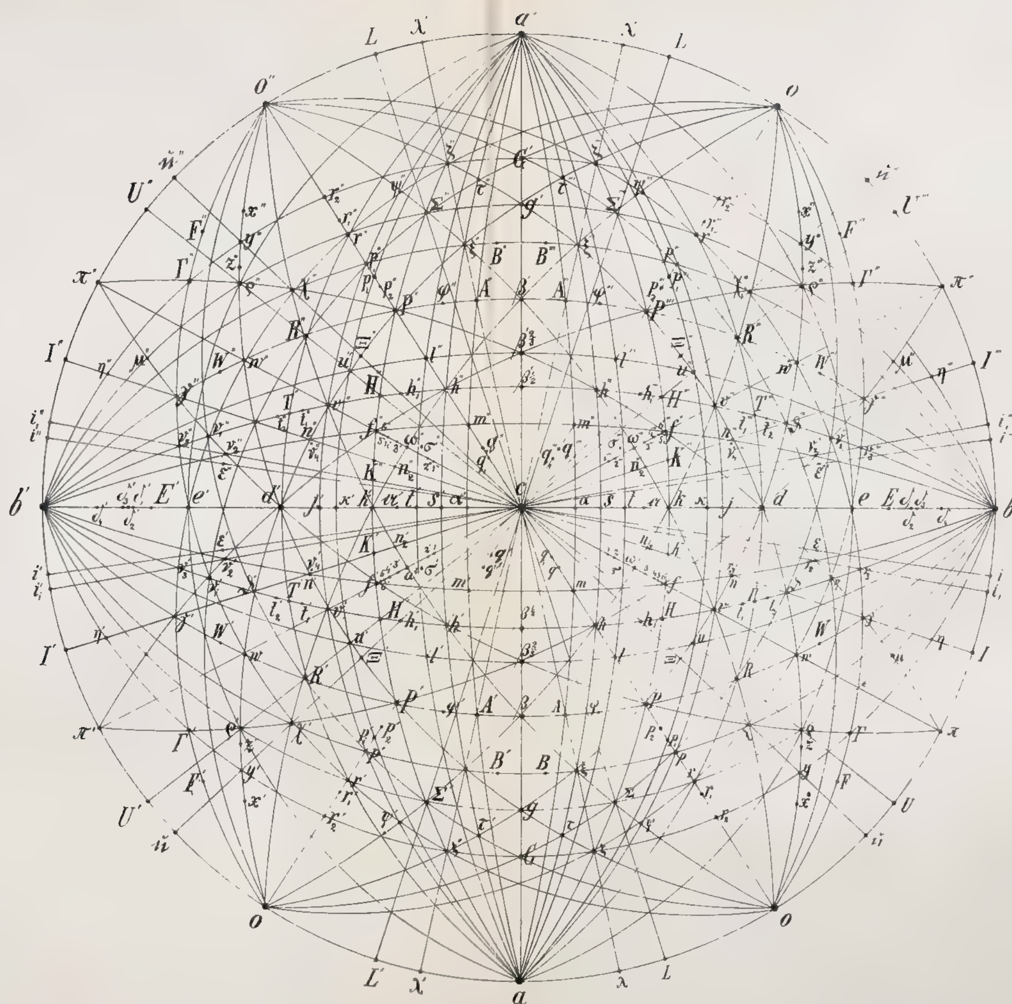
Tafel VIII.

Fig. 33. Wheal Newton, Cornwall. (Seite 187.)
c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *ω* 134; *T* 142; *π* 130; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *b* 010; *a* 100; *β* 101; ν_4 4.21.13 und 3.16.10.

Fig. 34. Freiberg. (Seite 69.) Joachimsthal. (Seite 172.)
c 001; *o* 110; *b* 010.

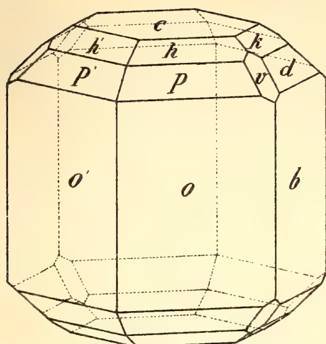
Fig. 35. Řemišov; Penetrations-Zwilling nach *o* 110. (Seite 180.)
c 001; *m* 113; *l* 223; *P* 111; *p* 332; *s* 012; *t* 023; *κ* 043; *d* 021; *o* 110; *b* 010.

Fig. 36. Joachimsthal; Zwilling nach *o* 110. (Seite 173.)
q 114; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *π* 130; *ω* 134; *f* 133; *v* 132; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *b* 010; *a* 100.

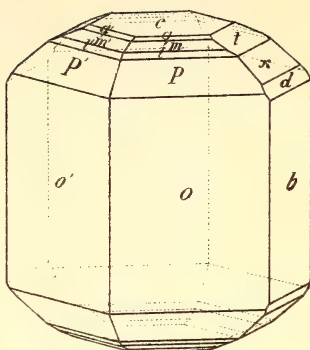


Lith. Farský Prag.

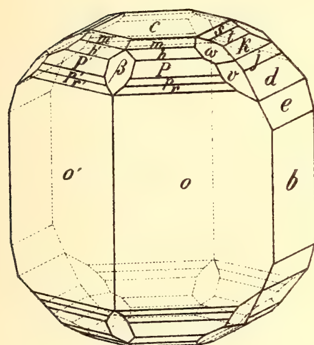
1



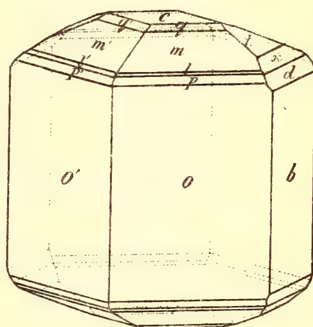
2



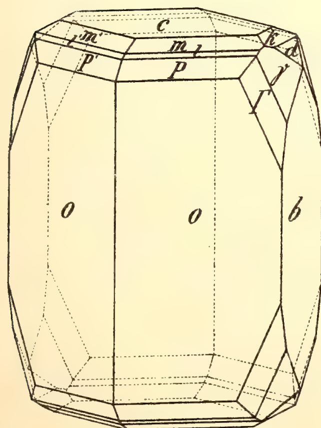
3



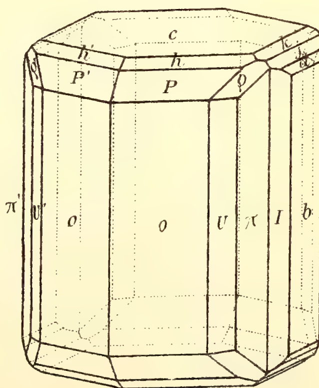
4



5

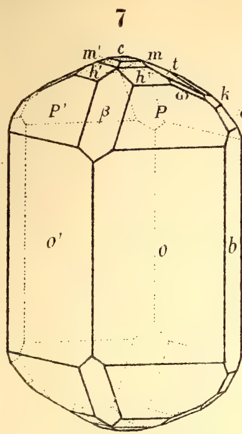


6

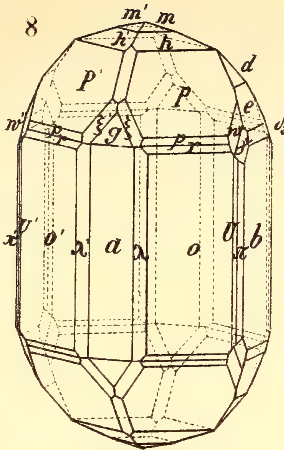


Lith. Farský Prag.

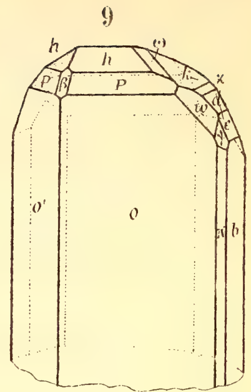
7



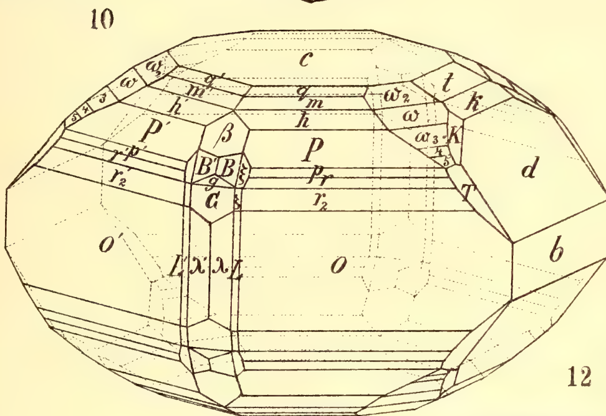
8



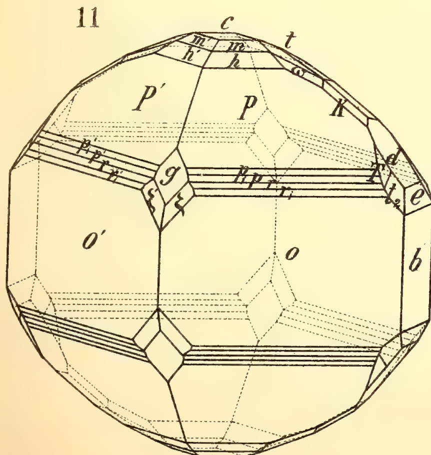
9



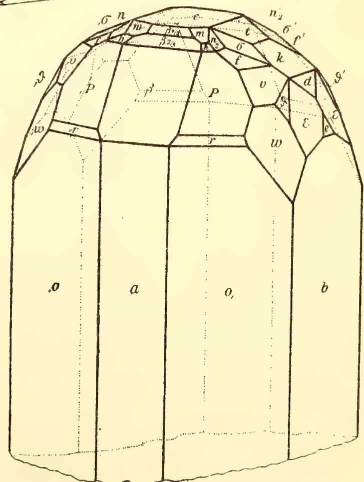
10



11

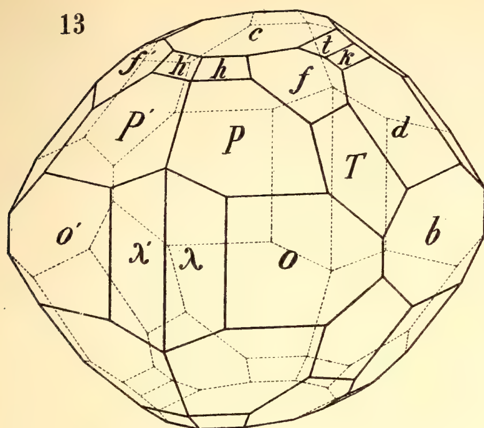


12

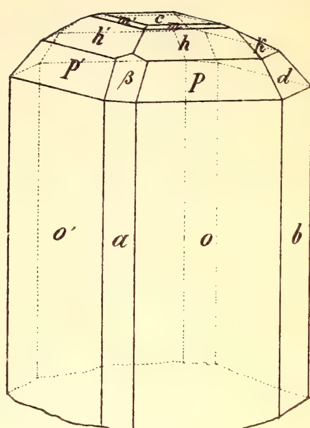


Lith. Farský Prag.

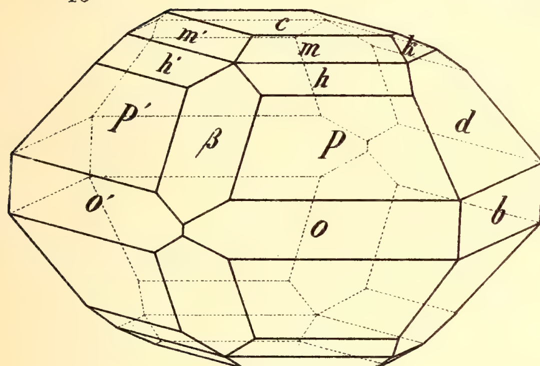
13



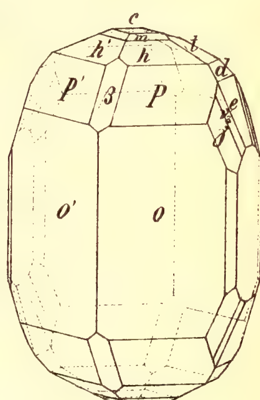
14



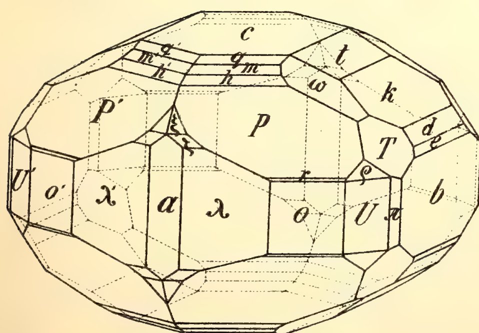
15



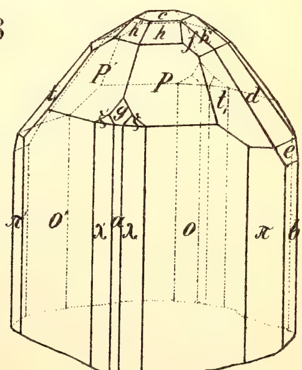
16



17



18



Lith. Farský Prag.

19

20

21

22

23

Lith. Farský Prag.

24

25

26

27

28

29

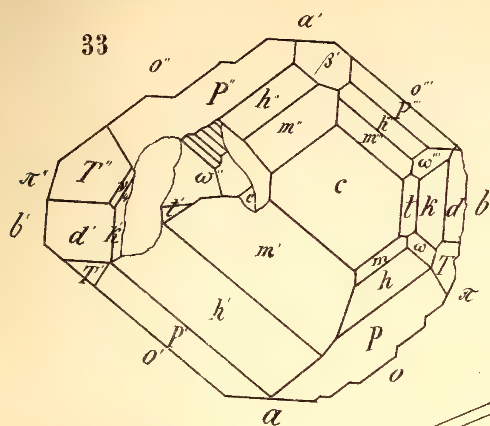
Lith. Farský Prag.

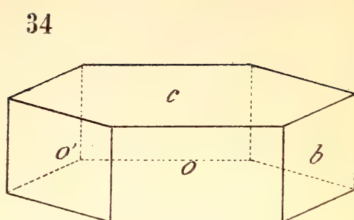
30

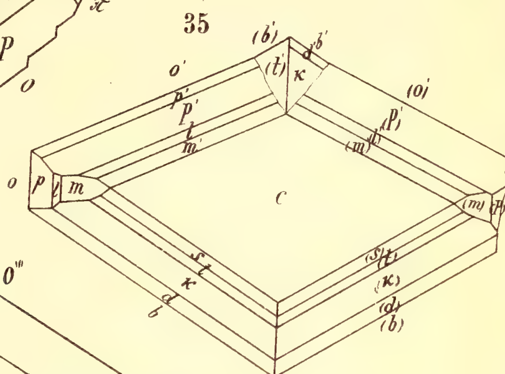
31

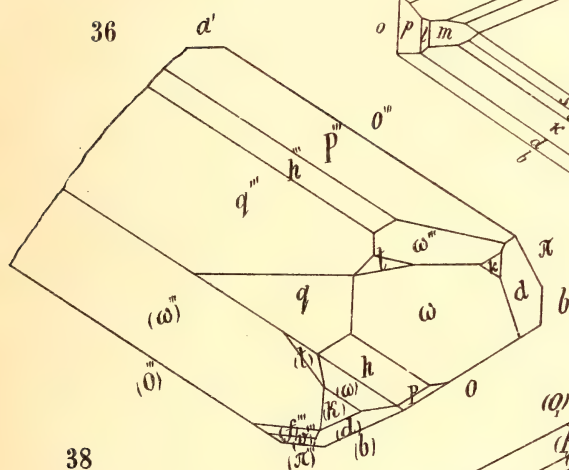
32

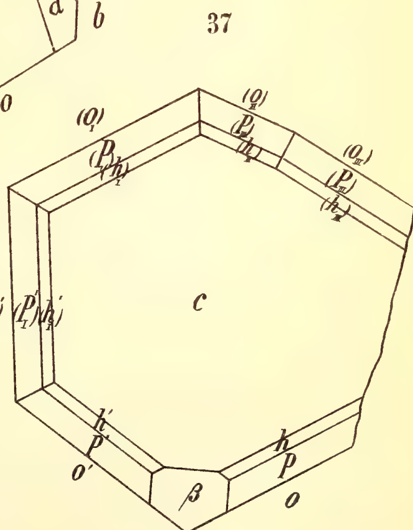
Lith. Farský Prag.

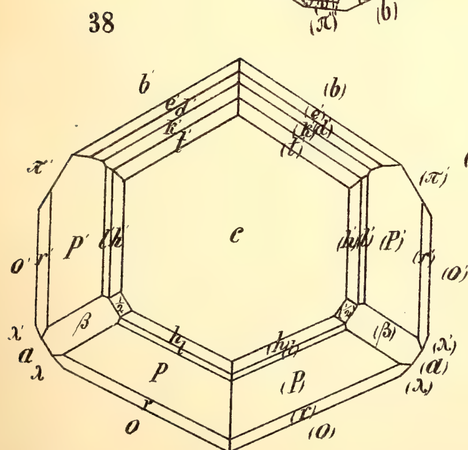




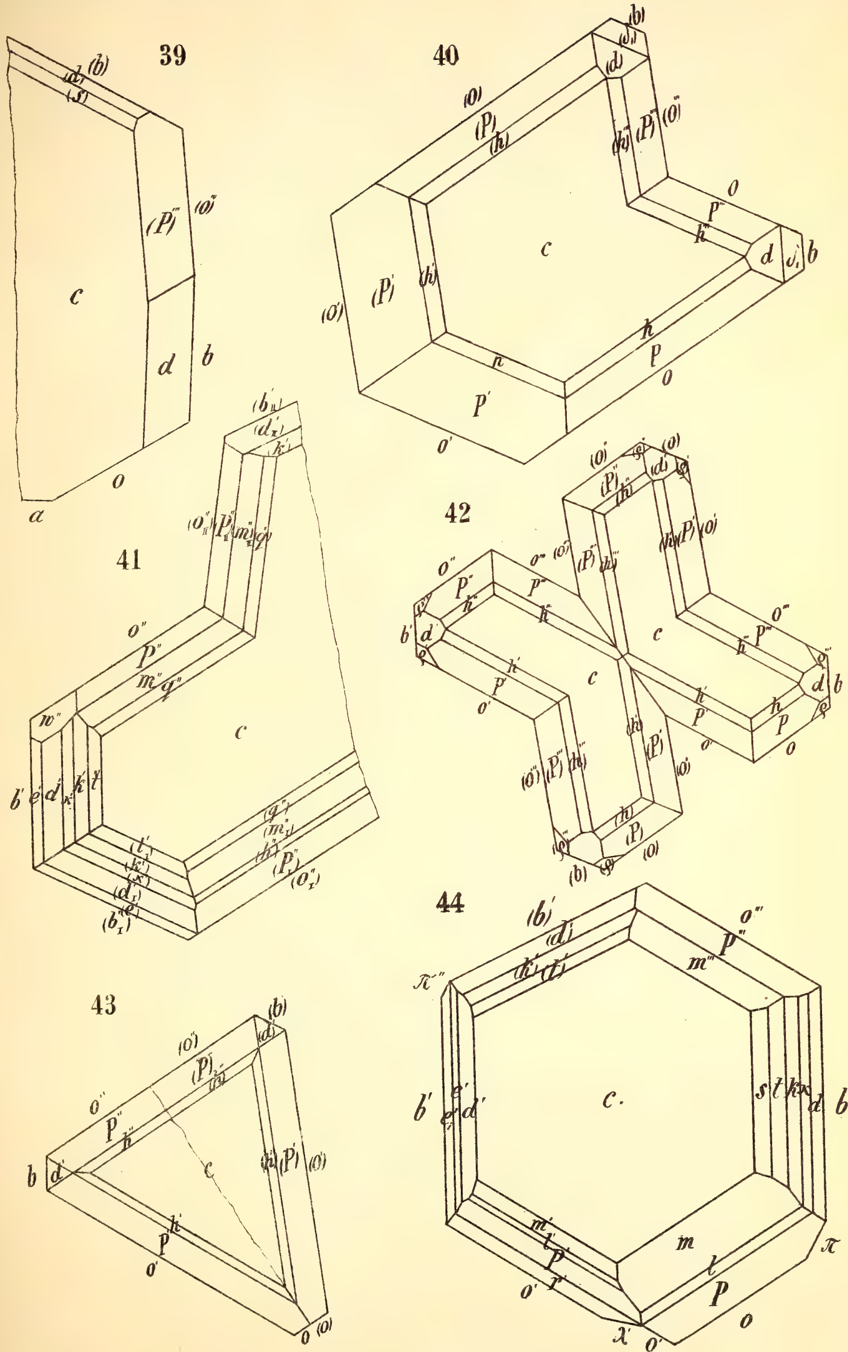






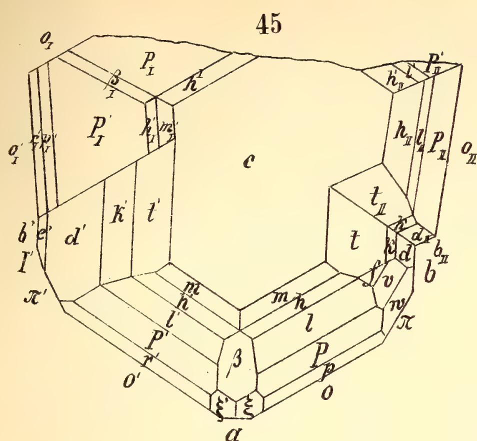


Lith. Farský Prag.

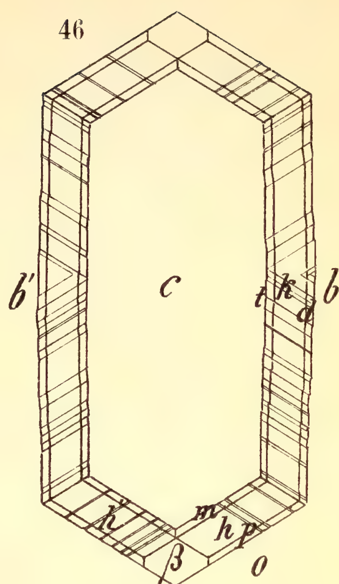


Lith. Farský Prag.

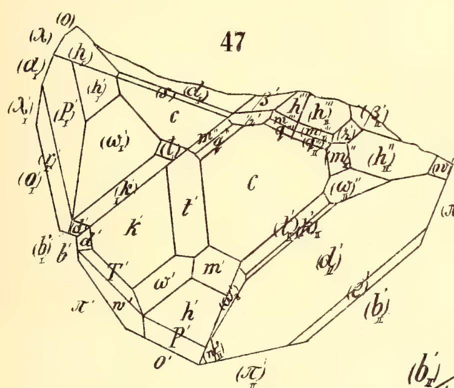
45


c
t
k'
t'
d'
b
v
m
h
l
P
p
o
β
ξ
a

46

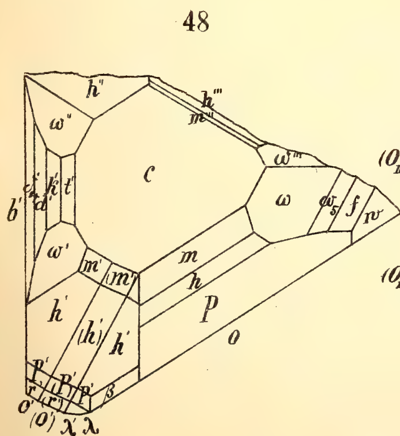

c
b'
t
k
d
b
m
h
p
β
o

47


c
C
t'
k'
m'
h'
o'

49

48


h''
c
ω
f
m
h
P
o
b'

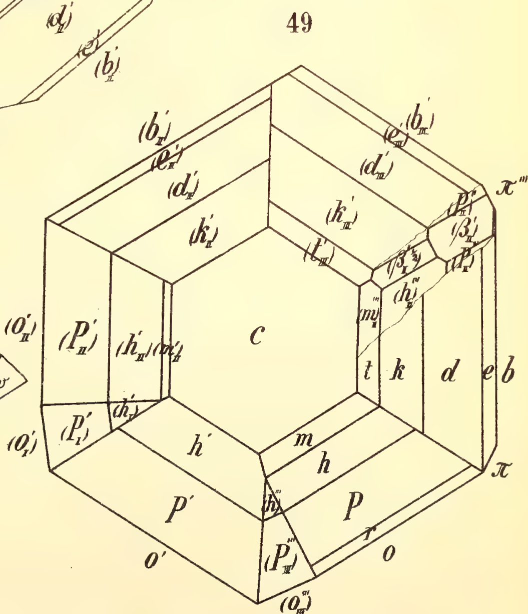

c
t
k
d
e
b
h'
m
h
P'
P
o'
o
π

Fig. 37. Altwožic; Vierling nach beiden Gesetzen. (Seite 176.)
c 001; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *β* 101.

Fig. 38. Přibram; Zwilling nach *o* 110. (Kreuzklüftner Gang.) (S. 165.)
c 001; *h* 112; *l* 223; *P* 111; *r* 221; *o* 110; $\beta^{1/2}$ 102; *β* 101; *a* 100; *λ* 310; *π* 130; *b* 010; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041.

Tafel IX.

Fig. 39. Andreasberg; Zwilling nach *o* 110. (Seite 183.)
c 001, *o* 110; *b* 010; *a* 100; *d* 021; *s* 012; *P* 111.

Fig. 40. Andreasberg, (Samson); Zwilling nach *o* 110. (Seite 183.)
c 001; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *d* 021; δ_1 071; *b* 010.

Fig. 41. Přibram; Drilling nach *o* 110. (Seite 166.)
c 001; *o* 110; *b* 010; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *t* 023; *k* 011; *ϰ* 043; *d* 021; *e* 041; *w* 131.

Fig. 42. Andreasberg; Penetrations-Zwilling nach *o* 110. (Seite 183.)
c 001; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *d* 021; *b* 010; *ρ* 241.

Fig. 43. Andreasberg; Zwilling nach *o* 110, in einer zur Zwillings-Fläche normalen Ebene verwachsen. (Seite 184.)
c 001; *h* 112; *P* 111; *o* 110; *d* 021; *b* 010.

Fig. 44. Řemišov; Zwilling nach *o* 110. (Seite 179.)
c 001; *m* 113; *l* 223; *P* 111; *r* 221; *s* 012; *t* 023; *k* 011; *ϰ* 043; *d* 021; *e* 041; *E* 061; *o* 110; *λ* 310; *π* 130; *b* 010.

Tafel X.

Fig. 45. Přibram, (Eusebgang); Drilling nach *o* 110. (Seite 167.)
c 001; *m* 113; *h* 112; *l* 223; *P* 111; *p* 332; *r* 221; *o* 110; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *b* 010; *β* 101; *ξ* 312; *f* 133; *v* 132; *w* 131; *π* 130; *I* 150; *a* 100.

Fig. 46. Přibram; polysynthetischer Krystall. (Seite 168.)
c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *β* 101; *b* 010; *o* 110.

Fig. 47. Přibram, (Johanngang); Drilling nach *o''* $\bar{1}\bar{1}0$ und *π* 130. (Seite 170.)
c 001; *q* 114; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *r* 221; *s* 012; *t* 023; *k* 011; *d* 021; *e* 041; *b* 010; *o* 110; *π* 130; *λ* 310; *a* 100; $\beta^{1/2}$ 102; *β* 101; *ω* 134; *w* 131; *T* 142.

Fig. 48. Přibram, (Eusebgang); säulenförmiger Krystall, mit einer dicken, nach *π* 130 eingewachsenen Zwillings-Lamelle. (Seite 169.)
c 001; *m* 113; *h* 112; *P* 111; *r* 221; *o* 110; *t* 023; *k* 011;

d 021; δ_4 0.14.1; b 010; ω 134; ω_5 3.9.10; f 133; w 131; β 101; λ 310.

Fig. 49. Altwožic; Zwillingsgruppe nach o 110 und π 130. (Seite 177.) c 001; m 113; h 112; P 111; r 221; t 023; k 011; d 021; $\beta^{1/2}$ 102; β 101; o 110; π 130; b 010.

9.

Vorläufiger Bericht über die Rudisten der böhmischen Kreideformation.

Vorgetragen von **Philipp Počta** am 24. Februar 1886.

I. Einleitung.

Das von der geologischen Abtheilung des Komitées zur naturwissenschaftlichen Durchforschung von Böhmen zusammengebrachte und im Museum des Königreiches Böhmen aufbewahrte Rudisten- und Chamidenmaterial wurde mir vor etwa 3 Jahren zur Beschreibung gütigst übergeben.

Da die Herausgabe der von mir vorbereiteten grösseren Abhandlung über diesen Gegenstand wegen bedeutender, durch grössere Anzahl von Tafeln erwachsender Kosten voraussichtlich eine geraumere Zeit in Anspruch nehmen dürfte, erlaube ich mir vorläufig einen kurzen Bericht über die Fortschritte meiner bisherigen Untersuchungen dieser Petrefakten zu erstatten.

Alle mir vorliegenden und in den Sammlungen des böhmischen Museums befindlichen Rudisten und Chamiden stammen insgesammt aus der cenomanen Stufe unserer Kreideformation, welcher Umstand mit mehreren älteren Berichten über das Vorkommen dieser Versteinerungen bei uns in Böhmen nicht im Einklange steht.

Es hat nämlich schon D'Orbigny[1]), irre geführt durch den Reussischen Ausdruck „unterer und oberer Plänerkalk" beide hiemit bezeichnete Schichten für weit jüngere Ablagerungen betrachtet und dem zu Folge auch vielen unseren Rudistenarten ohne alle haltbare Gründe das turone, ja sogar senone Alter zugeschrieben. Es wurde aber schon durch die Arbeiten der geologischen Section des Landesdurchforschungskomitées[2]) bewiesen, dass die unter den Namen

---

[1]) Prodrome de Palaeontologie stratigraphique 1850 Vol. II.

[2]) Krejčí. Allgemeine und orographische Verhältnisse sowie Gliederung der böhm. Kreideformation im Archiv für naturwiss. Landesdurchforschung 1869 B. I. Abth. II.

„Plänerkalk“ einbezogene Schichten meist cenomanen und nur theilweise turonen Alters sind.

Alle von Reuss angeführten Fundorte der Rudisten in diesem „Plänerkalk“ sind aber eben ausgesprochenes Cenoman.

Ähnlichen Irrthum beging auch H. Wolf,[3]) welcher die Rudistenzone in unserer Kreideformation in das obere Turon einstellt.

In letzterer Zeit gab Herr Prof. Dor. G. Laube[4]) aus dem Malnitzer Grünsande (Turon) von Wobora und Čenčic bei Laun zwei leider nicht gut erhaltene Rudistenarten bekannt, von denen die mit dem Namen Radiolites inexpectus belegte Form meiner Ansicht nach der Gattung Monopleura unterzustellen wäre, wogegen die zweite Caprina Telleri einem Steinkern der grösseren Schale von Exogyra lateralis sehr ähnlich ist. Beide Formen bedürfen jedoch einer weiteren näheren Untersuchung, welche erst, vielleicht auf Grund günstiger erhaltener Exemplare gemacht, ein definitives Urtheil ermöglichen wird.

Ehe ich zur eigentlichen Aufzählung des mir vorliegenden Materiales schreite, will ich hier ein kritisches Verzeichniss der durch die Arbeiten von Geinitz, Reuss, Frič, Teller u. and. bisher bekannten Rudistenarten folgen lassen, wobei ich zugleich bemerke, dass ich in diesem kleinen Aufsatze durchwegs nur die wichtigste Literatur anführen will.

	Art	Citate	Pagina	Tafel	Figur	Fundort in Böhmen
	Sphaerulites					
1	*mammillaris*	Radiolit. mam. Matheron [5])				
		D'Orbigny [6])	218	560		
		Frič [7])	201 194			Mezholes, Kuttenberg Chotzenitz

[3]) Über die Gliederung der Kreideformation in Böhmen. Im Jahrbuch der k. k. geol. Reichsanstalt 1865. pag. 183 –198.

[4]) Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt 1885 pag. 75.

[5]) Catalogue methodique et descriptif des corps organisés du Departm. des Bouches du Rhône 1842.

[6]) Palaeontologie française. Terrains crêtacées Tome IV. 1847.

	Art	Citate	Pagina	Tafel	Figur	Fundort in Böhmen
2	*Saxoniae*	Römer [8])	35	7	1	
		Frič [7])	209 218 228 229 234			Grossdorf, Wodolka, Teltschitz, Chwaletitz, Jungferndorf, Oberwald, Debrno
3	*bohemicus*	Teller [9])	100	I	1—8	Schlossberg
4	*undulatus*	Hippurites undul.				
		Geinitz [10])	87	19	6—10	
		Reuss [11])	54	45	7—12	Kutschlin
5	*lombricalis*	D'Orbigny [6])	214	555	4—7	
		Frič [7])	195			Siegesfeld
6	?*agariciformis*	De la Metherie [12])	396	57	12	
		Frič [7])	210			Smrček
	Monopleura					
7	*Germari*	Sphaer ellipticus & Germari Geinitz [10])	17 59 60	7 9 14 16 19	1 4, 5 3—5 2, 3 11	Kutschlin
		Reuss [11])	55	45	13—15	
8	*trilobata*	Caprotina trilob.				
		D'Orbigny [6])	240	582		
		Frič [7])	195 199			Radowesnitz Siegesfeld
9	? *inexpecta*	Radiolites inexp.				Čenčic (Malnitzer Grünsand)
		Laube [4])	75			

[7]) Palaeontologische Untersuchungen der einzelnen Schichten in der böhm. Kreidef. I. Korytzaner Schichten. Im Archiv für naturwiss. Durchforschung von Böhmen Band I. 1869.

[8]) Die Versteinerungen des norddeutschen Kreidegebirges 1840—41.

[9]) Über neue Rudisten aus der böhm. Kreideformation. In Sitzgsber. der k. Akad. der Wiss. Band LXXV. 1877.

	Art	Citate	Pagina	Tafel	Figur	Fundort in Böhmen
	Plagioptychus					
10	*Haueri*	Caprina Haueri Teller [9])	104	I II III	9 1—5 1, 2, 5	Schlossberg
11	? *Coquandiana*	Caprina Coq. D'Orbigny [6])	185	539		
		Frič [7])	234			Korytzan
12	*augustissimus* Poč.	conf. Caprina laevigata Frič [7])	199			Radowesnitz
	Caprotina					
13	*semistriata*	D'Orbigny [6])	244	594		
		Hipp. falcatus Reuss [11])	55	45	16	Kutschlin
	Ichthyosarcolithes					
14	*ensis* Poč.	Caprinella triangularis Frič [7])	199			Radowesnitz

Es waren somit bisher 14 Arten bekannt, von denen jedoch zwei noch weiterer Bestätigung bedürfen.

Es ist dies

1. Sphaer. agariciformis, dessen Vorkommen in Böhmen ziemlich zweifelhaft erscheint und

2. Monopl. inexpecta, deren definitive Aufstellung erst auf Grund eingehender Untersuchungen an besser erhaltenen Exemplaren möglich sein wird.

II. Beschreibung der Arten.

In diesem Abschnitte will ich der bestehenden Eintheilung der in Rede stehenden Versteinerungen in eigentliche Rudisten und in

[10]) Charakteristik der Schichten und Petrefakten des sächsisch.-böhm. Kreidegebirges 1839—42.

[11]) Versteinerungen der böhmischen Kreideformation 1845—6.

[12]) Journal de Physique 1805.

Chamiden vorläufig Folge leisten und gedenke erst in der von mir bereits angekündigten grösseren Arbeit diese Eintheilung näher zu besprechen, einige nicht unbegründete Bedenken gegen dieselbe zu erheben und die Verwandtschaft zwischen beiden diesen Familien näher zu beleuchten.

Von den eigentlichen Rudisten ist es vorerst die

Gattung **Radiolites**

die in unserer Kreide, obwohl nur durch unbedeutende Bruchstücke vertreten ist.

1? *Radiolites Zignana Pir.*

1868. Pirona [13]) pag. 419. Taf. XXII. Fig. 1—11.

Es lag mir das Ende der unteren viereckigen Schale vor, deren äussere Schalenschicht aus dünnen, auf der Oberfläche Segmente bildenden Blättchen besteht. Aus den cenomanen Schichten von Radowesnitz.

Gattung **Sphaerulites**

1. *Sphaerulites mammillaris* Math.

1842 Matheron [5]) pag.
1847 D'Orbigny [6]) pag. 218 Taf. 560.
1857 Sphaer. angeoides Bayle [14]) pag. 690.

Bei der Untersuchung des zahlreichen Materiales dieser Art hat sich gefunden, dass die Unterschiede zwischen der so allgemein verbreiteten Art Sphaer. angeoides und zwischen unseren Formen von so gewichtiger Natur sind, dass beide von einander getrennt werden müssen. Ich will hier nur auf die feinere Struktur der äusseren Schalenschicht bei Sphaer. angeoides und auf die abweichenden Formen der Deckelschalen beider Arten hinweisen.

Obzwar diese Species bei uns in einigen Gegenden (Kuttenberg, Chotzenitz) in grossen Massen vorkommt, so gelang es mir erst im Jahre 1883 die flache Oberschale zu finden.

Das sehr zahlreiche, mir zum Gebote stehende Material ermöglichte mir eine Reihe von Alterstadien zusammenzustellen, bei

---

[13]) Le Ippuritidi del colle die Medea nel Friuli In: Memoire del Instituto Veneto di scienze, letteri et arti Vol. XIV.

[14]) Nouvelles observations sur quelques espèces de Rudistes In: Bulletin de la Soc. geol. de France Tome XIV Ser. 2.

welcher das Gesetz zu beobachten ist, dass je jünger die Form desto flacher die Schale.

2. *Sphaerulites Saxoniae* Röm.

1841. Römer[8]) pag. 35 Taf. VII. Fig. 1.

Diese bereits aus Deutschland eingehend beschriebene Form lag mir aus den Fundorten Grossdorf, Wodolka, Teltschitz, Chwaletitz, Jungferndorf, Oberwald, Marienhain, Korytzan, Mezholes, Nollendorf, Holubitz und Debrno — insgesammt Fundorte der cenomanen Schichten — vor.

Bemerkenswerth ist bei dieser Art, dass die Deckelschale bisher nicht mit Sicherheit bekannt ist.

Neben vielen Steinkernen dieser Art liegen mir auch einige kleine Jugendstadien vor, welche mit den von Lundgren[15]) aus der schwedischen Kreide beschriebenen Abarten eine grosse Ähnlichkeit besitzen.

3. ? *Sphaerulites tener* nov. spec.

Aus den Lagern des Sphaer. mammillaris bei Kuttenberg stammen einige Bruchstücke der Unterschale, deren äussere Schalenschicht sich durch ungewöhnlich feine Struktur auszeichnet.

Ich habe demnach diese Art mit dem Namen tener (zart) belegt.

4. *Sphaerulites bohemicus* Tell.

1877 Teller [9]) pag. 100 Taf. I. Fig. 1—8.

Es ist erst vor kurzer Frist Herrn Prof. Dr. A. Frič gelungen am Sandberge bei Teplitz eine kleine Kluft ausfindig zu machen, aus welcher eine grosse Anzahl von Individuen dieser Art ausgebeutet wurden. Obzwar die Beschreibung, welche Teller von dieser Art gegeben, in Hinsicht auf Vollständigkeit nichts zu wünschen übrig lässt, so war es mir dennoch möglich auf Grund des sehr zahlreichen Materiales manches Neue, wie in Betreff der äusseren Form so auch bezüglich des Schlossaparates der unteren Schale beobachten zu können.

5. *Sphaerulites undulatus* Gein.

1839—42 Geinitz [10]) pag. 87 Taf. 19 Fig. 6—10.
1846 Reuss [11]) pag. 54 Taf. 45 Fig. 7—12.

---

[15]) Om rudister i Kritformationen i Sverge 1870.

Es ist auch mir leider nicht möglich über diese etwas problematische Art eingehender zu berichten, da mir nur vier Deckelschalen aus der Rudistenbank bei Kuttenberg vorlagen, welche, obzwar alle ziemlich gut erhalten, dennoch über diesen Rudisten keinen Aufschluss geben.

6. *Sphaerulites* conf. *socialis*. D'Orbig.

1847 D'Orbigny [6]) pag. 213 Taf. 555 Fig. 1—3.

Eine ziemlich gut erhaltene Kolonie mit 15 Individuen, denen insgesammt die Oberschale fehlt, stammt aus den cenomanen Schichten von Holubitz und steht in Folge ihrer Beschaffenheit der äusseren Schalewand und der kreisrunden Öffnung am Nächsten dieser von D'Orbigny aus dem Turonien von Angoulême beschriebenen Art.

7. *Sphaerulites* conf. *lombricalis* D'Orb.

1847 D'Orbigny [6]) pag. 214 Taf. 555 Fig. 4—7.

Einige langen Stücke mit länglichen, durch Querblätter reichlich durchgewebten Rippen auf der Oberfläche von Siegesfeld bei Velím könnten am besten zu dieser Art gestellt werden.

Gattung **Monopleura**,

die schon zu den Chamiden gestellt wird, ist von allen hieher gehörigen Gattungen in unserer Kreide am zahlreichsten vertreten.

Die meisten Arten zeichnen sich jedoch durch eine Beschaffenheit des Schlossaparates aus, welche, so weit mir die allerdings äusserst umfangreiche Literatur [16]) bekannt ist, noch nirgends bemerkt wurde. Es besitzen nämlich die meisten unserer Arten auf der Deckelschale drei Zähne und in der Unterschale dem zu Folge drei Zahngruben, welcher Umstand hievon resultirt, dass sich der hintere Zahn auf der Oberklappe getheilt hat.

Die grosse Anzahl der mir vorliegenden Exemplare ermöglichte mir das zahlreiche Anschleifen und Verfertigen von Dünnschliffen, wodurch ich in den Oberklappen dieser Gattung sowie auch der nachfolgenden Gattungen eigenthümliche Gefässkanäle entdeckte, welche den bekannten Kanälen in der Oberschale der Hippuriten analogisch sind.

---

[16]) Das Literaturverzeichnis, welches ich in möglichster Vollständigkeit in meiner grösseren Abhandlung veröffentlichen gedenke, zählt jetzt schon etwa 250 Schriften.

1. *Monopleura Germari* Gein.

1839—42 Geimitz [10]) pag. 17, 59—60, Taf. 7, 9, 14, 16—19.
1846 Reuss [11]) pag. 55 Taf. 45, Fig. 13—15.

Es lagen mir einige Exemplare aus dem Cenoman von Korytzan und Radowesnitz vor, worunter eines von sehr gutem Erhaltungszustande. Das Schloss ist aber leider an diesem Exemplare unzugänglich.

Die Oberschale stimmt ihrem Äusseren nach gänzlich mit vielen von den isolirt vorkommenden Deckelschalen von Monopleura überein, welcher Umstand mich neben der äusseren Form bewog, diese Art zur Gattung Monopleura zu stellen. Isolirte Deckelschalen, die ich hieher stelle, kommen nicht sehr selten in Korytzan, Radowesnitz und Přemyšlan vor.

2. *Monopleura trilobata* D'Orb.

1847 D'Orbigny [6]) pag. 240, Taf. 582.

Die von D'Orbigny gegebene Diagnosis dieser Art ist leider nicht scharf genug praecizirt, um bei der Bestimmung vieler unserer Formen nicht in Unsicherheit zu gerathen. Es zeigt sich eben das Merkmal „drei Falten auf der der Schlossfalte gegenüber liegenden Wand“ in mehr oder weniger deutlichen Entwickelung bei allen Arten der Gattung Monopleura.

Es sei vorläufig hier sichergestellt, dass typische Formen dieser Art bei uns in den cenomanen Ablagerungen u. zwar bei Radowesnitz und Korytzan ziemlich häufig vorkommen.

Einige Exemplare, bei denen das Schlossaparat ausserordentlich gut erhalten war, hatten es ermöglicht, die weit grösste Anzahl der isolirt vorkommenden Deckelschalen als hieher gehörig zu bestimmen.

Zu bemerken wäre hier noch, dass in letzterer Zeit White [17]) zwei Monopleuren aus den Kreideablagerungen von Texas beschrieb, welche manchen unseren von mir vorläufig hergestellten Formen ähnlich sind.

Eine gründliche Untersuchung der französischen Originale dürfte wohl hier Licht schaffen und die deutliche Umgrenzung der Art Mon. trilobata möglich machen.

---

[17]) On mesozoic fossils In: Bulletin of the United States geolog Survey Nr. 4. Washington 1884.

3. *Monopleura exilis* nov. spec.

Mit diesem Namen bezeichne ich einige, etwa 6 cm lange, leider ziemlich schlecht erhaltene Monopleuren aus den cenomanen Ablagerungen von Korytzan und Radowesnitz.

4. *Monopleura accuminata* nov. spec.

Von dieser neuen Art sind mir nur Unterschalen bekannt. Dieselben sind etwa 19—24 mm hoch gegen das Ende rasch sich zuspitzend und horizontal um eine halbe Windung gedreht. Die Oberflächenschicht ist hier gut erhalten und zeigt rippenförmige, rauhe Erhöhungen. Beide mir vorliegenden Exemplare stammen aus den cenomanen Ablagerungen von Radowesnitz.

5. *Monopleura contorta* nov. spec.

3 ziemlich schlecht erhaltene Unterschalen, die sich dadurch auszeichnen, dass sie etwa in der Hälfte ihrer Höhe gleichmässig, wie um eine durch ihre Mitte gezogene Axe gewunden sind. An einem Stücke sind zwei aneinander innig gepresst. Auch die Struktur der Schalenwand ist eine eigenthümliche, da die Oberfläche mit feinen Längsrippen bedeckt ist.

Aus den cenomanen Schichten von Korytzan.

6. *Monopleura opima* nov. spec.

Eine äusserst dicke, knollenförmige Deckelschale mit nur zwei kräftigen, kegelförmigen Zähnen aus den cenomanen Schichten von Radowesnitz. An dieser monströsen Form ist der Wohnungsraum nur schwach angedeutet, wogegen uns der übrige Körper der Schale einen Klumpen ohne jede Verzierung vorstellt.

7. *Monopleura planorpeculata* nov. spec.

Diese Art wurde ähnlich der vorgehenden auf Grund einiger gut erhaltenen Oberschalen aufgestellt. Dieselben erreichen eine bedeutende Grösse, messen etwa 42 mm in der Längaxe, sind flach und mit zwei langen, blattförmigen und der Spitze zu gefurchten Zähnen versehen, deren Basis in der Form einer Scheidewand sich um den vorderen Theil der Klappe zieht.

Dadurch stehen diese Deckelschalen jenen der Gattung Sphaerulites ziemlich nahe, unterscheiden sich aber allerdings durch das

Vorhandensein einer tiefen Zahngrube, welche auf einen langen und ebenfalls blattförmigen Zahn der Unterschale schliessen lässt.

8. *Monopleura carinoperculata* nov. spec.

Es lagen mir einige, nicht grosse etwa 10—15 mm in der Längsaxe und 6—8 mm in der Breite messende Oberschalen vor, die durch einen ziemlich scharfen Kiel auf der äusseren Oberfläche sich leicht von allen anderen unterscheiden. In Betreff des Schlossaparates stehen sie der Art trilobata ziemlich nahe.

Selbe stammen aus den cenomanen Ablagerungen von Korytzan.

9. *Monopleura minima* nov. spec.

Ist eine von jenen Formen, welche dem Äusseren nach der Gattung Requienia ähnlich in Betreff der Beschaffenheit des Schlossaparates jedoch zu Monopleura zu stellen sind. Sie ist von kleinen Dimensionen, misst 5 bis 30 mm in der Höhe und hat in der Unterschale, so wie in der Oberschale je einen Zahn. In Kolonien pressen sich einzelne Individuen so zusammen, dass an ihnen Kanten entstehen. Eine von solchen Kolonien mit 5 in verschiedenen Altersstadien befindlichen Individuen, deren Abbildung ich für die oberwähnte Abhandlung vorbereite, bietet ein sehr schönes Bild des gesellschaftlichen Lebens dieser Thiere.

Neben diesen hier angeführten Monopleuren liegen mir noch mehrere andere Formen vor, die sehr nahe den von Matheron[18]) aufgestellten und aus dem Urgonien Frankreichs stammenden Arten sind und zwar:

10. *Monopleura imbricata* Math.

11. *Monopleura multicarinata* Math.

12. *Monopleura rugosa* Math.

Da es aber scheint, dass man mehrere dieser Arten zusammenziehen müssen wird, lässt sich ein definitiver Schluss vor der Besichtigung der Matheron'schen Originale nicht fällen.

Dasselbe gilt von den von diesem Palaeontologen neu errichteten Gattungen Ethra und Agria, welche in unserer Kreide auch vertreten zu sein scheinen.

---

[18]) Recherches Palaeontologiques-Etage Urgonien. Bisher nur Tafeln erschienen.

Nebstdem stimmen einige unserer Unterschalen mit der Diagnosis und Abbildung der von White[17]) aus der Kreide von Texas beschriebenen Art

13. *Monopleura marcida* White

überein

Gattung **Requienia**

ist mit Sicherheit aus unserer Kreide nicht bekannt, obzwar viele Formen angetroffen werden, die dem Äusseren nach mit den von Matheron[18]) gegebenen Abbildungen übereinstimmen. Es lässt sich aber, wie bekannt, nach der äusseren Form nicht schliessen, man muss sich von der Beschaffenheit des Schlossaparates überzeigen und in der Hinsicht ist mir bisher von den nicht seltenen Exemplaren mit blosgelegter Schlossgegend kein einziges bekannt, dass zahnlos oder nur mit einem Zahn — was für die Gattung Requienia nach den bisherigen Diagnosen chaıakteristisch ist — versehen wäre.

Um die Dimensionen dieses kleinen Aufsatzes nicht über das Maass zu erweitern, will ich hier nur andeuten, dass ich demnächst die Diagnosis dieser Art in der Richtung der Beschaffenheit des Schlossaparates zu verbessern trachten werde.

Gattung **Plagioptychus**

ist bei uns durch einige Arten vertreten.

1. *Plagioptychus Haueri* Tel.

1887 Caprina Haueri Teller[9]) pag. 105 Taf. I. Fig. 9. Taf. II. Fig. 1—5 und Taf. III. Fig. 1, 2, 5.

Aus einer Kluft im Porphyre am Sandberge bei Teplitz wurden neben Sphaer. bohemicus auch mehrere Deckelschalen und einige Unterschalen dieser Art in die Sammlungen des böhm. Museums gebracht.

Obzwar unter den Deckelschalen manche rein auspraeparirt und von dem festen Hornstein gänzlich entledigt wurde, so kann ich doch nichts Neues von Belange der vortrefflichen Schilderung dieser Art, wie sie Teller in oben angeführter Abhandlung geliefert hat, hinzufügen.

2. *Plagioptychus angustissimus* nov. spec.

Die Unterschale ist stark komprimirt und mit einem rasch sich verengenden und nach Oben um eine ganze Windung gedrehten

Wirbel versehen, welcher niemals an die Schale gelehnt ist, sondern von ihr absteht. Diese Form ist dem äusseren Habitus nach der Requienia laevigata D'Orb sehr ähnlich, obzwar sie allerdings von bedeutend geringeren Dimensionen ist und nebstdem sich durch das Schlossaparat unterscheidet, welches auf der Oberschale zwei, auf der unteren Schale einen Zahn ausweist.

Die Oberschale ist etwa 40 Mm. lang und dabei nur höchstens 15 Mm. in der Mitte breit; der vordere Zahn ist an dem für das Thier bestimmten, äusserst engen (4—6 Mm) Raume, wogegen der hintere bis an den Rand der Schale gerückt ist. Zwischen beiden liegt die nicht sehr tiefe, jedoch ziemlich weite Vertiefung für den Zahn der unteren Schale.

Die äussere Schalenschicht besteht aus feinen, horizontalen Blättern und ist auf der Oberfläche fein gestreift. Isolirte, gut erhaltene Deckschalen dieser Art treten häufig auf und dieser Umstand gab mir Anlass zu verschiedenen Schliffen, wodurch ich mich über das innere Gefässsystem belehren konnte.

3. *Plagioptychus venustus* nov. spec.

Mehrere Oberschalen mit sehr gut erhaltenem Schlossaparat, welcher aus zwei starken und dicken Zähnen und einer zwischen beiden liegenden tiefen Grube besteht.

Die jüngeren Exemplare sind flach und klein, wogegen die älteren tiefer und grösser, jedoch nie über 30 Mm in der Längsaxe messen.

Diese Art stammt aus den cenomanen Ablagerungen von Radowesnitz und Korytzan, ist der vorgehenden Art ziemlich ähnlich, unterscheidet sich jedoch von ihr schon dem Äusseren nach durch bedeutendere Breite.

4. *Plagioptychus bohemicus* nov. spec.

Her stelle ich eine stark abgerollte und in Folge dessen ungünstig erhaltene Deckelschale mit undeutlichem Schlossaparat, welche aus den cenomanen Ablagerungen von Korytzan herrührt.

5. *Plagioptychus alienus* nov. spec.

Bisher nur eine gut erhaltene, kleine Oberschale aus dem Cenoman von Zbyslav bekannt. Der Wirbel ist nach Vorne eingerollt und nahe an den Schlossrand gelegt; die äussere Schalenschicht besteht

aus dünnen Lagen und blättert sich leicht ab. Der vordere Zahn ist dick, dreiseitig, der hintere konisch. Zwischen beiden liegt die weite Zahngrube für den Schlosszahn der unteren Klappe. Die Muskeleindrücke sind gut angedeutet.

6. ? *Plagioptychus Coquandianus* D'Orb.

1847 D'Orbigny [6]) pag. 185 Taf 539.

Es liegen mir mehrere, leider nicht ganze Unterschalen von verschiedenen Grössen vor, die von allen bisher beschriebenen Plagioptychusarten am nächsten der D'Orbignyschen Caprina Coquandiana stehen. Das Schloss ist leider gänzlich unzugänglich und auch die Oberschale bis jetzt nur aus Bruchstücken bekannt. D'Orbigny stellt diese Art als Leitfossil für das Turonien auf, was, wenn unsere Bestimmung sich als richtig erweisen sollte, durch unsere Funde nicht bestätigt wäre, da alle mir bekannten Exemplare aus den rauhen, sandigen cenomanen Kalksteinen von Korytzan und Přemyšlan stammen.

Gattung **Caprina**.

1. ? *Caprina adversa* D'Orb.

1847 D'Orbigny [6]) pag. 182 Taf. 536 und 537.

Von Korytzan stammt ein Steinkern, der vielleicht dieser Art angehören dürfte.

Gattung **Caprotina**.

1. *Caprotina semistriata* D'Orb.

1847 D'Orbigny [6]) pag. 244 Taf. 594.

Ein vollständiges Exemplar mit ziemlich bedeutend eingerollten Wirbel der unteren Schale aus dem Hornsteine von Kutschlin befindet sich in den Sammlungen des National-Museum in Budapest, wo es mir durch Güte des Custos Herrn Dor. Krenner zur näheren Besichtigung und Abbildung zugänglich gemacht wurde.

Gattung **Ichthyosarcolithes**.

Aus dieser Gattung kommen bei uns einige Steinkerne der rechten Schale vor, welche sich dadurch auszeichnen, dass sie gerade oder nur unbedeutend gekrümmt sind.

1. *Ichthyosarcolithes ensis* nov. spec.

1869 Caprinella triangularis Frič [7]) pag. 199.

Grössere Bruchstücke von flachen, etwa 8—13 Mm hohen und 25—30 Mm breiten, mit zugeschärften Rändern versehenen Unterschalen, welche auf einigen Stellen Längsrippen — die Ausfüllungen der Längskanäle — zeigen. An dem einen Rande erhöht sich die Wand schneller unter Bildung einer schrägen Fläche so, dass der horizontale Durchschnitt die Form eines Dreieckes annimmt, dessen zwei Seiten beinahe einander gleich lang sind, wogegen die dritte — die schräge Fläche — bedeutend kürzer ist. An demselben Schnitte erscheinen drei polygonale kantige Kammern, von denen die verhältnissmässig enge Wohnkammer des Thieres von den zwei übrigen kleineren Kammern (? Zahngruben) durch eine ziemlich dicke Wand geschieden ist. Wasserkammern konnte ich nicht beobachten.

2. *Ichthyosarcolithes marginatus* nov. spec.

Es lag mir eine theilweise vom Gestein verdeckte, schwach gekrümmte und flache Unterschale vor, welche etwa bis zur Hälfte mit äusseren glatten Oberflächenschicht bedeckt ist. Und auf dieser oberen Partie der Schale zieht sich an beiden Rändern ein gut abgegrenzter, etwa 1·3 Mm breiter Saum.

An der unteren Hälfte der Schale ist diese äussere Schicht theilweise abgebrochen und es kommen die Ausfüllungen der Kanäle in Form von Längsrippen zum Vorschein.

Neben diesem Exemplar sind mir noch etwa 3 Unterschalen bekannt, bei denen die äussere Schicht gänzlich fehlt und nur die zuweilen in Folge des ungünstigen Erhaltungszustandes verschiedenartig abgeriebenen Längsrippen zu sehen sind.

Bei diesen zuletzt angeführten Formen ist eine sichere Bestimmung allerdings nicht möglich.

III. Schlussbemerkungen.

Wenn wir also die Resultate meines Studiums der böhm. Rudisten, so weit sie sich derzeit gestalten, in's Auge fassen, so finden wir, dass die Zahl der aus Böhmen bekannten Arten von 14 (beziehungsweise 12) auf 31 gestiegen ist.

Es sind dies nachstehende Arten:

1. ? Radiolites Zignana Pir.
2. Sphaerulites mammilaris Math.
3. Sphaer. Saxoniae Röm.
4. ? Sphaer. tener. nov. spec.
5. Sphaer. bohemicus Tel.
6. Sphaer. undulatus Gein.
7. Sphaer. cof. socialis D'Orb.
8. Sphaer. cof. lombricalis D'Orb.
9. Monopleura Germari Gein.
10. Mon. trilobata D'Orb.
11. Mon. exilis nov. spec.
12. Mon. accuminata nov. spec.
13. Mon. contorta nov. spec.
14. Mon. opima nov. spec.
15. Mon. planoperculata nov. spec.
16. Mon. carinoperculata nov. spec.
17. Mon. mimima nov. spec.
18. Mon. imbricata Math.
19. Mon. multicarinata Math.
20. Mon. rugosa Math.
21. Mon. marcida White.
22. Plagioptychus Haueri Tel.
23. Plag. angustissimus nov. spec.
24. Plag. venustus nov. spec.
25. Plag. bohemicus nov. spec.
26. Plag. alienus nov. spec.
27. ? Plag. Coquandianus D'Orb.
28. Caprina adversa D'Orb.
29. Caprotina semistriata D'Orb.
30. Ichthyosarcolithes ensis nov. spec.
31. Ichthyos. marginatus nov. spec.

In der von mir vorbereiteten grösseren Abhandlung über Rudisten hoffe ich nicht nur die hier angeführten neuen Arten näher beschreiben, sondern auch in mancher Hinsicht Einiges zur näheren Kenntniss dieser, noch immer nicht genau bekannten Petrefakten beitragen zu können.

10.

Ueber die jährliche Periode der Richtung des Windes.

Vorgetragen von Prof. Dr. F. **Augustin** am 12. März 1886.

(*Mit 1 Tafel.*)

Die Wanderung der Sonne zwischen den beiden Wendekreisen hat auf die Richtung des Windes eine entschiedene Einwirkung, welche sich in einer mehr oder minder ausgesprochenen jährlichen Periode derselben kundgibt. Die Windesrichtung unterliegt im Laufe des Jahres periodischen Veränderungen. Mit der Umkehr der Temperaturunterschiede zwischen Land und Meer findet auch ein regelmässiger Wechsel der Winde nach entgegengesetzten Jahreszeiten Winter und Sommer statt; es lösen sich entweder die Winde entgegengesetzter Richtungen in ihrer Herrschaft ab, oder geht dort, wo die Richtungen

Nördl. Halbkugel. Südl. Halbkugel.

Fig. 1.

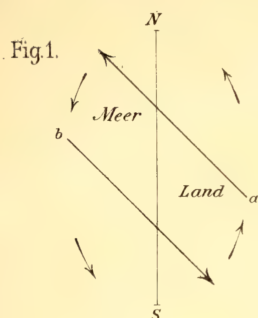


Fig. 2.

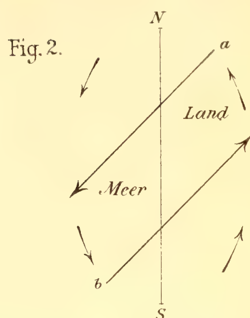


Fig. 3.

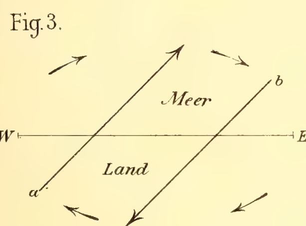


Fig. 4.

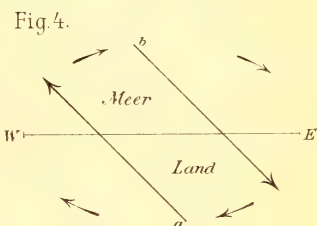


Fig. 5.

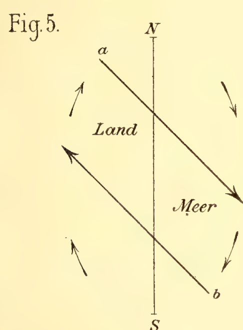


Fig. 6.

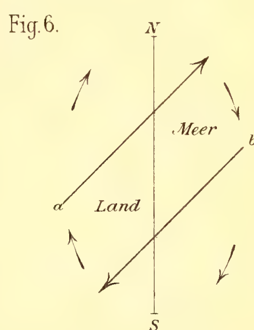


Fig. 7.

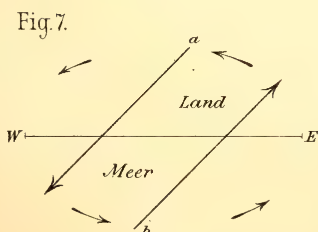
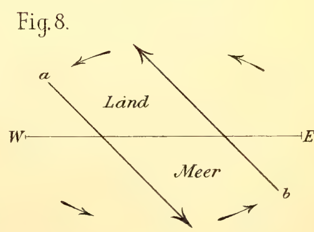


Fig. 8.



Lith. Farský. Prag.

gleichmässiger auf das Jahr vertheilt sind, das Häufigkeitsmaximum mit dem Eintritt einer anderen Jahreszeit auf andere Richtungen über.

Der jahreszeitliche Windwechsel ist eine allgemeine, namentlich in dem Gebiete der grossen Monsune, der Winde der Jahreszeiten, mit jedem Jahre regelmässig wiederkehrende Erscheinung. Aber auch in aussertropischen Breiten tragen die Winde einen monsunartigen Charakter, der freilich erst im Mittel längerer Beobachtungsreihen oder erst im Mittel für mehrere Orte deutlich hervortritt.

Die jährliche Veränderung der Windrichtung besteht in einer Drehung derselben. Die Häufigkeitsmaxima wandern in einer bestimmten Aufeinanderfolge mit den Jahreszeiten von einer Richtung zur anderen, so dass der Wind im Laufe des Jahres eine vollständige Umdrehung um den Horizont des Beobachtungsortes macht.

Es handelt sich nun darum zu bestimmen, wie sich die 8 Windrichtungen in verschiedenen Gebieten und Windsystemen während des Jahres verändern, zu welchen Zeiten die einzelnen Richtungen am häufigsten wehen und in welchem Sinne die Wanderung der Häufigkeitsmaxima erfolgt.

In der vorliegenden Untersuchung wurden die Beobachtungen einer grossen Anzahl von Stationen aus allen Welttheilen geprüft und zur Bestimmung der jahreszeitlichen Drehung des Windes verwendet. Bei einem so veränderlichen Elemente, wie es die Windrichtung ist, können nur lange Beobachtungsreihen an wenig von der Umgebung beeinflussten Orten über die periodische Aenderung derselben Aufschluss geben; an Stationen mit ungünstiger Lage oder mit kurzen Beobachtungsreihen, dann an Stationen mit zahlreichen Calmen oder mit einer das ganze Jahr vorherrschenden Windrichtung erscheint die jährliche Periode gestört.

Im Ganzen wurden die Beobachtungen an ca. 700 Stationen untersucht. Es wurden für jede Station die Häufigkeitsmaxima der Windrichtungen und ihre Wanderung mit den Jahreszeiten bestimmt und dann die Gebiete mit rechtsdrehender von den Gebieten mit linksdrehender Bewegung des Windes geschieden. Eine besondere Aufmerksamkeit wurde den Küstengebieten gewidmet, um aus den daselbst stattfindenden Veränderungen den Einfluss der Vertheilung des Landes und des Wassers auf die jahreszeitliche Winddrehung bestimmen zu können.

Die Untersuchung der jährlichen Periode der Windrichtung im gleichen Umfange wie für die Jahreszeiten auch für die Monate durchzuführen, erscheint bis jetzt aus Mangel an dem dazu nöthigen

Material unmöglich; es wird vorläufig im Anhang der Verlauf der Aenderungen von einem Monate zum anderen bloss an einigen Orten verfolgt.

Die Arbeit wurde dadurch wesentlich erleichtert, dass sich bereits zahlreiche Sammlungen und Zusammenstellungen der Windrichtung in den Werken Buchan's, Coffin's, Dove's, Hann's, Mohn's, Supan's, Wojejkov's etc. vorfinden. Namentlich aber wurden Supans Zusammenstellungen der Winde nach den Jahreszeiten in dem Werke „Statistik der unteren Luftströmungen" Leipzig 1881 und dann die in der „Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie" gegebenen Resultate der Windbeobachtungen benützt. Die weiter unten in den Tabellen angeführten Beispiele sind meistens diesen beiden Publicationen entlehnt.

In den Tabellen 1—10 sind die Häufigkeitszahlen der Windrichtungen für eine grössere Anzahl von Orten nach den Jahreszeiten, in der Tabelle 11 für einige Orte nach den Monaten enthalten. Die Häufigkeitsmaxima sind durch fettgedruckte Zahlen kenntlich gemacht. Die Jahreszeiten werden verkürzt geschrieben und zwar W. = Winter, F. = Frühling, S. = Sommer, H. = Herbst. Jedem Orte ist neben der geograph. Breite und Länge auch die Anzahl der Beobachtungsjahre beigefügt.

I.

In Europa erfolgt an der bei weitem grössten Anzahl der Stationen die Wanderung der Häufigkeitsmaxima der Windrichtungen mit den Jahreszeiten im Sinne gegen den Uhrzeiger also vom S über E nach N und über W nach S. Diese dem scheinbaren Laufe der Sonne entgegengesetzte Drehung des Windes ergibt sich schon aus den Zusammenstellungen Schouw's und Kaemtz's, welche zu dem Resultate führten (Kaemtz, Lehrbuch der Meteorologie I. p. 247), dass in unserem Welttheil im Winter der südliche, im Frühling der östliche, im Sommer der nördliche und westliche und im Herbst wiederum der südliche Luftstrom besonders häufig auftrete.

Die vom Winter zum Sommer nach links gehende Drehung des Windes ist vorwiegend in Skandinavien, Dänemark, auf den britischen Inseln, in Westfrankreich, Deutschland, Oesterreich-Ungarn und auch im nördlichen und mittleren Russland bis etwa 50° N. Ausnahmsweise ist sie auch im Gebiete des mittelländischen Meeres anzutreffen. Die in der Tabelle 1. gegebenen Windverhältnisse einiger Orte machen

die links gehende jahreszeitliche Drehung des Windes in dem angeführten Theile von Europa ersichtlich.

Tabelle 1.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
	Uleaborg 64° 59′ N, 25° 30′ E v. G., 24 J.								Christiania 59° 55′ N, 10° 43′ E, 16 J.							
W.	13	**11**	**14**	**19**	20	12	6	5	9	24	13	5	12	9	4	**4**
F.	**16**	10	12	11	18	11	12	10	10	16	9	6	21	**17**	**5**	4
S.	14	10	12	9	14	15	**16**	**10**	7	15	11	**8**	**22**	15	5	3
H.	14	8	11	12	**26**	**16**	7	6	**11**	**27**	**14**	5	11	7	3	4
	Orel 52° 58′ N, 35° 39′ E, 8 J.								Köln 50° 55′ N, 6° 55′ E, 25 J.							
W.	5	13	**10**	**31**	7	16	4	14	3	4	4	**15**	**20**	16	28	10
F.	**9**	**16**	6	23	4	16	7	19	**8**	**7**	**5**	12	10	13	26	**19**
S.	5	13	6	18	5	**27**	6	**20**	6	4	3	8	11	17	**33**	18
H.	**7**	15	8	27	**7**	19	5	12	4	4	5	13	17	**18**	29	10
	Millbrook 49° 12′ N, 2° 7′ W, 4 J.								Paris 48° 50′ N, 2° 20′ E, 40 J.							
W.	5	12	7	**12**	**19**	21	16	8	10	11	7	**10**	17	19	16	10
F.	**6**	**20**	**13**	8	14	19	14	7	**14**	**16**	8	7	13	16	15	11
S.	5	19	6	4	11	20	**24**	**10**	11	10	5	5	11	21	**24**	**13**
H.	3	17	10	8	16	**23**	15	8	8	10	7	10	**19**	**22**	14	10
	Innsbruck 47° 16′ N, 11° 19′ E, 28 J.								Simferopol 44° 57′ N, 34° 6′ E, 31 J.							
W.	23	10	7	3	10	8	**22**	**17**	**7**	**15**	**31**	17	6	6	10	8
F.	22	18	7	4	**16**	**8**	10	11	5	10	22	14	5	8	19	**17**
S.	21	**18**	**15**	**5**	13	7	13	10	1	3	23	20	4	**12**	**28**	9
H.	**26**	15	9	3	12	8	14	12	4	13	**34**	**18**	4	6	11	10

Das Gebiet mit positiver jahreszeitlicher Winddrehung im Sinne der Doveischen Windregel erstreckt sich über einen bedeutend kleineren Theil von Europa. Es nimmt die Mittelmeerländer und Südrussland ein. Ausserdem weisen einige Stationen im Alpengebiete, dann Ostfrankreich im Gegensatze zu Westfrankreich, ferner in Skandinavien die Nordküste und die Ostseeküste rechtsdrehende Bewegung des Windes mit den Jahreszeiten auf.

Die in der Tabelle 2 angeführten, den verschiedenen Gegenden Europa's angehörenden Orte zeigen klar den Gegensatz zwischen den extremen Jahreszeiten Winter und Sommer in Bezug auf das Auftreten der Luftströmungen. Werden im Winter die Winde von der äquatorialen Seite häufig, so wehen im Sommer die Winde von der polaren Seite und umgekehrt werden im Winter die Winde von der polaren, so werden im Sommer die von der äquatorialen Seite verstärkt.

Tabelle 2.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
	Vardö 70° 22′ N, 31° 7′ E, 16 J.								Pitea 65° 19′ N, 21° 30′ E, 7½ J.							
W.	7	9	4	6	11	**35**	**12**	14	16	12	3	4	23	**16**	**13**	**13**
F.	11	11	6	11	10	12	8	**22**	**17**	**14**	8	11	24	10	8	8
S.	**12**	8	**7**	**11**	**21**	10	6	**22**	16	10	**12**	**16**	24	6	7	9
H.	6	9	4	6	10	32	12	15	17	8	5	7	**26**	14	11	11
	Charkow 54° 4′ N, 36° 9′ E, 18 J.								St. Peter 47° 2′ N, 13° 36′ E, 10 J.							
W.	4	6	**28**	10	9	10	22	11	**14**	**26**	27	10	2	5	4	**11**
F.	5	6	24	**12**	**9**	**11**	22	11	10	20	**29**	15	8	9	4	4
S.	**10**	7	17	6	7	10	**27**	**16**	7	13	19	**22**	**20**	**9**	4	5
H.	8	**8**	24	10	8	9	21	12	10	16	24	18	11	10	**4**	5
	Verona 45° 26′ N, 11° 0′ E, 73 J.								Madrid 40° 24′ N, 3° 41 W, 10 J.							
W.	**7**	**9**	15	11	8	**14**	**27**	**9**	**13**	**31**	**10**	5	9	17	8	7
F.	4	8	**30**	19	9	9	15	6	12	17	9	**8**	**13**	20	11	10
S.	5	8	30	**20**	7	8	15	7	10	19	8	7	8	**25**	**12**	11
H.	5	8	24	16	**9**	11	20	7	11	17	10	8	13	21	9	**11**

In der Tabelle 3. werden die Windverhältnisse Oran's und Biskra's gegeben, um das Vorhandensein der jahreszeitlichen Winddrehung auch in Nordafrika nachzuweisen. In Oran findet der Uebergang von den SW-Winden im Winter zu den NE, N, NW-Winden des Sommers im Sinne gegen den Uhrzeiger statt. Dagegen erfolgt in Biskra der jahreszeitliche Windwechsel durch eine Drehung im Sinne mit dem Uhrzeiger.

Tabelle 3.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
	Oran 35° 44′ N, 0° 41′ W, 17 J.								Biskra 34° 51′ N, 5° 40′ E, 7 J.							
W.	14	16	2	**6**	**11**	**27**	6	18	**18**	3	3	17	5	2	4	**48**
F.	26	24	**2**	2	4	15	4	23	11	4	**4**	30	6	4	4	36
S.	**33**	**25**	1	1	1	3	1	**35**	2	3	3	**44**	**9**	**9**	5	24
H.	22	22	1	3	5	14	4	28	8	7	3	25	6	5	**5**	41

Soweit das vorhandene Material gestattet, einen Schluss auf die Windverhältnisse Asiens zu ziehen, so kann man Westsibirien, Turan, die Umgebung des Kaspisees; in Indien das Deltagebiet, die Westküste Vorderindiens und dann einige Gegenden in China und Japan als Gebiete mit zurückdrehendem Wind bezeichnen.

An den in der Tabelle 4 angeführten Orten erreichen das Maximum der Häufigkeit im Winter die N-Winde, im Sommer die S- oder SW-Winde; die Drehung von der Richtung des Winters zu der des Sommers erfolgt über W.

Tabelle 4.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW		N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Tobolsk 58° 12′ N, 68° 18′ E, 20 J.									Peking 39° 57′ N, 116° 29′ E, 23 J.								
W.	4	4	5	**35**	**20**	11	10	12		18	10	2	6	9	13	**4**	**38**
F.	6	5	**7**	22	19	14	9	17		10	9	3	12	**23**	**16**	3	24
S.	**14**	**8**	7	15	14	14	10	**21**		**18**	**13**	**6**	**14**	22	12	2	13
H.	5	3	5	14	17	**24**	**17**	14		17	10	3	7	15	13	4	31
Asterabad 36° 52′ N, 53° 49′ E, 5 J.									Nangasaki 33° 45′ N, 130° 0′ E, 6½ J.								
W.	14	**18**	**22**	**12**	4	9	14	7		**51**	11	3	3	3	4	5	**21**
F.	**19**	7	9	4	1	10	31	19		38	6	5	**5**	19	10	**6**	11
S.	11	1	3	1	3	**14**	**47**	**20**		15	1	5	**9**	**42**	**15**	6	7
H.	13	10	15	6	5	14	22	14		41	**17**	**6**	6	9	5	4	12
Bombay 18° 56′ N, 72° 53′ E, 8 J.									Calcutta 23° 33′ N, 88° 18′ E, 10 J.								
W.	**28**	**19**	**10**	2	—	1	6	34		**29**	6	6	2	12	8	**16**	**20**
F.	12	4	2	2	3	9	24	**44**		4	2	6	11	**50**	**14**	8	4
S.	1	1	1	4	**6**	**33**	**47**	7		2	5	**12**	**17**	44	12	5	2
H.	13	19	10	**5**	3	6	21	23		23	**8**	10	9	17	7	12	14

Aus Mangel an Beobachtungsmaterial muss man die Frage unentschieden sein lassen, wie die Winddrehung auf den ausgedehnten Länderstrecken Asiens vom Winter zum Sommer vor sich geht. Entschieden rechtsdrehende jahreszeitliche Bewegung des Windes hat das grosse asiatische Monsungebiet im Süden und dann auch das Mündungsgebiet des Ob und Jenissej.*) Auch an den Stationen der Ostküste wandern die Häufigkeitsmaxima der Windrichtungen nach den Jahreszeiten meist im Sinne mit dem Uhrzeiger.

An den in der Tabelle 5 angeführten Stationen geht die nördliche Richtung des Winters über E in die südliche oder südwestliche Richtung des Sommers über. Im Mündungsgebiet der beiden grossen Flüsse Ob und Jenissej herrscht umgekehrt die südliche Luftströmung im Winter und die nördliche im Sommer vor und der Uebergang von der einen in die andere erfolgt durch W.

Tabelle 5.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW		N	NF	E	SE	S	SW	W	NW
Unterer Lauf des Ob und Jenissej.									Nertschinsk 51° 19′ N, 119° 37′ E.								
W.	7	7	9	**18**	**23**	**15**	8	6		**10**	7	4	—	—	9	18	**52**
F.	11	10	10	12	14	11	**12**	**13**		9	12	7	5	4	13	15	35
S.	**20**	**14**	**10**	9	10	8	10	12		9	**14**	**12**	**10**	**6**	12	12	25
H.	14	9	7	11	20	14	11	8		9	5	3	4	6	**14**	**20**	39

*) Stelling: Ueber die mittlere Windrichtung am unteren Laufe des Ob und Jenissej. Wild's Repertorium für Meteorologie Bd. VIII.

Dui 50° 50′ N, 142° 26′ E, 4 J.	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
W.	**29**	**12**	**13**	16	8	3	3	**16**
F.	19	5	10	**26**	20	7	4	8
S.	15	5	7	26	**31**	**7**	5	5
H.	15	7	7	23	21	5	**6**	15

Schangai 31° 19′ N, 121° 26′ E, 4 J.	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
W.	**26**	16	9	9	4	4	6	**26**
F.	12	**21**	11	24	16	2	4	10
S.	6	10	**11**	**33**	**26**	**7**	2	6
H.	17	27	8	13	4	3	**8**	20

Bangkok 13° 38′ N, 100° 27′ E, 10 J.	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
W.	**31**	**20**	**12**	6	17	9	1	4
F.	3	4	4	**9**	**44**	28	6	2
S.	1	—	1	4	26	**52**	**13**	3
H.	29	14	7	6	11	17	9	**7**

Madras 13° 5′ N, 80° 25′ E, 11 J.	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
W.	14	**48**	**17**	10	5	2	1	3
F.	1	3	3	**33**	**36**	17	5	2
S.	1	1	1	9	14	**40**	**26**	8
H.	**16**	22	6	11	10	14	11	**10**

Den Gegensatz der Windrichtungsverhältnisse zwischen Europa und Nordamerika, wo die Windrichtung im Winter umgekehrt eine mehr nordwestliche, im Sommer eine mehr südwestliche ist, haben schon Kaemtz und Dove aus den Beobachtungen nachgewiesen und denselben durch den Gegensatz der Lage von Land und Meer erklärt. Auch die jahreszeitliche Winddrehung erfolgt an der amerikanischen Seite des atlantischen Oceans in dem entgegengesetzten Sinne von der auf der europäischen Seite vorherrschenden Drehung. Es bewegen sich an den Stationen der atlantischen Küste bis ca. 37° N und theilweise auch im Inneren des Continentes wie z. B. im Gebiete der canadischen Seen, im oberen Mississippi- und Missourigebiete bis zum Arkansas und Rio Grande etc. die Häufigkeitsmaxima der Windrichtungen mit dem Uhrzeiger.

Die Windverhältnisse der besprochenen Gegenden sind ziemlich einförmig. Die in der Tabelle 6 zusammengestellten Orte zeigen meist eine Drehung der nördlichen Strömung des Winters zu der südlichen des Sommers über E im Frühling und umgekehrt vom Sommer zum Winter über W im Herbst.

Tabelle 6.

Fort York 57° 0′ N, 92° 26′ W. 6 J.	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
W.	20	4	11	4	25	**13**	**12**	12
F.	**35**	18	10	5	17	5	3	8
S.	15	**28**	**23**	**5**	18	2	3	5
H.	20	6	11	4	**27**	6	11	16

Fort Abercrombie 46° 25′ N, 96° 43′ W, 9 J.	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
W.	9	7	4	17	8	**15**	**9**	**31**
F.	**12**	**11**	**7**	18	8	10	7	27
S.	9	11	6	**27**	7	10	6	24
H.	11	9	5	19	**8**	12	7	29

Brunswick 43° 53′ N, 69° 55′ W, $50^1/_2$ J.	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
W.	**5**	**23**	2	3	1	21	6	**39**
F.	4	13	**4**	**10**	3	30	4	31
S.	3	7	3	10	**4**	**43**	5	25
H.	4	15	2	7	3	29	**6**	34

St. Louis 38° 40′ N, 90° 5′ W, 23 J.	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
W.	**13**	8	8	14	14	10	15	**18**
F.	9	**9**	**11**	**16**	15	10	15	14
S.	8	9	11	16	**18**	**14**	14	10
H.	10	8	9	15	14	12	**17**	15

Im Sinne gegen den Uhrzeiger erfolgt die jahreszeitliche Drehung des Windes an der südlichen atlantischen Küste Nordamerikas von 37° N, an der Nordküste des mexikanischen Golfes, an der pacifischen Küste, in Mittelamerika und Westindien.

Die Polarströmung wechselt mit der äquatorialen in den extremen Jahreszeiten durch einen Uebergang über West und umgekehrt die äquatoriale mit der polaren durch einen Uebergang über E ab, wie die Windverhältnisse der in der Tabelle 7 gegebenen Orte zeigen.

Tabelle 7.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Fort Humboldt 40° 45′ N, 124° 10′ W, 11 J.									Fort Bliss 31° 44′ N, 106° 23′ W, 9 J.							
W.	18	6	**7**	**20**	**21**	9	3	16	13	10	9	8	4	12	**24**	**20**
F.	40	**6**	3	8	14	10	3	16	8	9	10	8	7	**15**	22	20
S.	**43**	5	1	3	6	11	4	**27**	9	8	16	**14**	**14**	14	17	8
H.	36	4	3	7	14	**11**	**5**	19	**14**	**13**	**16**	12	5	12	14	13
Austin 30° 15′ N, 97° 47′ W, 6 J.									New Orleans 29° 57′ N, 90° 0′ W, 19 J.							
W.	**28**	5	4	9	18	14	**8**	**14**	**13**	26	12	12	7	7	6	**17**
F.	17	**7**	3	21	26	**15**	3	8	8	20	12	16	13	13	5	13
S.	7	8	5	**27**	**34**	13	2	3	7	10	12	**24**	12	**23**	**6**	6
H.	23	**10**	**6**	14	22	11	5	8	12	**29**	**14**	15	4	9	4	13
Nassau 25° 5′ N, 77° 2′ W, 5 J.									Aspinwall 9° 29′ N, 79° 54′ W, 6 J.							
W.	**13**	26	19	13	10	5	**5**	**9**	28	**30**	1	5	2	2	1	31
F.	9	24	17	21	12	**8**	4	5	**32**	19	1	10	1	4	—	33
S.	3	12	**33**	**35**	**13**	5	—	—	14	15	1	13	5	10	**4**	**38**
H.	12	**31**	26	9	5	6	4	6	11	12	3	**20**	**5**	**13**	3	33

Für die südliche Halbkugel ist das Beobachtungsmaterial spärlicher als für die nördliche und können deshalb die Gebiete nach der daselbst stattfindenden jahreszeitlichen Winddrehung nicht abgegrenzt werden. Es werden bloss die Windverhältnisse einiger Orte, aus denen sich der Windwechsel erkennen lässt, mitgetheilt.

Die jährliche Periode der Windrichtung in Südamerika kann nach den Beobachtungen von Buenos Ayres und Valparaiso, Tab. 8. verfolgt werden. In Buenos Ayres erfolgt der jahreszeitliche Windwechsel von der W- und SW-Richtung im Winter nach der E- und NE- Richtung des Sommers über S und dann umgekehrt von E über N nach W. Für diese jahreszeitliche Winddrehung mögen hier locale Verhältnisse mitwirken. Aus den Windbeobachtungen der übrigen Stationen ist die jährliche Periode des Windes im östlichen Südamerika nicht ersichtlich. Dagegen zeigen einen entschieden linksdrehenden Wind die Stationen an der Westseite Südamerikas wie Valparaiso,

Punta Arenas etc., obgleich die vorhandenen Beobachtungen von kurzer Dauer sind.

Tabelle 8.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
	Buenos Ayres 34° 37′ S, 58° 21′ W, 20 J.								Valparaiso 33° 25′ S, 71° 40′ W, 3 J.							
W.	19	12	11	13	**12**	**16**	7	**9**	**35**	**13**	4	9	15	12	3	9
F.	15	14	20	**16**	11	13	5	5	19	10	8	4	25	20	5	**10**
S.	18	**15**	**23**	13	9	11	4	7	17	7	1	1	**30**	**27**	**8**	8
H.	**20**	14	12	12	11	15	8	8	33	10	3	7	18	13	6	9

In Südafrika trifft man an den vorhandenen Stationen der Ostküste rechtsdrehende, an denen der Westküste linksdrehende jahreszeitliche Bewegung des Windes an.

Tabelle 9.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
	Pieter-Maritzburg 29° 30′ S, 30° 2′ E, 6 J.								S. Paul de Loanda 8° 49′ S, 13° 7′ E, 3 J.							
W.	5	7	23	19	**17**	**14**	**9**	5	**10**	4	4	3	14	14	37	15
F.	**6**	7	20	29	14	5	3	**6**	8	—	1	2	11	14	**59**	14
S.	6	**10**	**30**	**32**	12	4	2	3	9	4	3	4	12	**18**	50	14
H.	5	8	28	26	14	10	7	2	10	3	4	3	**15**	14	48	13

Die in Australien gemachten Beobachtungen gestatten es den jahreszeitlichen Windwechsel wenigstens in den Küstengegenden mit Ausnahme der Westküste festzustellen. Nordaustralien schliesst sich an das indische Monsungebiet an, indem die Häufigkeitsmaxima des Windes in der Richtung von S über W nach N und dann über E nach S wandern. Dieselbe Ordnung befolgen auch die Maxima der Ostküste, dagegen erfolgt die Winddrehung an der Südküste im entgegengesetzten Sinne von N über W nach S und über E nach N.

Tabelle 10.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
	Sandhurst 36° 48′ S, 144° 6′ E, 6 J.								Sydney 33° 51′ S, 151° 11′ E, 14 J.							
W.	**17**	8	7	6	22	16	10	**14**	8	5	3	3	7	10	**39**	**25**
F.	16	6	5	7	26	**18**	**10**	12	**9**	19	13	9	14	9	17	11
S.	16	5	4	11	**36**	14	6	9	6	**23**	**19**	**12**	**22**	8	6	5
H.	14	**9**	**8**	**11**	27	15	7	9	7	12	10	9	13	**10**	25	15
	Brisbane 27° 27′ S, 153° 2′ E, 7 J.								Sweers Insel 17° 7′ S, 139° 41 E, 3½ J.							
W.	4	11	3	9	22	**30**	**17**	4	11	9	18	**37**	**16**	2	2	4
F.	**8**	29	11	13	15	12	7	**5**	**35**	13	10	9	7	**5**	**9**	13
S.	8	**30**	**13**	**24**	14	5	1	5	34	**16**	11	4	4	4	6	**19**
H.	3	10	7	19	**32**	16	9	4	9	12	**19**	35	11	4	4	**7**

Die hier angeführten Orte werden genügen, um zu zeigen, dass sich die Häufigkeit der Windrichtungen mit den Jahreszeiten ändert und dass diese Änderung periodisch ist. Jede Windrichtung erreicht im Laufe des Jahres ihre höchsten und kleinsten Häufigkeitswerthe und es herrscht eine bestimmte Ordnung in der Aufeinanderfolge der Maxima überall, wo nicht locale Einflüsse den Gang stören.

Die Häufigkeitsmaxima der Windrichtungen wandern mit den Jahreszeiten in regelmässiger Abwechslung um den Horizont eines Ortes herum, so dass der Wind im Laufe des Jahres eine vollständige Umdrehung macht. Überall findet der Wechsel zwischen den Aequatorial- und Polarwinden, Land- und Seewinden etc. durch Vermittlung von Übergangswinden statt. Indem sich meist die Windverhältnisse des Herbstes an die des Winters anschliessen, wird die Umdrehung an vielen Orten schon mit den drei Jahreszeiten Winter, Frühling und Sommer vollendet.

Die jahreszeitliche Drehung des Windes ist in verschiedenen Gebieten und Windsystemen verschieden. Dieselbe erscheint hauptsächlich von der Vertheilung des Landes und des Wassers und der dadurch verursachten mit den Jahreszeiten sich ändernden Temperatur- und Luftdruckverhältnissen abhängig.

Es soll hier nun näher erörtert werden, in welcher Weise die Vertheilung des Landes und des Wassers die jährliche Periode der Windrichtung beeinflusst, namentlich aber wie unter der Einwirkung dieser Vertheilung die Drehung des Windes mit den Jahreszeiten bald nach rechts oder mit dem Uhrzeiger bald im entgegengesetzten Sinne nach links oder gegen den Uhrzeiger erfolgt.

Ebenso wie zwischen dem Aequator und Pol, so werden auch zwischen dem Meere und dem Lande durch Temperaturgegensätze Luftcirculationen veranlasst. Im Winter strömt die Luft vom Lande gegen das Meer, da über den Continenten niedrigere Temperatur mit höherem Luftdruck herrscht, im Sommer umgekehrt fliesst die Luft vom Meere gegen das Land, weil sich daselbst wegen der grösseren Erwärmung desselben barometrische Depressionen bilden, welche die Luft von allen Seiten hineinziehen. Durch die in den extremen Jahreszeiten zwischen dem Lande und dem Meere bestehenden Temperaturdifferenzen gelangt in den mittleren und höheren Breiten der Gegensatz zwischen Land und Meer oder zwischen Ost und West mehr zur Geltung als der Gegensatz zwischen Aequator und Pol oder zwischen Süd und Nord. Man wird daher an den Westküsten meistentheils im Winter östlichen und im Sommer westlichen, an den Ost-

küsten im Winter westlichen und im Sommer östlichen Windrichtungen begegnen.

Da in Folge der Erdrotation die Luftströmungen jeglicher Richtung auf der nördlichen Hemisphäre nach rechts, auf der südlichen nach links abgelenkt werden, so gestalten sich an den Küsten die Windverhältnisse in den extremen Jahreszeiten folgendermassen:

	Westküste		Nordküste		Ostküste		Südküste	
	Winter	Sommer	Winter	Sommer	Winter	Sommer	Winter	Sommer
Nördl. Hemisphäre	SE	NW	SW	NE	NW	SE	NE	SW
Südl. „	NE	SW	SE	NW	SW	NE	NW	SE

Die Westküste. Die Annahme, dass an den Westküsten der nördlichen Hemisphäre im Winter SE-, im Sommer NW-Strömungen vorherrschend oder wenigstens häufiger auftreten als in den übrigen Jahreszeiten, wird durch die Beobachtungen bestätigt. Nach den in der Tab. 1. gegebenen Windrichtungen erlangen in West- und Nordwesteuropa das Maximum der Häufigkeit die SE-Winde im Winter und die NW-Winde im Sommer. Dasselbe ist auch der Fall an der Westküste von Nordamerika, wie man sich nach den Beobachtungen der in der Tab 7. zusammengestellten Orte überzeugen kann.

Der jahreszeitliche Windwechsel erfolgt an beiden Küsten vorwiegend mit einer Drehung im Sinne gegen den Uhrzeiger. Das Maximum der Häufigkeit geht an den angeführten Orten von der S, SE und E-Richtung im Winter durch die NE-N-Richtung im Frühling auf die NW- und W-Richtung im Sommer über. Vom Sommer geht das Häufigkeitsmaximum weiter nach links zu der SW- oder S-Richtung im Herbst und zu der SE-Richtung im Winter. Es hat auf diese Art eine vollständige Umdrehung im Laufe des Jahres gemacht.

Die Ursache, warum der Wind von der SE-Richtung des Winters zu der NW-Richtung des Sommers über E und N geht und sich also nach links bewegt, wird wohl darin liegen, dass mit dem Verschwinden der Temperaturgegensätze zwischen West und Ost im Frühling die Gegensätze zwischen Nord und Süd mehr hervortreten und eine Verstärkung der E- und N-Winde in dieser Jahreszeit veranlassen, da die südlicher gelegenen Theile bei aufsteigender Sonne schneller erwärmt werden als die nördlichen. Im Sommer geht der Wind nach NW und W über. Es hat sich durch die Umkehr der Temperaturdifferenzen zwischen Land und Meer im Sommer auch die Windrichtung umgekehrt. Das weitere Vorrücken der Windrichtung nach SW und S im Herbst und Winter kann auf das Vorherrschen der Aequatorialwinde zu diesen Jahreszeiten zurückgeführt werden. Wie

im Frühling die N-Winde, so erfahren wiederum im Herbst bei dem Verschwinden der Temperaturdifferenzen zwischen W und E die S-Winde eine Verstärkung. Das Zuströmen der Luftmassen von Süden im Herbst und Winter, namentlich aber in der letzteren Jahreszeit wird durch die barometrischen Minima über dem nordatlantischen und nordpacifischen Ocean, welche im Winter bei den starken Temperaturdifferenzen zwischen Land und Meer im Norden besonders ausgebildet erscheinen, verursacht.

Diese auffallende Erscheinung, dass mit dem Vorrücken der Sonne nach Norden die nördlichen und mit dem Zurückgehen nach Süden die südlichen Winde häufiger wehen, suchte Kaemtz, Lehrbuch der Meteorologie p. 249 durch den Austausch der Luft zwischen beiden Halbkugeln zu erklären. Er sagt darüber: „Wenn die Wärme der Luft in der nördlichen Halbkugel ihr Maximum erreicht, so wird die Atmosphaere hier eine grössere Höhe haben, als in der südlichen Halbkugel, wo in dieser Zeit das Minimum der Temperatur stattfindet. Es wird daher nothwendig ein Theil der Luftmasse aus der nördlichen Halbkugel in die südliche abfliessen. Wenn aber zur Zeit des Herbstaequinoctiums die Wärme der nördlichen Halbkugel sinkt, die der südlichen steigt, dann wird die Luft nach Norden zurückkehren, und die Luftströmung südlich werden. Vielleicht trägt dieser Austausch der Luft zwischen beiden Halbkugeln mit dazu bei, dass die Luftströmung im Sommer und Frühlinge nach Norden geht.“

Für die Untersuchung des jahreszeitlichen Wechsels der Windrichtung an den Westküsten der südlichen Halbkugel haben wir als Stationen mit verwerthbarem Material nur S. Paul de Loanda an der Westküste Südafrika's u. einige Stationen in Chile, namentlich Valparaiso an der Westküste Südamerika's (Tab. 8 u. 9). In Loanda erreichen im Winter das Maximum der Häufigkeit die E-NW-Winde, im Frühling die W-Winde, im Sommer die SW-Winde und im Herbst die S-Winde; in ähnlicher Ordnung schreitet auch das Häufigkeitsmaximum der Windrichtungen in Valparaiso mit den Jahreszeiten vor, denn es wehen hier im Winterhalbjahr am häufigsten die SE-N-Winde, im Sommerhalbjahr die NW-S-Winde. An beiden Stationen fällt somit, wie es eben für die Westküsten vorausgesetzt worden war, das Häufigkeitsmaximum der NE-Winde auf den Winter und der SW-Winde auf den Sommer und es dreht sich der Wind mit den Jahreszeiten im Sinne gegen den Uhrzeiger wie an den Westküsten der nördlichen Halbkugel.

An den beiden genannten Stationen erfolgt die Drehung des Windes von der Richtung des Winters zu der des Sommers über N

und W und von der Richtung des Sommers zu der des Winters über S und E. Diese Drehung des Windes nach links erfolgt im gleichen Sinne mit der Ablenkung durch die Erdrotation. Auch hier ist wie auf der nördlichen Halbkugel mit der Wanderung der Sonne nach Nord die Verstärkung der nördlichen mit dem Zurückgehen nach S die Verstärkung der südlichen Luftströmung wahrzunehmen.

Man kann sich die jahreszeitliche Drehung des Windes an den Westküsten der beiden Halbkugeln durch Fig. 1 und 2, in welchen *a* die Richtung des Winters, *b* die Richtung des Sommers bedeutet, veranschaulichen.

Die Nordküste. Um die jährliche Periode der Windrichtung an den Nordküsten der nördlichen Hemisphaere verfolgen zu können, stehen uns hauptsächlich die Beobachtungen von Vardö (Tab. 2), die Beobachtungen im Mündungsgebiete des Ob und Jenissej (Tab. 5.) und die Beobachtungen im Fort York im nördlichen Amerika (Tab. 6) zur Verfügung. An diesen Stationen wehen im Winter am häufigsten die SW- und die W-Winde, im Frühling die NW-Winde, im Sommer die N, NE und die E-Winde und im Herbst die S-Winde. Jedoch ist das herbstliche Maximum der S-Winde nicht ganz entwickelt. Die Drehung des Windes erfolgt deutlich an allen den genannten Stationen im Sinne mit dem Uhrzeiger von SW und W im Winter über N nach NE und E im Sommer und dann weiter über S nach SW.

Der Wind dreht sich hier nach rechts im gleichen Sinne mit der Ablenkung desselben, welche auf der nördlichen Halbkugel durch die Erdrotation verursacht wird. Den Anlauf zu dieser Drehung nimmt der Wind schon im Winter, indem zu dieser Jahreszeit bereits auch die Westwinde das Maximum der Häufigkeit erreichen. Dass der Wind von SW nach W geht, könnte aber nicht so sehr in der Erdrotation als vielmehr in dem Wachsen der Temperaturdifferenzen zwischen Land und Meer von Westen nach Osten seinen Grund haben. Im Frühling und im Sommer wird an den Nordküsten die nördliche Luftströmung noch mehr verstärkt als es an den Westküsten der Fall ist, weil die Gegensätze zwischen Wasser und Land und zwischen N und S vereint wirken. Bereits schon im Sommer schreitet der Wind nach Osten vor. Die S-Richtung des Herbstes und des Winters erklärt sich hier aus der schnelleren und grösseren Erkaltung des im S gelegenen Landes mit sinkender Sonne.

Die südliche Halbkugel hat nur in Australien eine langgestreckte Nordküste. Wir wollen den jährlichen Verlauf der Wind-

richtung daselbst nach den Beobachtungen auf Sweers Insel (Tab. 10) näher ins Auge fassen. Das Häufigkeitsmaximum erreichen hier im Winter die SE- und S-Winde, im Frühling die SW- und W-Winde, im Sommer die NW- und NE-Winde und im Herbst die E-Winde. Man findet hier also häufige SE-Winde im Winter und häufige NW-Winde im Sommer und eine jahreszeitliche Drehung des Windes im Sinne mit dem Uhrzeiger wie an den Nordküsten der nördlichen Halbkugel.

Die rechtsdrehende jahreszeitliche Bewegung des Windes auf der Nordküste Australiens geht gegen die Ablenkung durch die Rotation. Es dreht sich der Wind von SE im Winter nach S und nicht nach E, wie es geschehen müsste, wenn die Ablenkung bloss durch die Rotation bestimmt würde. Die Windrichtung des Winters ist bedingt durch das auf dem Festlande sich lagernde barometrische Maximum, welches sich bei der Erwärmung des Landes auf den indischen Ocean verzieht und durch sein Fortschreiten nach West eine Drehung des Windes gegen S, SW u. W verursacht. Im Sommer setzt sich im Innern von Australien ein barometrisches Minimum fest, welches auf der Nordküste NW, N und NE-Winde zur Folge hat; im Herbst wenn die Temperaturgegensätze zwischen N und S schwinden, geht der Wind nach E über.

Fig. 3 und [illegible] zeigt die jahreszeitliche Drehung des Windes an den Nordküsten der beiden Hemisphaeren.

Die Ostküste. Zur Erkenntniss der jährlichen Periode der Windrichtung an den Ostküsten der nördlichen Halbkugel können die Beobachtungen von Pitea (Tab. 2) an der Ostseeküste, von Brunswick an der Ostküste Nordamerikas (Tab. 6), von Dui (Sachalin) und von Schangai (Tab. 5) an der Ostküste Asiens dienen.

An allen den genannten Stationen erreichen, wie oben vorausgesetzt worden ist, im Winter das Maximum der Häufigkeit die NW- oder N-Winde, im Sommer dagegen die SE- oder die S-Winde. Die Drehung von den winterlichen NW-Winden zu den sommerlichen SE-Winden geschieht über E im Frühling und umgekehrt von den sommerlichen SE zu den winterlichen NW-Winden über S und W im Herbst, also im Sinne mit dem Uhrzeiger.

Die jahreszeitliche Drehung des Windes nach rechts befindet sich in Übereinstimmung mit der durch die Erdrotation verursachten Drehung. Der Wind geht schon bereits im Winter nach N oder noch weiter nach E über. Die E-Winde wehen an den Ostküsten am häufigsten im Frühling, die W-Winde im Herbst.

Die Ostküste befindet sich zur Westküste dadurch in einem Gegensatz, dass sich an der ersteren der Wind mit den Jahreszeiten nach rechts, an der letzteren nach links bewegt. Sonst aber findet übereinstimmend an beiderlei Küsten der Übergang von den Landwinden des Winters zu den Meereswinden des Sommers über N in Frühling und umgekehrt der Übergang vom Sommer zum Winter über S im Herbst statt.

Zur Darstellung der jährlichen Periode der Windrichtung an den Ostküsten der südlichen Hemisphaere konnten als geeignete meteorologische Stationen Pieter-Maritzburg in Südafrika (Tab. 9), Brisbane und Sydney (Tab. 10) in Australien gefunden werden.

An den genannten Stationen erfolgt die Drehung des Windes mit dem Uhrzeiger wie auf der nördlichen Hemisphaere. Das Häufigkeitsmaximum wandert von den S, SW-Winden im Winter über die NW und N-Winde im Frühling nach den NE, E und SE-Winden im Sommer und von da über S im Herbst zu den winterlichen SW-Winden zurück.

Der Wind nach rechts gehend bewegt sich gegen die Ablenkung durch die Erdrotation. Von W springt der Wind so zu sagen nach NE oder E hinüber, denn die nördliche Richtung ist überhaupt sehr schwach. Den Übergang von den E-Winden des Sommers zu den Westwinden des Winters vermitteln im Herbst die S-Winde wie auf der nördlichen Halbkugel.

Die Bewegung der Windrichtung mit den Jahreszeiten an der Ostküste ist aus den Fig. 5 und 6, wo die Pfeile die Richtung der vom Lande kommenden winterlichen und vom Meere kommenden sommerlichen Winde anzeigen, ersichtlich.

Die Südküste. Welche Winde an den Südküsten der nördlichen Hemisphaere in den extremen Jahreszeiten eine besondere Verstärkung in ihrer Häufigkeit erfahren und in welcher Weise sich da der jahreszeitliche Windwechsel vollzieht, kann aus den Beobachtungen zu Christiania u. Simferopol (Tab. 1), dann aus den Beobachtungen im nördlichen Gebiete des mexikanischen Golfes (Tab. 7) und ferner zu Calcutta (Tab. 4) ersehen werden.

An allen den genannten Stationen erreichen die N- und die NW-Winde das Häufigkeitsmaximum im Winter, die oben vorausgesetzten NE-Winde wehen bereits im Herbst am häufigsten und mit Ausnahme von Simferopol, wo regelrecht die NE-Winde im Winter verstärkt werden. Von N geht der Wind über W und SW im Frühling nach S und SE im Sommer und von da über E nach NE im Herbst

nach N. Man findet hier also eine linksgehende Bewegung des Windes mit den Jahreszeiten.

Im Winter ist das im N gelegene Land kälter als das südliche Meer, die Gegensätze zwischen Land und Meer und zwischen N und S wirken vereint, so dass die polare Strömung zu dieser Jahreszeit eine besondere Verstärkung erfährt. Im Sommer kehren die Temperaturdifferenzen zwischen Land und Meer um, das kältere Meer liegt im Süden und das wärmere Land im N, die Temperaturgegensätze zwischen Meer und Land wirken den Gegensätzen zwischen Aequator und Pol entgegen. Sie erhalten das Übergewicht, denn die Luftströmung an den Südküsten ist im Sommer eine südliche. Die Drehung des Windes von N nach S erfolgt über W zu Ende des Winters und im Frühling und von S nach N über E im Herbst, was bei der Umkehr der Temperaturgegensätze zwischen N und S in den extremen Jahreszeiten auch eine Umkehr dieser Gegensätze zwischen W und E in den beiden vermittelnden Jahreszeiten voraussetzt in der Weise, dass im Frühling W kälter, im Herbst wärmer erscheint als E.

Auf der südlichen Halbkugel liefern die Beobachtungen zu Adelaide und zu Sandhurst (Tab. 10) geeignetes Material zur Verfolgung der jährlichen Periode der Windrichtung.

An beiden Stationen erreichen im Winter die ländlichen N und NW-Winde, im Sommer die vom Meere kommenden S- und SE-Winde das Maximum der Häufigkeit und der jahreszeitliche Wechsel erfolgt über W im Frühling und über E im Herbst, also im Sinne gegen den Uhrzeiger gleich wie auf der nördlichen Halbkugel.

Der jahreszeitliche Windwechsel in Südaustralien geht im gleichen Sinne mit der Ablenkung durch die Erdrotation vor sich. Die Gegensätze treten besonders stark im Sommer hervor, weil im dieser Jahreszeit die Gegensätze zwischen Land und Meer im gleichen Sinne auf die Windrichtung einwirken wie die Gegensätze zwischen Pol und Aequator.

Das Gebiet des mittelländischen Meeres so wie auch das Gebiet der indischen Monsune macht eine Ausnahme von der für die Nordküste festgestellten Regel der jahreszeitlichen Drehung des Windes. Bis auf einzelne Stationen dreht sich in diesen beiden Gebieten der Wind im Sinne mit dem Uhrzeiger. Der Grund davon dürfte darin liegen, dass neben der Vertheilung von Land und Wasser noch andere Factoren, von denen später einmal die Rede sein wird, auf die jahreszeitliche Winddrehung einwirken.

Fasst man die Resultate über die jahreszeitliche Drehung des Windes bei verschiedener Vertheilung des Landes und des Wassers zusammen, so findet man, dass bei der Umkehrung der Temperaturunterschiede zwischen Land und Meer in den extremen Jahreszeiten an meridional gestreckten Küsten der beiden Hemisphaeren die Windrichtung des Winters in die Richtung des Sommers über N und die Richtung des Sommers in die des Winters über S, bei west-östlich verlaufenden Küsten die Richtung des Winters in die des Sommers über W und vom Sommer zum Winter über E übergeht. In Folge dessen haben die Ost- und Nordküsten der beiden Hemisphaeren eine rechtsdrehende, die West- und die Südküsten eine linksdrehende jahreszeitliche Bewegung des Windes.

Eine im gleichen Sinne erfolgende Drehung haben auch die von den Küsten entfernter liegenden Orte, sofern nicht andere Factoren wie die Terraingestaltung etc. der Drehung eine andere Richtung geben.

Die Schnelligkeit, mit der sich der Wind dreht, ist am grössten im Winter und im Sommer, am kleinsten im Herbst; das Häufigkeitsmaximum duchwandert im Mittel aus den 46 angeführten Stationen in jeder der beiden extremen Jahreszeiten mehr als einen Quadranten (108°), im Frühling einen ganzen (90°), im Herbst etwas mehr als einen halben Quadranten (54°).

II.

Werden die Häufigkeitszahlen der Windrichtung bloss nach den Jahreszeiten berechnet, so weisen die einzelnen Windgruppen an den meisten Stationen bloss ein Maximum der Häufigkeit auf. Die Jahreszeiten sind verhältnissmässig zu lange Zeiträume, aus deren Mittelwerthen manche charakteristische Eigenthümlichkeiten in der jährlichen Periode der Windrichtung verschwinden. So sind die doppelten Häufigkeitsmaxima einzelner Windrichtungen, namentlich der westlichen und der östlichen Windgruppe, wie sie z. B. aus den für die Monate abgeleiteten Zahlen zu Modena*) und Prag**) deutlich hervortreten, in den Jahreszeiten nicht ersichtlich. Um also die jährliche Periode der Windrichtung genauer kennen zu lernen, erscheint es

---

*) Ragona: Andamento diurno e annuale della direzione del vento. Modena 1880. Z. f. Met. 1881, p. 121.

**) Augustin: Klima von Prag. Z. f. Met. 1882, p. 206.

nothwendig auch die monatlichen Häufigkeitszahlen in Betracht zu ziehen.

Da aber bis jetzt nur wenige Stationen hinlängliche Beobachtungsreihen aufzuweisen haben, an denen die Wanderung der Häufigkeitsmaxima mit den Monaten verfolgt werden könnte, so musste die Untersuchung der jährlichen Periode der Windrichtung für ganze Gebiete aufgegeben und nur auf einzelne Orte beschränkt werden. Ich habe im Nachfolgenden nur zwei in Mitteleuropa gelegene Orte Berlin und Prag gewählt, um zu zeigen, wie verschieden sich die jährliche Periode der Windrichtung nach den für Monate abgeleiteten Häufigkeitswerthen gegenüber den jahreszeitlichen Werthen gestalten kann. Die in der Tabelle 11 gegebenen Daten für Berlin sind der Preuss. Statistik 49 Berlin 1879 (Resultate 30jähriger Beobachtungen bearbeitet von Hellmann), entnommen, die Daten für Prag sind nach den „Meteorologischen Beobachtungen Jahrgang 1840—1883“ aus den Terminen 6 h. a., 2 h. p., 10 h. p. berechnet worden.

Tabelle 11.

	Berlin 52° 31′ N, 13° 23′ E, 30 J.								Prag 50° 5′ N, 14° 26′ E, 44 J.							
	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW
Jän.	4	5	16	**10**	**16**	**22**	20	7	9	7	9	9	**19**	19	17	11
Feb.	5	7	13	8	10	18	**28**	11	9	7	9	9	14	**20**	22	10
März	10	9	13	10	10	14	23	11	11	8	10	8	12	16	**23**	13
April	**11**	8	13	9	8	12	27	12	15	**10**	**13**	7	11	13	17	14
Mai	10	**10**	**16**	7	8	13	22	15	**15**	9	12	8	12	12	16	17
Juni	9	9	11	7	8	10	29	**17**	13	7	8	6	12	15	22	**17**
Juli	8	7	9	6	8	18	**31**	13	12	5	6	6	14	19	**24**	15
Aug.	7	6	11	7	11	17	28	13	10	6	9	7	14	19	22	13
Sept.	6	7	12	9	12	18	24	12	10	**7**	**11**	8	14	18	20	12
Oct.	4	**8**	13	11	14	20	22	8	9	7	10	9	17	19	19	9
Nov.	6	6	15	10	14	19	20	10	9	6	9	**10**	18	19	18	9
Dec.	6	5	**16**	10	12	19	23	9	9	5	10	9	18	21	19	9
Winter	5	6	**15**	9	12	19	23	9	9	6	9	**9**	**17**	**20**	19	10
Frühl.	**11**	**9**	14	9	9	13	24	12	**14**	**9**	**12**	8	12	14	19	14
Sommer	8	8	10	6	9	15	**29**	**14**	12	6	8	6	13	18	**23**	**15**
Herbst	5	7	13	**10**	**13**	**19**	22	10	9	7	10	9	17	19	19	10

An beiden Orten erfolgt die Winddrehung nach den Jahreszeiten im Sinne gegen den scheinbaren Lauf der Sonne wie in West- und Nordwesteuropa. In Prag beginnt die Drehung mit SW, S und SE im Winter, geht nach E, NE und N im Frühling und endet mit NW und W im Sommer. Die Drehung wird mit drei Jahreszeiten voll-

endet, da die Häufigkeitszahlen der Windrichtungen für die beiden Jahreszeiten Herbst und Winter nahezu gleich sind. In Berlin wandert das Häufigkeitsmaximum mit den Jahreszeiten im gleichen Sinne von der E-Richtung im Winter über NE und N im Frühling zu der NW- und W-Richtung im Sommer und dann über SW, S, SE im Herbst zu der E-Richtung im Winter.

Nach den monatlichen Häufigkeitszahlen erfährt die Winddrehung durch das Auftreten eines doppelten Maximums bei einzelnen Windgruppen einige Abänderungen.

In Prag sind es die NE- und die E-Winde und dann die ihnen entgegengesetzten Richtungen SW und W, welche zwei Maxima der Häufigkeit in der jährlichen Periode aufweisen können. Die NE- und E-Winde wehen am häufigsten im April und September oder October, die SW-Winde im December oder Februar, dann zum zweitenmale im Juli. Von den Windgruppen mit einem Maximum sind am häufigsten: die N-Winde im Mai, die NW-Winde im Juni, die SE-Winde im November, die S-Winde im Jänner.

In Berlin finden wir im Auftreten der Häufigkeitsmaxima der Windrichtungen nahe dieselben Verhältnisse wie in Prag; einige Unregelmässigkeiten wie z. B. das secundäre Maximum der S-Winde im October dürften bei einer längeren Beobachtungsdauer verschwinden.

An beiden Orten sind die SW und W-Winde das ganze Jahr hindurch vorherrschend, besonders aber im Hochsommer und zu Ende des Winters. Neben diesen vorherrschenden Windrichtungen machen sich geltend im Winter die S-Winde, im Sommer die NW- und die N-Winde. Der Gegensatz zwischen N und S tritt besonders zur Zeit des höchsten und niedrigsten Sonnenstandes hervor, indem die N (NW)-Winde um das Sommersolstitium, die S-Winde um das Wintersolstitium am häufigsten wehen. Die E-Winde sind durch ihr häufiges Auftreten nahe um die Zeit der Aequinoctien als Frühlings- und Herbstwinde bekannt.

Es herrscht eine regelmässige mit den Monaten fortschreitende und an beiden Orten ziemlich übereinstimmende Wanderung der Häufigkeitsmaxima der Windrichtungen. Der Wind dreht sich von E uud NE in April über N im Mai, NW im Juni nach W und SW im Juli und August; im September springt das Häufigkeitsmaximum zu der entgegengesetzten Windrichtung NE und E über und bewegt sich dann im entgegengesetzten Sinne über SE im November, S und SW im Jänner nach W im Februar und März.

Der Wind macht im Laufe des Jahres zwei verschiedene den beiden Jahreshälften entsprechende Drehungen; im Sommerhalbjahr dreht er sich von E über N nach W, im Winterhalbjahr von E über S nach W. Der Einfluss des scheinbaren Sonnenlaufes auf die Windrichtung zeigt sich darin, dass sich der Wind bei nördlicher Declination der Sonne im Sinne gegen den Uhrzeiger bei südlicher Declination aber im Sinne mit dem Uhrzeiger bewegt.

Aus dieser zweifachen Bewegung der Windrichtung im Laufe des Jahres lässt sich die doppelte Wendung bei Winden der west-östlichen Richtung und die einfache Wendung der süd-nördlichen Richtung erklären.

Das Gebiet mit einer solchen jährlichen Winddrehung wie in Prag und Berlin lässt sich bis jetzt noch nicht ganz genau feststellen, ohne Zweifel dürfte es sich über ganz Mitteleuropa erstrecken. Ich habe die jährliche Periode der Windrichtung noch an anderen Orten Mitteleuropas verfolgt und habe ein gleiches Vorrücken der Häufigkeitsmaxima der Windrichtungen mit den Monaten wie an den oben genannten Stationen gefunden. So dreht sich z. B. in Augsburg (Zeitschrift der österr. Gesell. für Meteorologie 1882, p. 480) der Wind während des Sommerhalbjahrs von SE in April und Mai über N nach S in August. Das Häufigkeitsmaximum durchwandert in dieser Jahreshälfte den ganzen Umkreis; in der zweiten Jahreshälfte bewegt es sich dann im entgegengesetzten Sinne von E über S nach W.

Weitere Resultate der Untersuchung über die jährliche Periode der Windrichtung werden später mitgetheilt.

11.

Die Embryonalentwicklung von Rhynchelmis (Euaxes).

Vorläufige Bemerkungen

vorgetragen von Prof **Fr. Vejdovský** am 26. März 1886.

1. Das zur Ablage reife, aus dem vorderen Theile der Eiersäcke vorsichtig in der Chromsäurelösung herauspraeparirte Ei von Rhynchelmis hat eine kugelförmige Gestalt und ist von einer feinen Membran umhüllt, die dicht der Eisubstanz anliegt. Die letztere ver-

hält sich an Querschnitten folgendermassen: Unterhalb der Eimembran befindet sich eine niedrige Protoplasmaschicht, die selbst wieder aus einer hyalinen, zähflüssigen Grundsubstanz besteht, in welcher die intensiv sich färbenden schichtenweise angeordneten länglichen Partikeln eingebettet sind. Diese Anordnung ist vornehmlich an feinen Querschnitten schon mit schwachen Vergrösserungen wahrnehmbar. Der übrige Raum des Eies ist mit den stark lichtbrechenden, gelblichen Dotterkügelchen erfüllt; doch kann man auch hier das Vorhandensein einer ungemein spärlichen Anzahl der Protoplasmapartikeln sicherstellen. Innerhalb der Dottersubstanz liegt eine langgestreckte, cylindrische und feingestreifte Kernspindel, deren Pole durch intensivere Färbung sehr schön hervortreten, während die feinen Plasmaradien der letzteren sich allmälig in den Dotterkügelchen verlieren. Bei starken Vergrösserungen gewahrt man, dass die sog. achromatischen Spindelfilamente dem umliegenden Protoplasma angehören. Die Spindel selbst hat keine bestimmte Lage in der Dottermasse, indem sie mehr oder weniger schräg zur Peripherie des Eies, immer aber excentrisch liegt.

2. Die Eiablage kann man an den in Aquarien gezüchteten Würmern beobachten. Mittels des hinteren Körpers schlingt sich der Wurm um die Pflanzenstengel und tastet mit dem Rüssel die Stelle an, wo der Cocon befestigt werden soll. Die vorderen Gürtelsegmente (vom 9. bis etwa 20. Segment) nehmen einen weisslichen bis bläulichen Anflug an, was offenbar von einem schleimigen Secrete herrührt, das die Hautdrüsen ausscheiden. Die äusserste Schicht dieser Substanz erstarrt ein wenig, wonach die erwähnten Körpersegmente mächtig anschwellen und am 7. und etwa 16. Segmente stark eingeschnürt werden. Das schleimige Secret vermehrt sich zwischen diesen Segmenten sehr bedeutend, wodurch der künftige Cocon als deutlich angelegt erscheint. Jetzt finden mächtige Contractionen und Krümmungen des Vorderkörpers statt und es dauert mehrere Minuten, bevor aus den Öffnungen der Eileiter die halbflüssigen, braunen Eier in die schleimige Substanz, die sog. Eiweissflüssigkeit hervorquellen. Hört dieser Process auf, so fängt der Wurm sehr langsam seinen Vorderkörper aus der Coconmembran, die mit dem hinteren Pole an die Wasserpflanze befestigt ist, herauszuziehen. Die frisch gelegten Cocons sind ganz weich und schleimig und man muss sehr vorsichtig verfahren, um die in deren Flüssigkeit aufbewahrten und zur Untersuchung gewählten Eier nicht zu verletzen. Erst nach einer längeren Zeit erstarrt die äussere Cocon-Umhüllung zu einer derben,

durchsichtigen Membran, welche erlaubt, die äusseren Vorgänge der Entwicklung ohne grössere Schwierigkeiten zu verfolgen.

3. Etwa eine halbe Stunde nach der Abstreifung des Cocons erscheinen an der Oberfläche der Eier die Spermaköpfchen, allerdings in einer umgewandelten Gestalt. Es sind grosse, runde Bläschen, die durch ihren Glanz und stetige Veränderung der äusseren Gestalt sehr auffallend sind. Bald beginnen sie nämlich sich zu verlängern und nehmen eine keilförmige Gestalt an. Nun entsteht an der Basis des Sperma ein Buckelchen des Eies, was wahrscheinlich von der Bildung einer Öffnung in der Dottermembran herrührt, denn gleich darnach dringt das Sperma in das Ei hinein und bald verschwindet es spurlos in der Eisubstanz. Die Lage des Sperma an der Oberfläche des Eies kann die verschiedenste sein, aber nach dem Eindringen in das Ei begibt sich das Sperma immer an den den Polkörperchen entgegengesetzten Pol.

Der Ausstossung der Polkörperchen geht eine lebhafte Contraction des Eies voran, welche darauf hinweist, dass nur durch die Zusammenziehung der Eisubstanz die Polkörperchen ausgetrieben werden. Zwei Stunden nach der Eiablage wird das erste Polkörperchen herausgestossen. Die Längsschnitte unmittelbar nach diesem Vorgange zeigen, dass das vordere Centrum und die ganze Spindel aus dem Eie nach aussen gelangen, und nur das hintere Centrum im Eie verbleibt und sich zur Bildung der zweiten Spindel anschickt. An dem entgegengesetzten Pole findet sich ein grosses, im Querschnitte rundes, aus feinem Protoplasma bestehendes Centrum, an dessen Peripherie in einem Plasmahöfchen eingebettet der männliche Pronucleus liegt. Derselbe ist sehr klein, maulbeerförmig.

Nach mehr als zwei Stunden erscheint das zweite Polkörperchen an der Oberfläche des Eies, und zwar als Träger des ersten Polkörperchens. Diese Gebilde haben den Werth eigenthümlicher Zellen, wie ich in meiner ausführlichen Arbeit begründen werde. Sie gehen aber ziemlich bald, bereits während der Zweitheilung des Eies, zu Grunde. Nach der Ausstossung der Polkörperchen nimmt das Ei die ursprüngliche, kuglige Gestalt an.

4. Die unmittelbar nach der Bildung der zweiten Polzelle verfertigten Längsschnitte zeigen Nachfolgendes: An der Stelle, wo die Polzellen ausgestossen wurden, geht die periphere Protoplasmaschicht auseinander, so dass hier der Eidotter der Eimembran direkt anliegt. In einem feinkörnigen, kurze Strahlen aussendenden Protoplasmahöfchen liegt der Überrest der zweiten Polzelle — der weibliche Vorkern. Derselbe besteht aus kleinen, stark lichtbrechenden Kügelchen,

wodurch er eine maulbeerförmige Gestalt annimmt. Die Membran der einzelnen Kügelchen ist ziemlich resistent, der innere Inhalt ganz homogen, einer färbbaren Substanz durchaus entbehrend. Im Centrum des Eies befindet sich ein grosses, ziemlich scharf umschriebenes rundes Feld mit einem plasmatischen Netze erfüllt und nach aussen von einem feinkörnigen Plasmahofe umgeben, der zierlich fast zur Peripherie des Dotters ausstrahlt. In diesem Plasmahofe, fast an der Peripherie des Centralfeldes liegt der winzig kleine, durch die Wirkung der Reagencien etwas zusammengeschrumpfte männliche Vorkern. Derselbe hat den früher geschilderten Bau verändert, indem er aus einer resistenten Membran, einem feinen Kerngerüst und mehreren, intensiv sich färbenden Nucleolen besteht.

Etwa 20 Minuten nach der Ausstossung der Polzellen verändert sich der weibliche Vorkern in dem Maasse, dass er dem männlichen völlig gleich ist; aus dem maulbeerförmigen Körper wird jetzt ein kugliger oder ellipsoider Kern mit der äusseren resistenten Membran, mit Kerngerüst und Nucleolen.

Etwa 35 Minuten nach der Ausstossung der Polzellen dringt der männliche Vorkern in das Plasma-Centrum hinein und das fast unkenntliche Plasmahöfchen, in dem er sitzt, entsendet feine pseudopodienartige Strahlen zur Peripherie des Centrums. Durch diese feinen Strahlen findet offenbar die Ernährung des männlichen Vorkernes statt, da der letztere allmälig sich vergrössert und das Kerngerüst und die Nucleolen viel deutlicher als früher hervortreten.

45 Minuten nach der Bildung der zweiten Polzelle begiebt sich der weibliche Vorkern von seiner ursprünglichen, polaren Lage in der Richtung zum männlichen Vorkerne, resp. zum Centrum, welches nach und nach sich von oben und unten abplattet, während das umliegende feinkörnige Protoplasma sich an zwei entgegengesetzte Pole ansammelt.

Die Abplattung des Centrums geht Hand in Hand mit den Differenzirungen der äusseren, peripheren Protoplasmaschicht des Eies vor sich, welche die spätere Gestalt des letzteren beeinflussen. Es bildet sich nämlich kurz nach der Ausstossung der zweiten Polzelle am animalen Pole ein aus dem peripheren Protoplasma bestehender Ring, welcher sich nach und nach concentrirt und tief in den Dotter eingreift; dasselbe wiederholt sich auch am vegetativen Pole des Eies. Wie die Schnitte beweisen, hat sich das periphere Protoplasma an den oberen und unteren Pol angesammelt, wodurch das Ei eine plattgedrückte, scheibenförmige Gestalt annimmt und somit einer

Kugelzone ähnlich ist. Die polaren Plasmaansammlungen erweisen sich von der Oberfläche des Eies als kreisrunde, braune, hell umsäumte Feldchen, von denen das des animalen Poles ein weissliches Centrum hat und die Stelle bezeichnet, wo die Polzellen nach aussen kamen. So gestaltet sich der Polarring, welchen *Whitman* an den Eiern von Clepsine sichergestellt hat.

5. Bei der vollbrachten Abplattung des Eies kommt der weibliche Vorkern ganz in unmittelbare Annäherung mit dem männlichen Pronucleus; doch gelang es mir nicht sicher zustellen, ob dieselben zusammenfliessen. An meinen Praeparaten sehe ich Nachfolgendes: Der grosse männliche Vorkern hat sich bedeutend verlängert und zwar in der Richtung zu den oben erwähnten Plasmaansammlungen, die sich inzwischen zu den Theilungscentren ausgebildet haben und auch dicentrische Plasmaradien aussenden. Aus der ursprünglichen monocentrischen Sonne entstand somit die dicentrische Strahlenbildung. Die Fäden des Kerngerüstes im männlichen Pronucleus erstrecken sich zwischen beiden Centren, aber die Kernmembran ist bisher intact geblieben, so wie die Nucleolen, welche an den Gerüstfäden haften.

Somit schickt sich der männliche Vorkern zur Bildung der Furchungsspindel an, während der fast unveränderte weibliche Vorkern in der nächsten Umgebung des ersteren liegt.

Über die weiteren Schicksale dieser beiden Vorkerne weiss ich vorläufig nichts näheres mitzutheilen. In dem nächsten Stadium, welches ich untersuchte, finde ich eine langausgezogene Furchungsspindel mit grossen, hyalinen Theilungscentren, zwischen denen sich eine äussere, feine Plasmastreifung erstreckt und somit von den Radien derselben herrührt. Die ungemein kleinen und intensiv gefärbten Nucleolen befinden sich in der Mitte der Spindel und scheinen sich gegen die beiden Pole in äusserst feine Filamente fortzusetzen. In den hyalinen Theilungscentren entstehen bald neue centralen Plasmaansammlungen, die sich, wie ferner gezeigt wird, zu neuen töchterlichen Theilungscentren herausbilden.

6. In dem scheibenförmigen Stadium verweilt das Ei etwa 2 Stunden; dann nimmt es wieder die ursprüngliche kuglige Gestalt an, wobei die polaren Protoplasmaansammlungen tiefer in den Dotter eindringen, trotzdem aber auf der Eioberfläche als kreisförmige oder längliche Feldchen bemerkbar sind. Bald nach der Auswölbung der Pole entstehen zwei ungleich grosse Kugeln, von welchen wir die kleinere als vordere, die grössere, die Protoplasmaansammlungen haltende Kugel als hintere bezeichnen werden. Die medianen vertikalen

Längsschnitte zeigen, dass ein unbedeutender Theil des Protoplasma mit dem abgeschnürten Kerne in die kleinere Kugel übergieng. Die horizontalen Längsschnitte durch dasselbe Stadium zeigen ferner ein merkwürdiges Verhalten der sog. Attractivcentra, welche wir in dem scheibenförmigen Stadium des Eies gefunden haben.

Dieselben erweisen sich in den neuen zwei Kugeln als grosse, zierlich ausstrahlende, hyaline, kreisförmige oder elliptische Felder, in deren Mitte bereits neue, durch feine Plasmafilamente verbundene Attractivcentra entstanden; die letzteren entsenden wieder feine Plasmaausläufer, während die soeben abgeschnürten Hälften des Mutterkernes ganz ausserhalb der besprochenen Gebilde liegen. Die letzteren haben zuerst die der Längsachse der neuen Kugeln entsprechende Lage und verlängern sich auch ein wenig, was sich auch an der äusseren Gestalt der hinteren Kugel kundgiebt.

Nach und nach aber drehen sich die neuen Centra um 90° herum und liegen somit parallel mit der Theilungsebene der beiden Kugeln. Inzwischen bildet sich die Querwand zwischen den letzteren, die neuen Kerne nehmen eine kuglige Gestalt an, besitzen jetzt mehrere lichtbrechende und intensiv sich färbende Nucleolen und befinden sich zwischen den neu entstandenen Tochtercentren, und zwar in der hinteren Kugel früher als in der vorderen. Es ist ersichtlich, dass die Theilungsvorgänge der Eizelle aus dem Protoplasma und nicht von dem Kerne ausgehen.*) Dieselben Processe wiederholen sich sonst

*) Nach den neuesten Untersuchungen neigen sich auch die hervorragendsten Forscher mehr der Ansicht, dass die Funktion der Vererbung nur dem Zellkerne aufgebürdet ist, während das Protoplasma der Zelle mit dem erwähnten Geschäfte nichts zu thun haben soll. Meine diesbezüglichen Beobachtungen sprechen durchaus gegen eine solche Auffassung, wie ich später ausführlicher auseinanderzusetzen hoffe. Das eine kann aber bereits jetzt hervorgehoben werden, dass während der Zelltheilung die Theilungscentra im Protoplasma früher zum Vorschein kommen, als der Kern sich zur Theilung anschickt. Ich will aber keinesfalls der Ansicht huldigen, dass umgekehrt nur das Protoplasma der Zelle mit den Lebensfunktionen betraut ist, sondern, dass dieselben zugleich durch den Kern und das Protoplasma bewirkt werden. Diese Auffassung unterstütze ich vorläufig nur durch die nachfolgende Thatsache: In einem der Cocons von Rhynchelmis befanden sich 9 Eier, von denen sich acht ganz normal entwickelten, indem die Furchung und Keimblätterbildung gleichzeitig und in gleicher Weise vor sich gieng, so dass schliesslich 8 gleich gestaltete Embryonen erschienen. Nur das neunte Ei erfuhr keine Veränderung, mit der Ausnahme, dass es sich in einer Axe etwas verlängert hat, ohne aber die scheibenförmige Gestalt anzunehmen, wie es bei den übrigen 8 Eiern der Fall war. Diese Gestalt behielt das abnormale Ei auch zur Zeit, als die

in allen nachfolgenden Stadien; es bilden sich zuerst die Polcentra, die neuen Kerne dringen zwischen dieselben hinein und schicken sich zur Theilung an. Die in mancher Hinsicht interessanten Vorgänge der Theilung werde ich in der definitiven Arbeit ausführlich besprechen können.

7. Betrachten wir das weitere Schicksal der beiden Furchungskugeln. Die vordere Kugel beginnt zu wachsen, bis sie die Grösse der hinteren erreicht hat. Dann erweitert sich die letztere der Quere nach und bald entsteht in der Medialebene eine Vertiefung, welche die spätere Furche andeutet. Die auch jetzt sichtbare Plasmaansammlung wird dadurch aber nicht halbirt, sondern geht unverändert in die rechte Hälfte über. In demselben Momente, als die Furche vollständig zu Stande kam, wiederholen sich dieselben Vorgänge auch auf der vorderen, kleineren Kugel, so dass eigentlich ein aus 3 Kugeln bestehendes Furchungsstadium nicht existirt, sondern, dass fast gleichzeitig 4 Kugeln entstehen, die wir weiterhin als Makromeren bezeichnen wollen. Dieselben liegen in einer kreuzförmigen Anordnung, die hintere ist der Träger der Protoplasmaansammlungen, die auch jetzt auf der Oberfläche des Eies als braungefärbte, obere und untere Scheibchen erscheinen. Bald aber beginnt die untere Plasmaansammlung sich mit der oberen zu vereinigen, während gleichzeitig ein kleiner Theil des oberen Protoplasmahofes den übrigen Makromeren mitgetheilt wird. Somit entsteht — wie die longitudinalen Horizontalschnitte schön zeigen — eine mächtige Protoplasmaströmung, wodurch, sowie durch die inzwischen stattfindende Kernspindel-Umdrehung in allen Makromeren, eine sonderbare Umgestaltung der letzteren an der Oberfläche wahrnehmbar ist. Sämmtliche Makromeren nehmen an Grösse zu und haben schliesslich wieder die ursprüngliche kreuz-

---

Embryonen in der sog. Eiweissflüssigkeit zu rottiren begannen. Nachdem ich nun dieses abnormale Ei durch die Schnittmethode untersucht habe, fand ich zu meiner Überraschung nachfolgende merkwürdige Verhältnisse: Das Ei besteht nur aus dem Nahrungsdotter, während die bei den normalen Eiern vorhandene periphere Protoplasmaschicht (Bildungsdotter) gänzlich fehlt. Ferner liegen in dem Nahrungsdotter parallel neben einander zwei wohl entwickelte Furchungsspindeln. Aus dieser Thatsache darf ich wohl schliessen, dass nur der Mangel an Protoplasma (Bildungsdotter) das Ei verhinderte sich zu theilen und überhaupt sich weiter zu entwickeln; andererseits ist die Duplicitaet der Furchungskerne in diesem Falle schwierig zu erklären. — Die geschilderten abnormalen Fälle findet man in den Cocons sehr oft; solche Eier zerfallen später in eine schmierige, bräunliche Masse.

förmige Gestalt. Sodann entstehen die ersten 4 Mikromeren in der von *Kovalevsky* angedeuteten Weise. Dieselben bestehen nur aus dem Protoplasma und entbehren der Dotterkügelchen.

8. In den nachfolgenden Vorgängen spielt die hintere Makromere die wichtigste Rolle, in der, wie bemerkt, das Protoplasma von beiden Polen sich concentrirte. Nachdem nämlich die ersten 4 Mikromeren ihre definitive und gleiche Grösse erlangt haben, knospet aus der hinteren Makromere eine grössere, aus Protoplasma bestehende Zelle, die, wie die vertikalen Längsschnitte zeigen, aus dem gemeinsamen Protoplasmanest ihren Ursprung hat und bezüglich der Grösse zwischen der der Mikromeren und Makromeren steht; somit werden wir sie als Mesomere bezeichnen.

Dieselbe verdrängt die inzwischen vermehrten Mikromeren mehr nach vorne und bald darnach bildet sich in derselben Weise aus der hinteren Makromere, beziehungsweise aus deren Protoplasma die zweite Mesomere, die sich hinter der ersten stellt, und schliesslich entsteht die dritte Mesomere, welche in Bezug auf die Grösse und Gestalt den vorderen zwei vollständig gleich ist. Mikromeren sind bereits zahlreich zu beiden Seiten und nach vorne vorhanden. Die Längsschnitte durch dieses Stadium beweisen, dass die hintere Makromere bereits des Protoplasma entbehrt, indem dasselbe zur Bildung der Mesomeren verwendet wurde.

9. Die vorderen 2 Mesomeren bleiben eine Zeit lang unverändert, während die dritte, hintere Mesomere sich mehr der Quere nach ausbreitet und schliesslich sich in zwei neue, gleich grosse Mesomeren theilt, die bald zu der ursprünglichen Grösse ihrer Mutterzelle heranwachsen. Bald darnach theilen sich in der Längsaxe auch die 2 vorderen Mesomeren, so dass zwei Reihen von je 3 gleich grossen Mesomeren entstehen, die aus der Umgebung der inzwischen stark sich vermehrenden Mikromeren hervortreten. Die vorderen zwei Mesomeren theilen sich nun — immer in der Längsaxe — in zwei, dann in 4 Zellen, die aber nicht wachsen, sondern durch weitere Theilung die Grösse der Mikromeren annehmen. An solchen Eiern treten nur die 4 hinteren Mesomeren hervor. Dieselben Theilungsvorgänge wiederholen sich aber bald auch an dem zweiten Paare der jetzt vorderen Mesomeren und somit zerfallen dieselben in eine Anzahl der Mikromeren, während das hinterste Paar der Mesomeren sowohl jetzt als auch später bei der späteren Furchung der Makromeren unverändert bleiben und als zwei weisse, stark gewölbte Kugeln dem hinteren Ende der Mikromeren aufsitzen.

10. Verfolgen wir nun das Schicksal der Makromeren, welche beinahe nur aus Dotterkügelchen bestehen und nur ein geringes Quantum des Protoplasma umgiebt den Kern. Während der Bildung der Mikro- und Mesomeren befinden sich die Makromeren in einem Ruhestadium; erst zur Zeit, als sich das vordere Mesomerenpaar zu theilen beginnt, theilt sich auch die hintere Makromere in zwei ungleiche Kugeln, von denen die kleinere unterhalb der hinteren Mesomere zu liegen kommt. Derselbe Proces wiederholt sich auch an den übrigen drei Makromeren, in der Weise, dass sich eine kleinere Portion in der nächsten Umgebung der Mikromeren abschnürt, während die grösseren Kugeln auf dem unteren Pole des Eies sich befinden. Nun findet eine rasche Theilung der Makromeren statt, im ganzen aber sehr unregelmässig, indem bald die vorderen, bald die hinteren Makromeren neue Elemente produciren; nur die eine Regel lässt sich statuiren, dass die kleineren Makromeren-Produkte höher zu liegen kommen als die grösseren. Das ursprüngliche aus 4 Makromeren bestehende Entwicklungsstadium war mehr flach, welche Gestalt es auch später, als die Mikromeren und unpaarigen Mesomeren sich herausgebildet haben, bewahrt. Erst nachdem sich die Mikromeren bedeutender vermehrt haben, indem die ursprünglichen kleinen Zellen sich zu wiederholten malen theilen und nebstdem die 3 vorderen Makromeren auch eine Anzahl Mikromeren produciren und nachdem auch die vorderen 2 Paar Mesomeren in Mikromeren zerfallen sind, erhebt sich der obere Pol mächtiger, und nachdem schliesslich die Makromeren allmälig sich vermehrten, nimmt das Furchungsstadium mehr eine kuglige Gestalt an.

Dadurch erhalten wir ein Furchungsstadium, welches der Amphiggstrula entspricht; die obere aus Mikromeren bestehende und kleinere Calotte mit den 2 grossen Mesomeren am hinteren Rande stellt das Epiblast vor, während die untere grössere aus Dotterzellen bestehende Hälfte dem Hypoblast angehört. Aber die Mesomeren des Epiblastes beginnen sich bald einzusenken, und zwar in der Weise, dass sie von oben her durch die Mikromeren und von unten her von den Hypoblastzellen allmälig umwachsen werden. Führt man durch dieses Stadium vertikale Medialschnitte, so finden wir eine unbedeutende Furchungshöhle zwischen dem Epi- und Hypoblast; am Rande des Epiblastes liegen die allmälig sich zwischen die beiden Keimblätter einstülpenden Mesomeren und beginnen bereits in kleinere Zellen zu knospen. Diese, sowie die Schnitte der späteren Stadien beweisen sehr überzeugend, dass die Mikromeren sich nirgends an

der Bildung der Keimstreifen betheiligen; die letzteren, schlechthin als Mesoblasttreifen bezeichnet, entstehen einzig und allein aus den grossen Epiblastzellen oder Mesomeren. Eine jede dieser Zellen knospet anfangs in eine Reihe von 4—5 kleineren Elementen, die in dem ein wenig älteren Stadium, als das geschilderte, fast parallel neben einander verlaufen, beiderseits aber nach aussen von den Epiblastzellen verdeckt sind, so dass sie ganz und gar in der Furchungshöhle liegen.

Die vorderen dieser Keimstreifzellen theilen sich dann in je zwei und dann in vier Elemente und erfüllen so beinahe die ganze Furchungshöhle. Die inzwischen sich weiter vermehrenden Hypoblastzellen dringen zwischen die beiden Keimstreifen hinein und verdrängen sie allmälig an die Seiten. Die Epiblastzellen vermehren sich nun unbedeutend; durch das Aneinanderstossen des Hypoblastes werden sie allmälig flach und erstrecken sich dadurch auf die untere Hälfte der Kugel. Es findet demnach keine Umwachsung des Hypoblastes statt, sondern stülpt sich der letztere in die äussere Epiblastumhüllung ein. Dadurch werden auch die Keimstreifen allmälig nach unten verdrängt, freilich aber bleiben sie mit ihren Mutterzellen, den Mesomeren in stetem Zusammenhange und verwachsen auch am vorderen Ende. Sie liegen jetzt wie vor nicht am Rande des Epiblastes und können demnach keinesfalls aus demselben durch Verdickung entstanden sein. Die Epiblastzellen sind, wie bemerkt, ganz flach mit ebensolchen Kernen, nur die Zellen, welche direkt die Keimstreifen bedecken, sind viel höher, fast kubisch und färben sich intensiv roth.

11. Die Hypoblastzellen theilen sich verhältnissmässig sehr langsam, nur an der Peripherie ist deren Vermehrung etwas rascher als im Inneren und am unteren Pole. Dem entsprechend findet man an der ganzen Randschicht des Hypoblastes viel kleinere, platte oder kubische Dotterzellen als in den übrigen Regionen des genannten Blattes. In der Umgebung der Keimstreifen verlieren die Hypoblastzellen schliesslich die ursprüngliche fettige Natur und stellen dann vor amoebenartig verästelte Elemente, die den Keimstreifen dicht anliegen.

Sehr intensiv findet aber derselbe Process am vorderen Pole statt, dort nämlich, wo die Keimstreifen sich vereinigen. Es bildet sich hier eine Gruppe dicht neben und aneinander liegenden Hypoblastzellen, die der Dotterkügelchen völlig entbehren und sich ebenso intensiv roth wie die Keimstreifzellen tingiren. Den ersten Anfang derartiger Hypoblastzellen kann man bereits in dem Stadium finden, als die Mesomeren sich einzustülpen und die ersten Keimstreifzellen zu pro-

duciren beginnen. Aus den derart differencirten Hypoblastzellen bildet sich später die Epithelschicht des Anfangstheiles vom Mitteldarme — der Oesophagus.

12. Zur Zeit, als sich die obere Hälfte des Hypoblastes in den Epiblast eingestülpt hatte, erscheinen die am vorderen Rande verwachsenen Keimstreifen äusserlich als ein aequatorialer Wulst des betreffenden Entwicklungsstadiums. Nun beginnt die Bildung der Kopfanlage in nachfolgender Weise. Durch die fortschreitende Vermehrung der Zellen verdicken die beiden vorderen, verwachsenen Keimstreifenden und zwar in der Weise, dass die Duplicität meist sehr schön hervortritt und dies um so mehr, als nicht selten die beiden Hälften sich von den Keimstreifen lostrennen und in die Mediallinie zwischen die letzteren, die wiederum bogenförmig verwachsen, zu liegen kommen. Diese Kopfanlage findet an der Stelle statt, wo die differenzirten Hypoblastzellen zur Bildung des Oesophagus gruppirt sind. — Dadurch differenzirten sich die ursprünglichen Keimstreifen in die Kopfkeime und Rumpfkeime *Bergh's*. Von nun an nähern sich die beiden Rumpfanlagen zu einander, indem der Hypoblast sich allmälig ganz in den Epiblast eingestülpt hat. Die „Rumpfkeime" umfassen in dem vorderen Theile die Anlagen des Kopfes, während sie nach hinten noch ganz getrennt sind. Der Embryo entbehrt noch des Mundes, während der Oesophagus ganz angelegt ist; nachher fängt er sich an zu verlängern, der Kopf hebt sich über die Oberfläche auf und es entsteht durch die Einstülpung der Kopfhypodermis der Pharynx, welcher das erste Segment einnimmt. Die weiteren Entwicklungsvorgänge werde ich in meiner definitiven Arbeit ausführlich besprechen und vornehmlich die Entwicklung der Hypodermis, des Nervensystems, der Muskel- und Peritonealelemente, sowie die Entstehung der Exkretionsorgane behandeln.

12.

O zákonitosti hmotné práce.

Četl prof. **A. Vávra** dne 9. dubna 1886.

1. Úloha.

Prozkoumá-li se hmotná práce v celém rozsahu jejím totiž nejen v jejím principu, nýbrž i ve všech jednotlivých zjevech, seznà se, že

všecka vychází ze základu společného, jednotného, jenž jest samostatným a nezávislým na těch základech, na kterých jsou zbudovány ostatní nauky naše, i že základ ten má cenu vědeckou. Dále se pozná, že v konání této práce panuje přesná zákonitosť geometrická, mechanická a chemická, ježto společným jménem nazvati lze zákonitostí hmotné práce neboli zákonitostí technologickou a tudíž že jest možné, veškerý obor hmotné práce prozkoumati soustavně za pomocí některé methody badací a výsledky badání toho sestaviti v přesnou soustavu vědeckou; jedním slovem: pozná se, že ze všech poznatků, nabytých badáním v oboru hmotné práce, lze vytvořiti nauku, jež má i obsah i formu nauky přísné a jež tvoří takto jeden samostatný, sám v sobě uzavřený článek přísné vědy, veškerého to vědeckého poznání našeho. Konečně se pozná, že takto vzniklá nauka, jížto lze přiložiti jméno nauky o hmotné práci neb starší jméno, technologie, má některé styky s naukami jinými, zejména mathematickými a přírodními, které lze určitě vymeziti.

V následujícím vyznačím hlavními rysy postup, jenž jest nutným při prozkoumání naznačeného vědeckého obsahu. Vycházeje přitom od pojmů známých, dovodím především, že určitá zákonitosť v konání hmotné práce skutečně trvá; a přecházeje odtud k pojmům neznámým, novým, vyložím, která tato zákonitosť jest. Na příhodnou dobu pak sobě ponechám, sestaviti obsah ten ve všech podrobnostech v jednotnou soustavu vědeckou a vyznačiti dotčené styky nauky o hmotné práci s naukami příbuznými.

2. Podstata hmotné práce.

Přesné a úplné rozřešení této úlohy vyžaduje především vymezení pojmu hmotné práce. Pro vymezení to sáhnouti musíme k samému základu jejímu totiž ku hmotě, na nížto práce se koná.

V té příčině známo jest z věd přírodních, že každá hmota, ať plynná nebo kapalná anebo pevná, považována jsouci každou částí svou za samostatný celek hmotný, trvá v určitém stavu totiž v určité době nalézá se v prostoru na určitém místě, má při tom určitý zevní tvar a určitou hmotnou podstatu čili hmotný obsah. Toto místo, tento zevní tvar a tato podstata hmoty jsou tři základní vidy okamžitého stavu každé hmoty.

Dále učí zkušenosť, že každé hmoty můžeme se fysicky zmocniti, použijeme-li k tomu příhodných prostředků uchopovacích. Z téže zkušenosti jest dále známo, že zmocnivše se takto hmoty, můžeme

změniti okamžitý stav její, a to buď pomocí těchtýž prostředků uchopovacích anebo jinými přiměřenými prostředky.

Změna tato může býti buď částečná, změníme-li pouze jediný neb nanejvýše dva vidy okamžitého stavu jejího samy o sobě, ponechajíce třetí nezměněným; anebo úplná, vykonáme-li změnu tu ve všech třech videch tohoto stavu jejího. Jsouce sobě vědomi podstaty každé takovéto změny totiž znajíce její zákonitosť, a kromě toho majíce patřičné ty prostředky co nástroje žádané změny po ruce, můžeme hmotu z jednoho stavu jejího převésti do jiného stavu známého, jejž určíme už před započetím této změny. A tento vědomý převod hmoty z jednoho stavu jejího ve známý stav jiný jest hmotnou prací Podstata tohoto převodu jest tedy podstatou hmotné práce a v zákonitosti jeho musí spočívati a hledána býti zákonitosť hmotné práce.

3. Samostatnosť hmotné práce.

Pojem hmotné práce vymezen jest tudíž těmito pěti znaky jeho: 1) pojmem hmoty, jakožto nositelky její; 2) pojmem prostředku uchopovacího, kterým každá částť hmoty jakožto samostatný celek se jímá; 3) pojmem určité zevní síly, pomocí které hmota, byvši uchopena, jest v určitém vidu svém udržována, čímž dovršuje se dokonalé zmocnění-se její; 4) pojmem určité energie, kterou jednotlivé vidy okamžitého stavu hmoty lze změniti; a 5) pojmem nástroje, jímžto hmotná změna podlé určitého zákona se koná. Všecky tyto znaky jsou nerozlučnými složkami hmotné práce; všecky společně musí se splniti, má-li se tato provésti. Některé z nich jsou samozřejmými, jiné potřebují výkladu.

K samozřejmým znakům náleží, že bez skutečné hmoty nelze práce provésti; neboť vše, k čemu by se na základě pouhého ponětí hmoty mohlo dospěti, byla by pouhá představa této práce, nikoli práce sama, o niž se zde jedná. Dále jest samozřejmé, že jest zapotřebí hmoty trvale se zmocniti a to tak dokonale, abychom jí mohli vládnouti úplně podle své vůle, majíce ji dle určitého zákona přetvořiti. Všeliké nesplnění této podmínky činí hmotnou práci vůbec nemožnou, poněvadž každé byť i jen částečné unikání hmoty při jejím přetvořování působí rušivě na zákonitý průběh jeho. Z toho vyplývá, že k provedení práce jsou přiměřené prostředky uchopovací a dostatečně velká zevní síla nezbytnými.

Ku znakům, jež potřebují výkladu, náleží energie zevní a nástroj.

O této energii nabýváme vědomosti vlastním konáním práce. Ku provedení hmotné práce jest nezbytně zapotřebí skutečné změny některého vidu okamžitého stavu hmoty, tudíž i určité energie, která by po čas trvání této změny na hmotu ve smyslu této změny působila. Energie ta, jsouc vůbec součinem velikosti síly a dráhy, po kterou tato síla na hmotu působí aneb hodnotou tomuto součinu aequivalentnou, jeví se nám buď co energie zevní čili mechanická, tak zvaná mechanická práce, neb co teplo, její to aequivalent; anebo jeví se nám co energie chemická čili jako práce chemická. Mění-li totiž hmota své místo anebo svůj zevní tvar, změna ta stává se vlivem síly mechanické, jež působí na hmotu po dráhu měřitelnou; mění-li se však podstata hmoty, pak energie zde činná jest energií neb prací chemickou, jejížto složka, síla chemická, působí na hmotu do dálky neměřitelné. Obě energie, jež jsou činné při přeměně tvaru hmoty a její podstaty, přemáhají síly molekulárné; v tom případu pak, v němž děje se přeměna místa hmoty, energie mechanická přemáhá přítažlivost hmot, jež jeví se nám buď co tíže anebo co její účinek na hmotě jiné, tření.

Z té příčiny energie mechanická a chemická jsou pouhými prostředky ku dosažení určitého nového stavu hmoty čili ku vykonání hmotné práce; proto žádná z nich není s hmotnou prací totožna; a poněvadž obě mají se ku vykonaným hmotným pracím jako příčiny ku svému následku, jsou zpotřebované velikosti jejich ku vykonaným velikostem hmotné práce úměrny.

Jako nelze přetvořiti hmoty bez určité energie, rovněž tak nelze provésti hmotné změny bez určitého hmotného prostředku; neboť mechanická síla, jeden to součinitel mechanické energie, před započetím převodu nalézá se mimo hmotu přetvořovanou. Podobně i chemická síla, jež jest součinitelem energie chemické, musí býti jinou silou chemickou vzbuzena, a tato síla budící musí svůj účinek na sílu molekulárnou, kterou chemická změna hmoty se děje, přenésti taktéž pomocí určitého prostředku. Tyto prostředky jeví se nám co nástroje hmotné práce, jež jsou v každém jednotlivém případu k jejímu provedení nezbytné, avšak v každém mají jiný tvar a jinou jakosť; neboť z různé jakosti hmoty, na nížto práce se koná, zcela určitě vyplývá i různosť prostředků ku této práci příhodných i různosť potřebných k ní zevních sil a následovně i různý způsob konání práce samé.

Proto konání hmotné práce musí se díti podle určitého přesného zákona.

Zajisté, když známe počáteční stav hmoty a zvolíme sobě ještě před započetím hmotné změny určitý stav konečný, musí převod hmoty ze stavu počátečného do konečného míti tak zákonitý průběh, aby tohoto posledního stavu zcela bezpečně se dosáhlo; přitom nerozhoduje, je-li takovýto průběh pouze jediný možný anebo je-li jich možno více; zde rozhoduje v první řadě to, že zákonitosť tato skutečně trvá a že při konání hmotné práce splniti se musí.

Poněvadž od konání práce neoddělitelným jest druh použitého nástroje i co do jeho tvaru i velikosti i způsobu použití; a dále poněvadž i výsledek této práce, hmota to po svém přetvoření, jest závislým na zákonitém konání jejím, jest patrné, že zákonitosť ta ovládá všecky jmenované složky hmotné práce, jakožto její podmínky. Nesplní-li se kterákoli z těchto podmínek, nelze hmotné práce provésti; rovněž však bez hmotné práce nelze hmoty přetvořiti. Práce tato, pojata jsouc tedy co celek, jeví se nám co zcela samostatný zjev celého převodu.

Ze všeho pak plyne, že pojem hmotné práce není pojmem jednoduchým, nýbrž složeným z pěti členů. K plnému pochopení jejímu jest zapotřebí znáti všecky jmenované složky její i jejich zákonitou souvislosť spolů, především pak nástroj, jakožto její složku nejpřednější, nejdůležitější. Poznáním tímto objevuje se nám hmotná práce i co organicky spořádaný celek i co samostatná látka vědecká.

4. Rozvrh hmotné práce.

Děje-li se hmotná změna jen v jediném vidu jejího okamžitého stavu a sice pouze jediným způsobem čili dle tohotéž principu mechanického neb chemického, hmotná práce touto změnou dosažená jest vždy stejného druhu; děje-li se však změna ta i v tomtéž vidu vždy spůsobem jiným aneb děje-li se ve dvou i ve třech videch hmotného stavu současně, ať způsobem stejným nebo nestejným, vzniká tím hmotná práce druhu rozdílného. Závisí tedy druh hmotné práce především na druhu měněného vidu, za druhé na způsobu této změny. Jelikož vidy tyto jsou tři a každý z nich může býti měněn sám o sobě, obdržíme tři různé druhy hmotné práce co její hlavní skupiny. A poněvadž v každé skupině můžeme podlé vlastností hmoty měniti způsob práce, obdržíme v každé více od sebe různých druhů konané práce.

Předně můžeme měniti pouze místo, jež hmota zaujímá v prostoru, neměníce přitom ani jejího zevního tvaru ani vnitřní podstaty;

hmota pouze přimísťuje se čili translokuje. Přemístění to jest výkon ryze mechanický, poněvadž provádí se i silou i prostředky mechanickými. Práce tímto přemístěním vykonaná jest hmotnou prací mechanickou a, hledíc k její zevní jakosti, hmotnou prací translokační; znám jest tento druh práce technicky jménem transport hmot. Přemístění to může se provésti ve čtyřech různých směrech, čímž vznikají tato čtyři podřadí jeho: přemísťování do dálky, do výšky, po šikmých plochách a do prostoru.

Za druhé může se měniti pouze zevní tvar čili forma hmoty; děje se to tím, že se mění vzájemná poloha částic hmotných, přičemž i podstata hmoty i poloha její v prostoru v podstatě se nemění. I tento výkon jest ryze mechanický, poněvadž děje se i silou i prostředky mechanickými; energie k tomu potřebná jest energií mechanickou a má za výsledek hmotnou práci mechanickou. Jest to její druhý druh, práce transformační, známý jménem mechanické zpracování hmot.

Transformaci hmoty můžeme provésti trojím způsobem:

Předně: vzájemným přemístěním částic ve hmotě, neměníce přitom jejího množství; čehož jsou tyto dva způsoby:

a) přemístění částic samovolné, jež děje se vlivem zákonů fysikálných, zvláště hydrostatických, bez součinnosti naší. Hmota nalézá se přitom v stavu kapalném. Míra tohoto přimístění, posuzována jsouc po zevnějším tvaru hmoty před a po jejím přemístění, závislá jest výhradně na tvaru nádoby, v níž hmota se nalézá; a trvalost tohoto přemístění závisí na vlastnostech hmoty. Tuhnoucí hmoty podržují tvar, jehož nabývají ztuhnutím v těchto nádobách, trvale a sice více nebo méně přesně v souhlasu s tvarem nádoby; hmoty netuhnoucí mění svůj tvar stále, mění-li jej i nádoba. Prvější případ slouží za základ slévání hmot k účelům hlavně praktickým, druhý k účelům větším dílem vědeckým.

b) přemísťování částic nucené, jež děje se výhradně vlivem sil zevních za součinnosti naší. Hmota nalézá se přitom ve tvaru více nebo méně tvárném. Míra přemístění tohoto řídí se zákony mechaniky, zejména dynamiky, zůstávajíc pouze závislou na prostředcích, jichžto se při tomto přemístění používá. Tento druh hmotné práce jest základem zpracování hmot tvárných.

Za druhé: oddělováním částic, odjímajíce s hmoty v jejím stavu počátečném toliko ty částice, které leží mimo mez jejího žádaného stavu konečného. Hmoty takto přetvořované jsou nejčastěji tuhé a plastické, mohou však býti též kapalné neb plynné. Přetvoření řídí

se zákony mechaniky a geometrie, zejména dynamiky a geometrie deskriptivní. Na tomto druhu práce zakládá se obrábění hmot všeho druhu, jsouli tuhé.

Za třetí: spojováním částic v nový celek, při čemž tyto jsou dle jednoho z předešlých způsobů tak upraveny, že připojení jich k sobě může se státi bezprostředečně. Na tom zakládá se veliké hotovení předmětů složených z více dílů.

Konečně můžeme měniti samu podstatu hmoty, aniž bychom měnili její místo v prostoru. Mění-li se při této chemické přeměně též tvar její čili nic, jest zjevem nepodstatným, poněvadž účelného tvaru zevního dodává se hmotě po její přeměně chemické. Ku přeměně této jest zapotřebí síly chemické; a proto práce, již tato síla koná, jest hmotnou prací chemickou, a dosahuje se jí chemického zpracování hmot.

Při skutečném provádění hmotné práce jest však málo případů, v nichžto bychom mohli hmotu k určitému danému účelu přetvořiti pouze jediným z výše uvedených druhů hmotné práce; obyčejně k dokonání práce jednoho druhu jest zapotřebí předchozí přeměny jednou ze prací ostatních. Tak jeví se nám tato předchozí jako práce úpravní a práce na ni následující jako výrobní.

5. Zákonitosť hmotné práce.

Při stanovení podstaty hmotné práce bylo vysloveno, že v zákonitosti převodu hmoty z jednoho stavu jejího do jiného známého spočívá zákonitosť v konání hmotné práce; při výkladu, že hmotná práce jest zjevem samostatným, bylo stručně dovozeno a rozvrhem hmotné práce ještě více dotvrzeno, že určitá zákonitosť v konání hmotné práce skutečně trvá; nyní sluší vyložiti, jaká tato zákonitosť v plném svém rozsahu jest. Úloha ta jest tím důležitější, že jejím správným rozřešením vlastně se dokáže, že v konání hmotné práce panuje přesná zákonitosť geometrická, mechanická a chemická, jež společně se vyskytujíce, tvoří obecnou zákonitosť hmotné práce čili zákonitosť technologickou. Sluší tedy šíře dovoditi, která zákonitosť vztahuje se ku konání hmotné práce, která ku hmotě, která ku nástrojům jejím a která k jejímu výsledku.

Jelikož jedna část zákonitosti mechanické, totiž kinematická, těsně souvisí se zákonitostí geometrickou a toliko druhá část její, zákonitosť dynamická, vystupuje samostatně, bude pojednáno v následujícím o obecné zákonitosti hmotné práce nejprvé se stanoviska

geometrie a kinematiky, na to se stanoviska dynamiky a konečně se stanoviska chemie.

A. Obecná zákonitosť hmotné práce.

a) Zákonitosť geometrická a kinematická.

Některé z jmenovaných změn hmotných, ať částečných ať úplných, možno provésti co osamělý jediný výkon hmotný, po jehožto skončení hmota nachází se ve stavu novém, úplně dokonaném. Z nich jedny samy o sobě jeví se nám co výkony úplně samy v sobě zakončené, v posloupnosti pak na sebe co řada výkonů nastalých po přítržích; jiné opět jeví se co výkony trvací, jež v posloupnosti své na sebe do sebe splývají, tvoříce tak výkon nepřetržitý, jako největší počet výkonů chemických i valný počet výkonů mechanických. Přetržité výkony můžeme provésti co řadu jednoduchých výkonů hmotných, z nichž každý, aby sám mohl býti konán, vymáhá skončení jednoduchého výkonu právě předchozího. K dosažení určitého cíle totiž ku vykonání hmotné práce určitého rozsahu, nezbytně jest zapotřebí, aby tato řada byla po určitý stupeň svůj vyvinuta.

Přihlédneme-li blíže k této řadě, poznáme snadno, že všecky výkony musí následovati na sebe v pořádku zcela určitém, poněvadž jeden výkon visí na druhém zcela přesným, určitým svazkem příčinnosti, jehožto nelze pominouti, chceli se práce tato vykonati. Tímto svazkem příčinnosti stává se řada tato řadou zákonitou, a všecky jednoduché výkony jeví se v ní co prvky hmotné práce.

Prvky ty jsou buď stejnorodé, spočívají-li na tomtéž principu mechanickém nebo chemickém; řada jich jest řadou stejnorodou, čímž jeví se nám býti nepřetržitou. Anebo prvky tétéž řady jsou různorodé, jestli každý z nich spočívá na jiném principu; řady takovéto jsou řadami různorodými. Avšak i v řadách těchto následují prvky na sebe v pořádku zcela určitém, tvoříce její kratší, ale přesně od sebe oddělené řady čili periody prvků. Následovně řada různorodá složena jest z více period, čímž jeví se co řada složitá na rozdíl od řady jednoduché, jež jeví se nám vlastně co jediný, více nebo méně dlouho trvající výkon jednoduchý. Periody jedné řady jsou buď pravidelné, obsahují-li v sobě v pořádku arithmetickém prvky stejného druhu a stejné velikosti, a samy v řadě následují na sebe též v pořádku arithmetickém; anebo periody tyto jsou nepravidelné, jestli

některý prvek v periodě naskytuje se v pořádku výjimečním, nebo se co do své jakosti a velikosti od příslušného prvku v jiných periodách různí, anebo konečně když nestejné periody následují na sebe v pořádku neurčitém. Pravidelné periody jsou podlé počtu prvků, z nichžto se skládají, dvoj-, troj-. čtyř-, pěti- a vícedobé. Ku zakončení práce t. j. ku dosažení určitého stavu hmoty jest zapotřebí buď jen jediné periody prvků anebo delší řady period, při čemž posloupnost period v řadě jest tak zákonitá jako posloupnost prvků v periodě.

Tato zákonitá souvislosť period v řadě jeví se co pravidlo hmotné práce a posloupnosť jich na sebe tvoří její zákonitý postup. Takto konaná hmotná práce jest prací správnou, poněvadž jsou u ní známy nejen oba konečné stavy hmoty, počáteční a závěrečný, nýbrž i zákonitosť převodu jednoho stavu v druhý. Ku správnému a úplnému pochopení hmotné práce jest nezbytně zapotřebí, postup této práce rozložiti v jednotlivé periody, tyto pak v její prvky a určiti geometrickou a kinematickou podstatu každého prvku. Tím objeví se nám převod hmotný v jedné své části co práce konaná správně geometricky a kinematicky, v druhé pak co výkon dynamicky zákonitý.

b) Zákonitosť dynamická.

Ku vykonání určitého množství hmotné práce Z pomocí určitého prostředku jakožto jejího nástroje jest zapotřebí určité velikosti energie mechanické E neb thermické C aneb chemické X, které podlé druhu použitého nástroje v každém jednotlivém případu jsou jiné. Aby se mohl stanoviti poměr velikosti některé z jmenovaných energií ku velikosti hmotné změny, které se energií touto dosáhlo, jest především nutné znáti jednotku této změny jakožto její měřítko, načež teprvé tento poměr stane se pro každý použitý nástroj poměrem algebraickým

$$Z:Z_1 = E:E_1 = C:C_1 = X:X_1$$

a vymezí velikosť hmotné změny s přesností algebraickou. Jednotka tato bude zajisté pro každý ze tří jmenovaných druhů hmotné práce jiná a musí pro každý z nich býti zvláště vymezena.

α. Jednotka hmotné práce translokační.

Poněvadž při hmotné práci translokační děje se pouze změna místní, musí její jednotka míti na sobě znak míry délkové s a znak

míry sílové p, tedy tytéž znaky, které shledáváme na velikosti vykonané práce mechanické $p . s$ čili na velikosti ku přemístění spotřebované energie mechanické E. Dle toho můžeme první dva poměry psáti $Z : Z_1 = ps : p_1 s_1$. Pro hmotnou práci translokační hodí se tudíž za jednotku její patrně nejlépe ta veličina, jejížto znak sílový p zastoupen jest vahou hmoty přemísťované $g = 1$ a znak délkový $s = 1$ vyjadřuje dálku, na kterou toto přemístění se děje; pak vyjadřuje se touto jednotkou $Z = 1$ ta velikosť práce translokační, která se vykoná na jednotce váhy hmoty přemístěním jejím na jednotku dálky.

Toto přemístění musí se díti vždy pomocí určitého prostředku translokačního či dopravovacího. Prostředku toho jsou v podstatě dva druhy: k prvnímu hmota se zavěšuje, a síla přemísťovací přemáhá tu odpor přímo totiž váhu veškeré hmoty, rozumějíc tím i váhu hmoty přemísťované i váhu prostředku dopravního; na druhý hmota se klade, při čemž síla přemísťovací přemáhá buď pouze odpor tření, které pohybem přemísťovaných hmot vzniká anebo vedle toho i odpor váhy veškeré hmoty totiž přemísťované i prostředečné, podobně jako v případu prvém.

Děje-li se přemísťování jednotky hmoty pomocí zavěsení ku prostředku dopravnímu, tedy jestli síla přemísťovací p'_1 přemáhá váhu hmoty G i s váhou prostředku dopravního G_1, pak patrně musí býti obě síly sobě rovny, $p'_1 = G + G_1$. Zpotřebovaná energie mechanická jest tu $E_1 = (G + G_1) . s$, avšak vykonaná práce translokační pouze $Z = G . s$. Případ tento naskytuje se při nesení hmot.

Nalézá-li se jednotka hmoty na prostředku dopravním položena, síla přemísťovací musí přemoci ten odpor, který jí klade hmota i spolů s prostředkem dopravním. Odpor ten jest předně pouhé tření, jehož velikosť obnáší $\beta . (G + G_1)$, značí-li β koefficient tohoto tření a G_1 váhu prostředku dopravního. Zpotřebovaná energie mechanická obnáší tu patrně $E_2 = \beta . (G + G_1) . s$, kdežto vykonaná práce translokační jest tatáž, jako v případu předešlém. Setkáváme se s případem tímto pouze při dopravě hmot vodorovné. Za druhé odpor ten sestává vedle tření též z odporu, který působí váha hmoty, je-li tato pomocí prostředku dopravního přemísťována šikmo na dálku $s = 1$, při čemž dálka svisné dopravy obnáší s' a dopravy vodorovné s''; tedy $s^2 = s'^2 + s''^2$. Velikosť zpotřebované energie mechanické obnáší zde patrně $E'_3 = (G + G_1) . (\beta s'' + s')$ a práce translokační opět $Z = G . s$.

Nejmenší míra energie mechanické, které by bylo zapotřebí ku vykonání hmotné práce translokační o velikosti $Z = Gs$, byla by pro

$G_1 = 0$, t, j. kdyby nebylo třeba k tomu žádného prostředku dopravního; míra ta byla by $E_4 = G.\ s$, tedy v tomto případě ve svých znacích úplně shodná se samou prací translokační. Jelikož tato posledně jmenovaná práce ve všech případech zůstala stejna a toliko zpotřebovaná k ní energie mechanická se měnila podle způsobu prostředku dopravního, jest patrně poměr těchto energií $E_4 : E_1 = \eta_1$, $E_4 : E_2 = \eta_2$ a $E_4 : E_3 = \eta_3$ měrou prospěšnosti prostředku použitého ku této práci čili jeho effektem.

K účelům praktickým bylo by ještě zapotřebí zvoliti určitou váhu G a určitou délku s za jednotky v práci translokační. Obě tyto jednotky mohly by býti v jednotlivých případech praktického upotření různé, ustálené konvencí. Jakkoli takováto číselná hodnota jednotky jest pro účely praktické velmi důležitá, zůstává pro účely vědy věcí poměrně méně závažnou; zde pak zvláště pouze o to se jednalo, dokázati, že jednotka tato jest vůbec možnou a má cenu též praktickou. Neboť používajíce tímto způsobem jednotky hmotné práce translokační, dospíváme nejen ku poznání, jak velké energie mechanické neb jí aequivalentní energie chemické jest zapotřebí ku vykonání určité práce translokační, nýbrž i který prostředek dopravovací jest ku provedení tomu nejvýhodnějším.

β. Jednotka hmotné práce transformační.

Při určování jednotky, kterou lze měřiti velikosť hmotné práce transformační, sluší míti na zřeteli trojí způsob této práce, jenž vyložen byl rozvrhem hmotné práce, a voliti jednotku tu tím způsobem, aby stejně dobře hověla všem třem druhům transformace. Podmínce této bezprostředně nemůže učiniti za dost žádná jednotka, poněvadž samovolné přemísťování částic, dějící se pouze vplyvem jejich tíže, nutně vymáhá hmoty v stavu kapalném, kdežto přemísťování částic nucené i oddělování jich, po případě spojování, předpokládá hmotu v stavu více nebo méně tuhém; proto musí se jednotka ta voliti tak, aby bylo možné převésti její hodnotu na všecky různé tvary, potřebné pro všecky tři druhy práce transformační.

Jelikož samojedinou hmotu o sobě (totiž bez připojení k ní jiné hmoty, jako se na př. děje v roztocích) lze uvésti z jejího skupenství pevného do kapalného pouze rozmnožením jejího tepla, tedy roztavením hmoty tavitelné, a opět navrátiti ji ve stav tuhý, jenž jest nutným podkladem ostatních způsobů transformace, odejmutím tohoto tepla, hodila by se ku vyjádření jednotky změny tvarové velmi dobře

jednotka thermická. Tato jednotka byla by i tím výhodná, že jest znám poměr tepla, jakožto energie thermické, ku energii mechanické a tudíž že by bylo možné ustanoviti v příhodných případech poměr změn tvarových, nastalých vplyvem tepla, ku změnám těm, jež nastaly vplyvem sil mechanických. Poněvadž ale mnohé změny tvarové u hmot tuhých nedějí se přímo teplem, nýbrž vplyvem sil mechanických, a mechanická energie, jež ku přeměně této jest potřebna, by se musela převésti na energii thermickou; lépe jest pro tento způsob hmotné přeměny vyjádřiti jednotku hmotné práce transformační přímo energií mechanickou, tak že by jen ty změny, které se dějí bezprostředně vplyvem tepla, byly měřeny jednotkou thermickou. Z těch důvodů odporoučí se pro jednotku hmotné práce transformační dvojí její tvar: tvar jednotky thermické a tvar jednotky mechanické.

Při volbě velikosti této jednotky sluší se říditi jednotkami, kterými se měří velikosť objemu a váhy hmoty a vztáhnouti ji buď pouze ku objemu anebo pouze ku váze hmoty přetvořované. Za tuto hmotu můžeme považovati především tu její část, která zbyde po odstranění hmoty, ležící mimo mez žádaného tvaru; anebo za druhé možno samu odpadlou tuto část považovati za hmotu přetvořovanou, vztahuje-li se hmotná práce výhradně k tomuto odpadajícímu dílu hmoty; anebo konečně, je-li předmětem hmotné přeměny odpadek hmoty, jehož množství zůstává v cele stálém, známém poměru ku množství jejímu, jež po této přeměně zbude, lze za hmotu přetvořovanou považovati buď prvou anebo druhou její část.

Hledíc ku absolutní velikosti jednotky hmotné práce transformační kteréhokoli z obou její tvarů, zůstávají v platnosti tytéž zásady, které byly vysloveny při určování absolutní velikosti jednotky u hmotné práce translokační totiž že vědě jedná se především o to, je-li jednotka taková vůbec možná, a že číselná hodnota její zvolí a ustálí se způsobem konvencionálním. Z předešlého pak plyne přímo, že takováto jednotka, vyjádřující míru tvarové přeměny hmoty, možná jest, že tedy i v tomto ohledu panuje při transformaci hmoty přesná zákonitosť. Používajíce této jednotky, dosahujeme nejen toho, že poznáváme absolutní hodnotu energie, jež jest potřebna aneb byla zpotřebována ku vykonání určité práce transformační, nechť tato děje se kterým-koli z výše uvedených tří způsobů, nýbrž porovnáním velikostí energií, která za použití různých nástrojů ku tétéž práci byly zpotřebovány, nabýváme známosti o větší nebo menší prospěšnosti nástroje k určité práci i o jeho effektu.

c) *Zákonitosť chemická.*

Poněvadž určité hmoty působí zcela určité změny disgregační na hmotách ku změnám těmto příhodných a to nejen co do jakosti, nýbrž i co do míry těchto změn, jest nade vši pochybnosť zřejmé, že i ohledem hmotné práce disgregační lze stanoviti určitou hodnotu její jakožto jednotku čili míru této změny. Velikosť této jednotky možno učiniti závislou buď na váze anebo na objemu hmoty a dle konvence praktické ustáliti její číselnou hodnotu. Jelikož však předmět tento jest tohoto pojednání další než oba předešlé, nebude zde o jednotce hmotné práce disgregační blíže jednáno; pro naše účely zajisté stačí, když se poukáže ku možnosti této jednotky a její hlavní ráz se označí.

B. Zákonitosť hmoty.

Všeliké zpracování hmot říditi se musí druhy a jakostmi jejími; tedy jako chemické zpracování jich založeno jest na jejich vlastnostech chemických, stejným způsobem musí mechanické zpracování býti založeno na jejich vlastnostech mechanických, po případě též fysikálných. Jelikož však oboje tyto poslednější vlastnosti jsou závislé buďto na chemickém složení hmoty, nebo na jejím fysologickém slohu, sluší nejprvé tyto vlastnosti znáti se stanoviska chemie a fysologie a pak ze znalosti jich odvoditi příslušné zpracování.

Touto nestejnou vlastností hmot sestává každá práce z jiných a jiných prvků, vyžaduje vždy jiných nástrojů a poskytuje různých výsledků; proto znalosť hmoty co do její vlastností fysikálných, mechanických a chemických, po případě fysiologických jest základním požadavkem správné hmotné práce; bez této znalosti všeliká práce hmotná jest pouhým empirickým zkušováním, konána však za dokonalé znalosti hmoty jest v prvním tomto stadiu přesně zákonitou. Tou příčinou souvisí zákonitosť hmoty se zákonitostí hmotné práce.

C. Zákonitosť nástroje.

Bylo vyloženo, že nástroj svou podstatou jest neodlučným od hmotné práce. Těsný tento svazek musí nutně přenésti zákonitosť, kterou jsme poznali v obecné zákonitosti hmotné práce, i na její nástroj a tudíž vztahovati se nejen ku jeho druhu vůbec, totiž ku jeho

soustavě celkové i ku uspořádání podrobnému, nybrž i ku způsobu jeho použití při práci samé. Vztah prvější podmiňuje patrně geometrickou zákonitosť nástroje, poslednější jeho zákonitosť kinematickou a dynamickou; oboje pak, jsouc závislé na druhu a jakosti hmoty, souvisí s její zákonitostí chemickou.

Nechť posuzujeme kterýkoli nástroj v jeho uspořádání geometrickém anebo za jeho použití v práci, vždy dospějeme k tomu výsledku, že se jeví u něho ve všem úplná zákonitosť; proto všeobecně platí pravidlo, že jen správným nástrojem a správným jeho použitím lze konati správnou hmotnou práci. Tak zákonitosť této práce až ku neodloučení těsně souvisí se zákonitostí nástroje, jehož se k ní používá; kdežto však prvější sluší jakožto úkaz plynulý posuzovati se stanoviska kinematiky a dynamiky, nutno posuzovati zákonitosť nástroje jakožto předmětu realného se stanoviska geometrie, a pouze v tom okamžiku, kdy nástroj stává se převoditelem síly mechanické na hmotu zpracovávanou, čímž nástroj s hmotou do jisté míry v jedno splývá, lze posuzovati jej i se stanoviska kinematiky a dynamiky.

D. Zákonitosť stroje.

Veškeré závěrky, jež byly vysloveny v předešlém oddílu, zůstávají v platnosti, nechť nástroj jest v práci veden ručně anebo strojem, jeho tuhými mechanismy, jež nahrazují ruku; neboť za obojího vedení tohoto má se vykonati tatáž hmotná práce, musí se realizovati tudíž její zákonitosť čili v obou případech splniti tytéž její podmínky. Závěrky tyto v plném svém obsahu týkají se pouze podstaty těchto podmínek nikoli jejich míry; neboť kdežto při ruční hmotné práci nelze dostáti všem podmínkám těm s neodchýlnou konsekvencí až do plné jejich míry, dosahuje se konáním hmotné práce pomocí stroje, když všecky jeho výkony dějí se automaticky, vrcholu té zákonitosti. Konání to jest zrealizovaným přesným pochodem všech jednotlivých podmínek jeho v plné jejich podstatě i míře; všeliké odchýlení se od této přesnosti jest ihned zřejmým, poněvadž má za nutný následek buď porušení stroje anebo porušení správného pochodu práce, jež lze opět odčiniti a správný postup znova zavésti; proto jest tento zkušeností verifikovaný postup hmotné práce nejen viditelným obrazem, nýbrž i spolehlivým vzorem její logičnosti.

Při konstruování strojů pro účely hmotné práce musí se její zákonitosti úplně šetřiti. Zajisté každý takový stroj, aby byl správným ve svém výkonu, musí býti správným ve svém složení; proto musí

obsahovati v sobě mechanismy pro všecky výkony, které by se konaly při práci ruční, tyto musí se díti v tomtéž pořádku a s touž pravidelností, jako při práci ruční. A jelikož vedení nástroje zde jest provedeno mechanismy tuhými, vzdorujícími všelikému odchýlení-se od poměrů geometrických, proto jest míra přesnosti větší než při nástroji vedeném ručně. Tím se také stává, že přesnosti té se dosahuje trvaleji čili že výrobky zhotovené strojem jsou ve všem všudy stejnější, sobě geometricky podobnější, než prací ruční. Z toho pak dále vyplývá veliká důležitost studia zákonitosti hmotné práce i snaha, provésti co možná všecky výkony její automaticky pomocí stroje a redukovati tím výkony ruční na počet a míru nejmenší. Vplyvem tímto stává se práce ruční stále podřízenější práci strojní, jsouc tak v podstatě své pouhou obsluhou stroje neboli podřízeným zasáhnutím v realizující se zákonitosť práce. Ačkoli tuto ruční práci nijakž nelze úplně odstraniti a nahraditi ji prací strojní, poněvadž alespoň počáteční její výkon, zavedení do stroje, vždy zůstane výkonem ručním a výkon konečný, přerušení to její v ustanovenou dobu a určitým způsobem, taktéž po větším díle zůstane práci ruční; přece lze mez těchto obou výkonů vždy dále a dále pošinouti na prospěch práce strojní.

V hlavních jednotlivostech vztahuje se zákonitosť stroje především k tomu, aby hmota, jež má se zpracovati, byla správně a trvale ve stroji upevněna totiž aby pro geometricky správně konané pohyby nástroje měla patřičnou polohu a byla v ní držána silou přiměřenou ku vzbuzenému odporu. Rovněž síla mechanická musí býti správně převedena na hmotu; hlavně její velikosť musí býti přiměřena ku velikosti a způsobu odporu a působiti na hmotu zcela určitým směrem. Tím podmíněn jest i druh i podrobné uspořádání stroje i jeho pohyb v práci. Konečně třeba zvoliti postup práce přiměřeně ku výrobku i ku surovině, aby tato zpracovala se i, hledíc ku požadavkům mechaniky, ekonomicky co nejvýhodněji. Ze všeho plyne, že zákonitosť stroje spočívá na obecné zákonitosti hmotné práce a na zákonitosti hmoty, z nichž prvá jest mechanickými prostředky realizovaná.

E. Zákonité seřadění strojů v továrně.

Velice zřejmě jeví se zákonitosť hmotné práce v seřadění strojů za účelem soustavné práce v továrně. Jelikož každý jednotlivý stroj koná jen jedinou periodu hmotné práce, musí všecky stroje jedné soustavy následovati na sebe v tomtéž pořádku, ve kterém postupují na sebe

periody v methodě výrobní. Každý stroj musí práci své periody provésti do té míry, aby stroj následující mohl v ní ihned dále pokračovati, musí tedy svým přesným výkonem zasáhnouti v stroj předešlý a následující tak dokonale, jako se pojí jeho perioda ku oběma svým sousedním. Seřadění strojů v továrně pro jednotnou soustavnou práci hmotnou musí poskytovati viditelného obrazu methody výrobní, musí býti tak zákonité jako methoda sama.

Každé odchýlení-se od zákona toho ruší i nepřetržitosť práce i její správnosť. Předešlou závěrku lze též takto opáčiti: poněvadž v celém postupu výrobním panuje a musí panovati přísná zákonitosť, má-li hmotná práce býti správnou, musí nejen v konstrukci strojů, nýbrž i v seřadění jejich zavládnouti týž zákon, kterým se řídí postup práce.

Zákonitosť tato jest tak mohutnou, že obsluhovač strojů, převáděje zpracovávanou hmotu od stroje ku stroji, stává se tělesně služebným této zákonitosti, a maje svou pozornosť upoutanou ku správnosti této práce, stává se touto svou soudností i duševně služebným jejímu zákonu. A maje tak stroj se strojem pojiti, musí nezbytně k přesnosti práce svůj zřetel obrátiti, ji musí stále posuzovati, aby vystihnuv ji, mohl v pravý čas zasáhnouti ve výkon strojů. Zde obsluhovač sleduje duchem zákonitosť, kterou konstruktér převedl v tuhé mechanismy stroje, pojí tedy svou duševní činnosť k duševní činnosti jeho; a co zevně tělesnou svou silou stroji slouží, slouží svou soudností duševní činnosti konstruktéra anebo-li zákonitosti hmotné práce. Dokladem toho jest, že možno tuto tělesnou činnosť nahraditi tuhými mechanismy a činnosť duševní zákonitým uspořádáním a připojením jich k oběma příslušným strojům. A tak se skutečně stává. V případech těch jest celá řada strojů řadou nepřetržitou, v ní stroj slouží stroji nepřetržitě, jakoby celé strojní zřízení bylo jediným jen strojem mnohočlánkovým. Součinnosť obsluhovače pošinuta jest pouze na oba konce stroje, na počátek, kdy práci do něho uvozuje, a na konec, kdy ji z něho vyjímá; v ostatním průběhu práce omezuje se jeho činnosť pouze na dozor, že práce se podle zákona koná, a na omezení neb odstranění nastalých vad v ní. Příkladů toho, jak duch tvůrčí svěřuje svoji vymoženosť péči genia zachovatele, bylo by lze uvésti bezvýminečně z každé továrny, jež jest ve svém pravidelném, zákonitém chodu.

Sledujíce zákonité seřadění strojů v továrně dále až do jeho podrobností, seznáváme, že zákonná zásada jeho naplněna musí býti nejen pouhou řadou, nýbrž i v rozdělení jejím na určité skupiny, jež

pak uspořádány jsou vedle sebe v příhodných místnostech. Každá výměna stroje v této řadě nebo ve skupině za jiný, na novém základě konstruovaný, nebo každé přemístění jejich navzájem značí změnu methody výrobní, a každé zlepšení kteréhokoli stroje a kteroukoli měrou znamená i její zlepšení.

F. Zákonitá souvislosť továren.

Nejen že stroje v továrně seřaděny býti musí v pořádku přesně zákonitém, nýbrž i továrny, jež některými složkami hmotné práce se stýkají, musí býti uspořádány dle určitého pravidla a to i co do velikosti i co do nástrojů, strojů, surovin i výrobků. I sám vznik jejich není libovolný, nýbrž vázán jest určitými podmínkami, které spočívají dílem v zákonitosti hmotné práce, dílem v ustálených poměrech mimo ni. Zkoumati tyto poměry není úlohou nauky o hmotné práci a při zřizování továren třeba jich dbáti jen potud, pokud na nich spočívá kratší nebo delší trvání jejich; ale nesmí se přehlédnouti jejich hlavní činitel, normy hmotné práce. Neboť jako se roztřiďuje řada strojů v jedné továrně na určité skupiny podlé toho, který druh práce jest strojem konán, podobně roztříditi se musí řada hmotné práce ve více samostatných celků, když v průběhu jejím vyskytují se různé principy a ty svou objemností společně podmiňují značnou velikosť továrny a růzností svých principů výkony velice nestejnorodé. To dělí od sebe továrny; zákonitosť hmotné práce je však k sobě pojí.

G. Zákonitosť výrobků.

Výrobek, jsa výsledkem hmotné práce, totiž hmotou po jejím přetvoření v konečném známém stavu, nutně musí nésti na sobě přesný ráz zákonitosti této práce, musí býti v každém ohledu zákonitým. Tento výrok plyne přímo z logické souvislosti jednotlivých úkazů uvedené zákonitosti obecné i není třeba ještě zvláště jej dokazovati. Jednotlivé případy, které by se uváděly na doklad toho, sloužily by pouze na další těchto obecných vět objasnění, nikoli na jejich odůvodnění, proto není zapotřebí jmenovitě se jimi zabývati.

6. Přímé následky zákonitosti hmotné práce.

V předešlém oddílu bylo, jak za to mám, zřejmě dokázáno, že v konání hmotné práce panuje přesná zákonitosť geometrická, mecha-

nická a chemická; nyní bude v hlavních rysech vyložen poměr dělníka, jenž hmotnou práci koná neb ji řídí, pak poměr konstruktéra, který stroje pro účely hmotné práce navrhuje, jakož i poměr průmyslníka, jenž práci tu v život průmyslový uvozuje, ku hmotné práci vůbec. Jest patrné, že úloha tato jest ve své podstatě totožnou s úlohou, stanoviti poměr zákonitosti hmotné práce k intelektu člověka a vzájemný vliv obou na sebe. Jsem daleký toho, odpovídati na tuto otázku v celém rozsahu jejím, neboť úloha ta ve druhé části své značila by psáti historii vzdělanosti lidské a nikoli pojednati o zákonitosti hmotné práce; zde bude vyznačen pouze první styk zákonitosti této s duševní činností.

a) Poměr dělníka ku nástroji.

Nástroj hmotné práce, jakožto předmět zákonitý a pomocný při sdělání jiného předmětu též zákonitého, řízen musí býti v práci určitým pravidlem; a jelikož vedení jeho děje se pouze ručně, musí dělník, aby vůbec mohl správně pracovati, pravidla ta znáti. Požadavek tento jest požadavkem vědění dělníkova. Souborná sestava všech stejnorodých pravidel o jednom nástroji anebo o celé skupině jich tvoří patrně theorii nástrojů vůbec, kteráž jest jednou částí theoretické nauky o hmotné práci.

Druhým požadavkem přesného konání hmotné práce jest, aby dělník její dodělal se dostatečné zručnosti v konání toho, o čem nabyl vědomosti. Jest to požadavkem umělosti či dovednosti dělníkovy. Té nabývá se patřičným cvikem čili opakováním výkonu, jehož zákonitosť se poznala. Úkolem tu jest, nejen ruku zvyknouti, aby nástroj zcela určitě a s jistotou do práce zavedla a s touž jistotou jej po čas práce řídila, až konečně hmota přetvořovaná nalézá se v tom stavu zákonitém, ku kterému hmotná práce směřovala, nýbrž i vycvičiti při tom oko tou měrou, aby každou odchýlku skutečného výkonu od výkonu zákonem předepsaného bezpečně postřehlo a ještě v čas podalo zprávu o počátku chybné práce. Patrné, že tato stránka hmotné práce jest ryze praktickou, od nížto část theoretická může býti úplně oddělena a samostatně pěstována, kdežto část praktická bez theoretické obstáti nemůže čili že technické umění jest bez technického vědění nemožným. K tomu pojí se požadavek fysické síly, aby se mohly překonati odpory, které vznikají konáním práce hmotné. Bez ní jest všeliká hmotná práce nemožnou; tělesná síla dělníkova jest tudíž zákonitým požadavkem této praktické části.

Jako se pojí ku části praktické požadavek fysické možnosti, stejně tak obsažen jest v části theoretické požadavek psychický, který ukládá, aby osvědčovala se plná soudnosť, zda-li práce, ježto se skutečně koná, jest touž prací zákonitou, která se konati měla. Dělník musí tedy svůj výkon stále pozorovati a srovnávati s onou měrou jeho, která jest obsažena v jejím zákoně a tím o ní souditi, je-li správná čili nic. V tom spočívá duševní činnosť dělníkova.

Jest patrné, že tento psychický výkon nelze nijakž odděliti od cviku manuálního na žádném jeho stupni, ani tehdá, když vycvičenosť přešla v dokonalou zběhlosť, routinu; vždy musí dělník svým duchem bdíti nad svým výkonem fysickým, vždy musí při práci mysliti. Nepadá tu na váhu, že s postupující vycvičeností děje se to vždy snáze, ani že odchýlky od dokonalosti jsou vždy menší; soudná činnosť dělníkova musí trvati a skutečně trvá stále, byť by tento byl v práci sebe více vycvičen; neboť každé zmenšení bdělosti tohoto soudu, an nástroj nejsa veden tuhými mechanismy, nýbrž snadně od pravého směru odchylitelnými svaly ruky, vyšinuje se z práce zákonité, má nezbytně za následek odchýlku od správné hmotné práce a tudíž pohnůtka ku opětnému zvýšení bdělosti a soudnosti. Bylo by tudíž úplně chybné,*) souditi z této snadnosti, že s postupující vycvičeností současně ubývá duševní činnosti dělníka, až na vrcholu oné tato přechází v čirou bezmyšlénkovitosť. V pravdě s cvikem ruky současně bystří se soudnosť ducha a oboje, dodávajíc dělníkovi vždy vyšší dovednosti, povznáší práci ruční k samému vrcholu zákonitosti.

Tou příčinou pojí se k oběma požadavkům předešlým požadavek trvalé pozornosti při práci; bez ní dělník, i kdyby sebe větší soudnou mohutností oplýval, není s to vykonati práci správně. Každé ochabnutí pozornosti oslabuje soudnosť a ochablá soudnosť má v zápětí odchýlku od přesnosti práce. Každodenní zkušenosť dokazuje, že jest to pouhou a velice řídkou náhodou, pravou to výjimkou z pravidla, jestli dělník i za nepozornosti vede na okamžik nástroj v práci pravým směrem. A přesná práce jest důkazem trvalé psychické činnosti dělníka při práci jeho i dokladem, že bez ustavičného myšlení nelze ani hmotné práce provésti správně.

b) Poměr konstruktéra ku stroji.

Podmínky, na které položena byla správná hmotná práce, jížto dělník koná ručně nástrojem, ztěžují tuto práci značnou měrou, číníce

*) A těžké této chyby dopustil se prof. Dr. T. G. Masaryk ve svém spisu „Základové konkretné logiky“ na str. 135.

dělníka podstatným jejím činitelem. S obtížemi těmito nesetkáváme se u strojů, které konají práci automaticky; při nich všecky podmínky správné práce jsou realizovány konstrukcí stroje, a trvalosť i zákonitosť jejich ručí za trvalé a zákonité konání její. Vycvičenosť dělníka, která vedla nástroj do práce podle určitých zákonů geometrických a mechanických, zastoupena jest u stroje geometrickými a mechanickými poměry mechanismů strojních; soudnosť jeho nahrazena jest tu účelnou volbou těchto mechanismů, již provedl konstruktér při návrhu stroje, a trvalá pozornosť nahrazena jest trvalostí konstrukce, totiž pevností a tuhostí její článků.

Následkem toho součinnosť dělníka, jenž stroj při práci obsluhuje, snížena jest, hledíc k této práci, na míru nejmenší, čímž zároveň zamezeny jsou odchýlky o její přesnosti; spočívať tu přesnosť a správnosť práce v přesnosti a dokonalosti stroje. Při práci strojní zaujímá konstruktér svým věděním a uměním ono důležité místo, které při ruční práci zaujímá dělník svou soudností a dovedností. Úlohou konstruktéra strojů pro účely hmotné práce jest tedy, ty zákony geometrické a mechanické, které jsou obsaženy v hmotné práci a jež při ruční práci jen neúplně se dodržují, zrealizovati trvale tuhými články strojními a články ty voliti přiměřeně k účelu konané práce. Takovým způsobem konstruktér zatlačuje dělníka od ruční práce, a svým věděním a konstruktivným uměním zrealizovav zákony hmotné práce, dosahuje náhrady nejen za fysickou, ale i za psychickou činnosť jeho; seznáváme tím v konstruktéru zvelebitele hmotné práce.

c) Poměr průmyslníka ku hmotné práci.

Jako konstruktér znáti musí plně zákonitosť hmotné práce, maje stroj pro účely její konstruovati, rovněž tak jest průmyslníku, jenž svou duševní činností chce zdárně zasáhnouti v průběh průmyslu, znáti základ jeho, jenž spočívá v zákonitosti hmotné práce, v určité výkonnosti strojů, v jejich správném seřadění v továrně, ve vzájemné souvislosti továren i v ustálených poměrech, které leží sice mimo ni, ale na její rozvoj mají patrný vliv. Dále jest mu stálou bdělostí udržovati v mysli nepřetržitou spojitosť všech těchto článků života průmyslového; všeliké přerušení její působí větší nebo menší měrou rušivě na průběh průmyslu buď jen v tomto oddílu anebo i vůbec. Odchýlky tyto zavdávají sice podnět k nové vydatnější činnosti na tomto poli, aby se dosáhlo opětné spojitosti jeho, ale úkaz ten jest důkazem, že život průmyslový řízen jest zákony, jež jako poslední články zákonitosti hmotné práce se jeví, a které průmyslník nejen

znáti, nýbrž i plniti musí. Zároveň jest patrno, že zvelebováním hmotné práce zvelebuje se i průmysl.

d) Vliv zákonitosti hmotné práce na rozvoj intellektu.

Nepřihlížíme-li historicky ku vzniku a vývoji hmotné práce od jejího počátku až po naši dobu, nýbrž máme-li na mysli výhradně její stav v některé době, poznáváme snadno, že dělník, konající zákonitým způsobem hmotnou práci, vyznačuje se určitými vlastnostmi ducha, jež nám pozorovatelům jeví se jakožto jeho vyvinuté schopnosti duševní. Rovněž konstruktér, jenž duchem svým zákonitosť hmotné práce postihnul a svým konstruktivným uměním ji v tuhé články strojní převedl, vykazuje určitý stupeň vědění a umění. Taktéž průmyslník, který hmotnou práci v život průmyslový uvádí, musel sobě dříve osvojiti určité známosti z oboru této práce, aby v život průmyslu mohl zdárně zasáhnouti. Všickni tito činitelé hmotné práce vyznačují se tedy určitým stupněm vzdělání odborného.

Zkušenosť při konání hmotné práce až dosud nabytá učí, že síly přírodní, jež se nám při této práci jeví co odpor, jenž má býti přemožen zevní silou mechanickou, nezvětšují se tímto přemáháním, nýbrž trvají v určitém stavu setrvačném. Druhá zkušenosť v tomtéž oboru nabytá učí nás, že nejen vědomosti dělníka, jenž hmotnou práci zákonitě koná, nýbrž i jeho schopnosti tímto konáním se zdokonalily; neboť již ta jediná okolnosť, že dělník, počna s prací nic z ní neuměje, nabývá v ní vždy plnějšího vědění a dokonalejšího umění, svědčí o tom, že rozvoj těchto schopností aspoň po jejich nynější stupeň tímto vlivem hmotné práce skutečně možným byl. Sluší se nyní na základě obojí této zkušenosti, jež podle všeho, co až dosud o nich víme, možno pokládati za správné, dovoditi, že vývoj ten jest i dále přes nynější jeho stupeň možným čili, že konání hmotné práce způsobem zákonným jest přímým prostředkem k rozvoji ducha lidského.

Pozorujmež z té příčiny tělesnou i duševní činnosť dělníka, jenž hmotnou práci koná zákonitě. Bylo o tom výše dovozeno, že dělník, maje touto prací svou dosáhnouti přesného výsledku, stále musí bdíti nad zachováváním všech zákonitých podmínek jeho, totiž že musí svou práci stále bedlivě pozorovati, posuzovati a jejími pravidly se v ní ve všem všudy říditi. Soudností tou při opětované činnosti své dospívá ku zkušenosti, že určitý způsob konání jejího jest snadnější druhého, neb že jest možné nabýti jím výsledku přesnějšího, nebo dodělati se výsledku nového. To jest mu novým poznatkem, jehož nabyl jedině konáním této práce; obor jeho vědomostí se jím rozšířil.

Veden jsa kteroukoli potřebou, použije dělník tohoto nového poznatku ku přeměně svého nástroje, t. j. ku jeho zlepšení, nebo ku zdokonalení methody pracovní, anebo určí nový výrobek a stanoví proň nový nástroj a novou methodu výrobní. Tím postoupí dělník tento na nový, vyšší stupeň odborného vzdělání. A tou měrou, kterou jemu takovýchto odborných zkušeností přibývá, přibývá jemu i dále odborného vzdělání. Jelikož každý poznatek musí býti pojat určitou silou duševní, mohutností poznávací, musí i nově nabyté poznatky býti pojaty buď nově vzbuzenou anebo zvětšenou mohutností poznávací, poněvadž poznatky dřívější zůstávají nezměněně zachovány: intellektu dělníka tedy při konání hmotné práce dojista přibývá.

Stejným způsobem dovoditi lze týž pochod v duchu konstruktéra a průmyslníka i vůbec u všech lidí, jižto zabývají se hmotnou prací; u všech vlivem této práce, koná-li se zákonitě, intellektu jejich přibývá. Národ průmyslný jest intelligentnější národu neprůmyslného Tak souvisí vývoj intellektu velmi těsně s vývojem hmotné práce, maje v ní své kořeny; ovšem ovoce tohoto rozvoje sklízí opět hmotná práce, jsouc jím zvelebována. Není mne nijak tajno, že i jiné příčiny než samojedině hmotná práce měly vliv na rozvoj intellektu a tudíž že jej mají i na vývoj hmotné práce; ale pravda tato táhne se pouze k míře tohoto vlivu, nikoli ku jeho podstatě, poněvadž i bez těchto příčin by rozvoj intellektu byl možným, ač nikoli do té míry, které dosáhnul za spoluúčinkování příčin ostatních. V naznačeném účinku spočívá veliká vědecká hodnota hmotné práce i po stránce filosofické; k ní sluší se větší měrou přihlížeti, než jak až dosud se dělo.

Účinkem zákonitosti hmotné práce lze vysvětliti nejen intellektuálný rozvoj ducha, totiž jak vzniknul, jak postupem času se mění a které výše kdy dosáhnul, nýbrž možno použíti jej do jisté míry ku vysvětlení samé vzdělanosti. Není mne též tajno, že zákonitosť tato není jediným vlivem na rozvoj této vzdělanosti, nýbrž že ku zvelebení jejímu přispěly i momenty podstatně jiné; ale nepochybuji, že hmotná práce byla k ní krokem prvním a bezpečným i mám za to, že ku studiu a výkladu vzdělanosti této nejbezpečnějším počátkem by bylo studium zákonitosti hmotné práce a všestranný výklad jejího vlivu na intellekt lidský.

7. Vědeckosť veškeré látky.

Vědeckosť veškeré hmotné práce výsledí z vědeckosti všech její složek: z vědeckosti hmoty co základu této práce, ze zákonitého způsobu jejího konání, ze zákonitosti nástrojů jakožto prostředků této

činnosti a konečně z výsledku práce samé, z jejího výrobku. Jelikož ve všech těchto směrech panuje přesná zákonitosť, pro kterou žádná hmotná práce nemůže se konati nahodile, nýbrž podle určitých vět technologických, jest vědeckosť této látky nade vši pochybnosť vyvýšena, možno ji tudíž vědecky spracovati, hlavně ve směru technickém.

K badání v oboru tomto možno použiti kterékoli methody badací, neboť tato látka, jižto jest prozkoumati do podrobna, není ohledně method, jichž by bylo lze při tom použiti, nijak v žádném směru omezena, čímž žádná methoda badací není z použití vyloučena. Poněvadž však při té přeobsáhlé rozmanitosti látky zkumné, jevící se nejen v různosti hmoty zpracované, nýbrž i v nástrojích k tomu použitých i ve výrobcích tím nabytých, jest bezpečnosť methody badací požadavkem nejpřednějším; proto na prvním místě odporoučí se k tomuto badání methoda genetická.

13.

Zur graphischen Zusammensetzung der Kräfte und Drehungen im Raume.

Von Prof. **Josef Tesař** in Brünn, vorgelegt von Prof. Jos. Šolín am 9. April 1886.

(*Mit 1 Tafel*).

Herr Baurath Mohr in Dresden veröffentlichte im Jahrgang 1876 des „Civilingenieur“ pag. 121 eine „Über die Zusammensetzung der Kräfte im Raume“ überschriebene Abhandlung, in welcher das citirte Thema graphisch unter Zugrundelegung eines Verfahrens gelöst wird, welches von dem Culmann'schen im Princip und in der Durchführung verschieden ist.

Der um die Ausbildung graphischer Methoden und deren Einführung in die Ingenieurwissenschaften hochverdiente Autor verwirft mit Recht beim graphischen Verfahren die Bestimmung der Richtung und Grösse der die Paare oder Momente darstellenden Axenstrecken, er betont die mangelhaften Controlbehelfe des Culmann'schen Verfahrens und bezeichnet letzteres als ein solches, welches in der graphischen Statik keine Anwendung verdient.

Ohne auf Mohr's Methode näher einzugehen, sei hervorgehoben, dass Herr Mohr zu seiner Construction dreier zu einander nor-

mal liegenden Projectionsebenen bedarf, auf welche die zusammenzusetzenden Kräfte orthogonal projicirt werden. Verzichtet man auf einen Theil der Controlen, so kann wohl eine Projectionsebene wegfallen, aber die drei Coordinatenaxen, in denen sich die Projectionsebenen schneiden, müssen beibehalten werden.

In Folgendem soll die graphische Zusammensetzung der Kräfte im Raume mit Benützung von nur zwei Projectionsebenen behandelt werden.

Hiebei soll den Einwendungen, die Mohr gegen das Culmann'sche Verfahren erhebt, volle Rechnung getragen werden.

Es wird sich herausstellen, dass die zu entwickelnde Methode an Durchsichtigkeit der Mohrischen nicht nachsteht, dieselbe aber in Bezug auf Einfachheit der nothwendigen Constructionsbehelfe überragt.

Das zu lösende Problem der Zusammensetzung der Kräfte und Drehungen im Raume lässt sich in Folgendem zusammenfassen:

1. Ein System von beliebigen Kräften soll reducirt werden auf eine Einzelnkraft, welche mit einer Geraden, der Centralaxe des Systems, zusammenfällt, und ein Moment, dessen Ebene zur Centralaxe senkrecht steht.

Der Inbegriff dieser Einzelnkraft und dieses Moments führt den Namen Winder. (Siehe R. St. Ball's „The Theory of Screws". — Transact. of the R. J. Acad. Vol. XXV. pg. 137. Nov. 1871.) — Parallel hiemit und auf dieselbe Art zu lösen ist das Problem:

2. Ein System gleichförmiger Rotationsbewegungen (Winkelgeschwindigkeiten) soll reducirt werden auf eine gleichförmige Rotationsbewegung, (Winkelgeschwindigkeit), welche um eine gewisse Gerade, die Centralaxe des Systems, erfolgt und auf eine gleichförmige Translationsbewegung, (Translationsgeschwindigkeit), welche gleichzeitig parallel der Centralaxe stattfindet. Der Inbegriff beider Bewegungen heisst Windung und die resultirende Bahn des bewegten Punktes ist eine Helix.

Die Zusammensetzung eines Kräftesystems zu einem Winder geschieht mittelst desselben Linien-Complexes, wie die Zusammensetzung eines Systems von Winkelgeschwindigkeiten zu einer Windung.

Es stehen sich die Begriffe Kraft und Winkelgeschwindigkeit, Moment und Translationsgeschwindigkeit, Centralaxe und Centralaxe gleichwertig gegenüber.

Es wird somit hinlangen, nur die Zusammensetzung der Kräfte im Raume eingehend zu behandeln, da hiemit zugleich die Zusammensetzung der Drehungen erledigt erscheint.

Bekanntlich lässt sich ein Kräftesystem durch ein Paar einander conjugirter Kräfte ersetzen. Solcher Paare conjugirter Kräfte (nach Culmann Kräftepaare, nicht zu verwechseln mit dem von Poinsot eingeführten Begriffe Kräftepaar = Drehzwilling), welche ein Kräftesystem ersetzen, giebt es im Raume unendlich viele oder besser, wenn man die Anzahl der Elemente eines einförmigen Grundgebildes mit ∞ bezeichnet, ∞^4. — Sie repräsentiren eine unendliche Mannigfaltigkeit vierter Ordnung. Der Raum fasst bekanntlich ∞^4 Gerade, jede hievon kann als Richtungslinie einer der beiden conjugirten Kräfte, welche das Kräftesystem ersetzen, angenommen werden. Die Richtungslinie der anderen conjugirten Kraft, der Sinn und die Grösse der beiden conjugirten Kräfte ist durch die Annahme der Richtungslinie der einen der beiden conjugirten Kräfte bereits eindeutig bestimmt.

Nebenbei sei bemerkt, dass von diesen ∞^4 Paaren conjugirter Kräfte ∞^3 in eine einzige Gerade zusammenfallen. Sie repräsentiren Doppelkräfte, welche in derselben Geraden im entgegengesetzten Sinne wirken und von denen jede einzelne als unendlich gross und der anderen numerisch gleich angesehen werden muss.

Die Geometer nennen einen solchen Inbegriff von Geraden, wie ihn die Richtungslinien der Doppelkräfte vorstellen, einen Complex erster Ordnung und bringen denselben in einen Zusammenhang mit dem „Nullsystem“ und mit der Raumcurve 3. Ordnung.

Um auf dem einfachsten Wege zum Ziele zu gelangen, stellen wir der Lösung unserer Aufgabe jene zweier anderer Aufgaben voran, durch deren Vereinigung die Zusammensetzung eines Kräftesystems selbstverständlich wird.

I. Aufgabe: Gegeben ist ein Paar conjugirter Kräfte P_1 und P_2, dasselbe ist zu ersetzen durch ein gleichwertiges Paar anderer conjugirter Kräfte P_3 und P_4, von denen die eine, z. B. P_3 in einer gegebenen Richtungslinie c wirkt.

Vor allem sei darauf hingewiesen, dass die Richtunglinien a, b, c, d der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4, von denen a, b, c gegeben sind, aber d zu bestimmen ist, Erzeugende desselben Systems eines windschiefen Hyperboloids seiu müssen. — Die Nothwendigkeit dieses Lagenverhältnisses leuchtet ein, wenn man bedenkt,

dass für jeden Leitstrahl des durch a, b, c bestimmten Hyperboloids (welcher a, b, c und alle Erzeugenden desselben Systems schneidet) als Momentenaxe die Momente von P_1, P_2, P_3 Null werden. Damit die Summe der Momente des Kräftepaares P_1, P_2 gleich jener der Momente des gleichwertigen Kräftepaares P_3, P_4 werde, ist es daher nothwendig und hinreichend, dass für jeden Leitstrahl als Momentenaxe das Moment von P_4 auch Null werde, was, da P_4 im Allgemeinen nicht Null werden kann, nur dann stattfindet, wenn d von allen Leitstrahlen geschnitten wird, d. h. wenn d eine dem System a, b, c... angehörige Erzeugende des Hyperboloids ist.

Andererseits ist klar: Werden die beiden Kräftepaare auf eine und dieselbe Projectionsebene orthogonal der Richtung und der Grösse nach projicirt, so muss die Resultirende aus den Projectionen des ersten Kräftepaares identisch sein mit der Resultirenden aus den Projectionen des zweiten Kräftepaares. — Die Richtungslinie dieser Resultirenden ist bestimmt durch die Gerade, welche den Schnittpunkt der Projectionen von a und b mit dem Schnittpunkt der Projectionen von c und d verbindet. —

Kennt man, wie in unserem Falle, umgekehrt die Projectionen von a, b, c und ausserdem P_1 und P_2, somit auch die Grösse ihrer Projectionen, und zieht man durch den Schnittpunkt der Projectionen von a und b (mit Zuhilfenahme des Kräfteparallelogramms oder eines Kräftepolygons) die Richtungslinie der Resultirenden aus den Projectionen von P_1 und P_2, so schneidet diese die Projection von c in einem Punkte, der der gesuchten Projection von d angehört.

Dieser letztere Punkt ist nun die Projection von zwei von einander verschiedenen Punkten des Hyperboloids, wovon der eine auf c, der andere auf d liegt.

Es ist nun ein Leichtes, diesen anderen Punkt selbst und die hindurchgehende Erzeugende a aufzusuchen, wodurch die Aufgabe im Princip gelöst erscheint.

In Fig. 1_a und Fig. 1_b werden die Constructionen selbstverständlich.

Wir projiciren in Fig. 1_a die zu einem räumlichen Kräftepolygon an einander gereihten Kraftstrecken und in Fig. 1_b die das räumliche Seilpolygon bildenden Richtungslinien der Kräfte orthogonal auf zwei zu einander senkrecht stehende Projectionsebenen, die wir als erste und zweite Projectionsebene unterscheiden wollen. Die erste Projection eines Punktes, einer Linie, einer Kraftstrecke ist durch einen

der Bezeichnung des Originals beigefügten Strich ($'$), die zweite Projection durch einen beigefügten Doppelstrich ($''$) ersichtlich gemacht.

Ist $\overline{01}$ die P_1 und $\overline{12}$ die P_2 der Richtung, dem Sinne und der Grösse nach bestimmende Kraftstrecke, so erhält man durch Aneinanderreihung der beiden Kraftstrecken den Linienzug 0 1 2 im Raume, dessen Schlusseite 02 die mit der Centralaxe des Kräftepaars (P_1, P_2) zusammenfallende resultirende Einzelnkraft des (P_1, P_2) entsprechenden Winders der Richtung, dem Sinne und der Grösse aber nicht der Lage nach bestimmt.

Die in Fig. 1_a verzeichneten Projectionen $0'1'2'$ und $0''1''2''$ des Linienzugs geben die Projectionen $0'2'$ und $0''2''$ der Schlussseite 02.

Zugleich bestimmen die Strecken $0'2'$ und $0''2''$ die Resultirenden aus den ersten beziehungsweise zweiten Projectionen des Kräftepaars (P_1, P_2) der Richtung, dem Sinne und der Grösse aber nicht der Lage nach.

In Fig. 1_b sind die Richtungslinien a, b, c durch ihre beiden Projectionen bestimmt. (Selbstverständlich sind $a' \parallel 0'1'$, $b' \parallel 1'2'$, $a'' \parallel 0''1''$, $b'' \parallel 1''2''$).

Wird nun durch den Schnittpunkt I$'$ von a' und b' die Gerade I$'$II$'$ parallel zu $0'2'$ gezogen, so ist deren Schnittpunkt II$'$ mit c' bereits ein Punkt von d'. — Wird analog durch den Schnittpunkt A'' von a'' und b'' die Gerade A'' B'' parallel zu $0''2''$ gezogen, so ist deren Schnittpunkt B'' mit c'' bereits ein Punkt von d''. — Die Gerade d im Raume aber liegt auf dem durch die Erzeugenden a, b, c bestimmten Hyperboloide und gehört mit den letzteren demselben System von Erzeugenden an. — Fassen wir II$'$ als erste Projection eines auf d im Raume gelegenen Punktes II, B'' als zweite Projection eines auf d liegenden Punktes B auf, so handelt sich's um die Bestimmung der anderen Projectionen beider Punkte, also um II$''$ und B'. — Diese erfolgt nun folgendermassen:

Legt man durch c eine Ebene normal zur ersten Projectionsebene, so schneidet diese a und b in den Punkten α und β, das Hyperboloid in der Erzeugenden c und in dem Leitstral $\overline{\alpha\beta}$.

Im Leitstral $\overline{\alpha\beta}$ muss II, in seiner zweiten Projection $\alpha''\beta''$ muss II$''$ liegen. Weil II$''$ und B'' (die bei einer windschiefen Lage von a, b, c nie zusammenfallen können) zwei Punkte von d'' sind, so ist d'' bestimmt.

Ebenso könnte man d' unmittelbar finden. Man lege durch c eine Ebene normal zur zweiten Projectionsebene; dieselbe schneidet a und b in den Pnnkten γ und φ, das Hyperboloid in der Erzeugenden c und in dem Leistral $\overline{\gamma\varphi}$. — Im Leitstral $\gamma\varphi$ liegt B, in seiner ersten Projection $\gamma'\varphi'$ somit B'. — Die Verbindungsgerade der Punkte II' und B' giebt d'. — Nun ist d durch beide Projectionen vollkommen bestimmt.

Es ist jedoch nicht nothwendig, II'' und B' auf diese Art ausfindig zu machen. Ist von den beiden Projectionen d' und d'' nur eine gefunden worden, so ergiebt sich die andere. — (Fig. 1_a). — Wären nämlich P_3 und P_4 bekannt, so müsste durch ihre Zusammensetzung derselbe Winder entstehen, wie durch die Zusammensetzung von P_1 und P_2. —

Vom Punkte o ausgehend müssten wir durch Aneinanderreihung der der Kraft P_4 entsprechenden Kraftstrecke $\overline{03}$ und der der Kraft P_3 entsprechenden Kraftstrecke $\overline{32}$ wieder zu derselben Schlussseite $\overline{02}$ gelangen.

Berücksichtigen wir ferner, dass $\overline{03}$ parallel zu d, $\overline{32}$ parallel zu c sein muss, so folgt:

Ist z. B. II'', somit d'' gegeben, so verzeichne man (Fig. 1_a) über $\overline{0''2''}$ den Linienzug $0''3''2''$, so dass $0''3'' \parallel d''$, $3''2'' \parallel c''$ wird.

Durch $2'$ ziehe man eine Parallele $2'3'$ zu c' und fixire in $2'3'$ durch das durch $3''$ gefällte Projectionsloth $3''3'$ den Punkt $3'$.

Die Gerade $0'3'$ bestimmt die Richtung von d'.

Wird in Fig. 1_b durch II' eine Gerade parallel zu $0'3'$ gezogen, so ist dieselbe die gesuchte Projection d' von d.

Indem man d' auf beide Arten bestimmt, hat man einen sehr einfachen und hinreichenden Controlsbehelf für die Genauigkeit der Construction.

Der Sinn und die Grösse der Kräfte P_4 und P_3 ist durch die Kraftstrecken $\overline{03}$ und $\overline{32}$, jede der letzteren aber durch ihre beiden Projectionen bestimmt, — die Aufgabe erscheint somit nach jeder Richtung hin befriedigend gelöst.

2. Aufgabe: Zwei Kräfte P_1 und P_2 sind zu einem Winder zusammenzusetzen. — Fig. 2_a und Fig. 2_b).

Reiht man (Fig. 2_a) wie in der vorigen Aufgabe die P_1 und P_2 der Richtung, dem Sinne und der Grösse nach bestimmenden Kraftstrecken $\overline{01}$ und $\overline{12}$ an einander, so bestimmt die Schlussseite $\overline{02}$ des Linienzuges 012 die Richtung, den Sinn und die Grösse der resultirenden Einzelnkraft, die mit R bezeichnet werden soll.

In Fig. 2_b sind wie in der vorigen Aufgabe a und b die Richtungslinien von P_1 und P_2. Es erübrigt noch die Bestimmung der Lage der zu $\overline{02}$ parallelen Centralaxe x und die Bestimmung des resultirenden Momentes M (dessen Ebene zu x normal sein muss).

Hieraus resultirt dann der Pfeil p des Winders, eine in die Centralaxe fallende Strecke von der Länge $p = \frac{M}{R}$, in einem solchen Sinne gezogen, dass ein im Endpunkte der Strecke befindliches Auge (gewöhnlich durch eine Pfeilspitze und den Buchstaben p bezeichnet), auf den Anfangspunkt π der Strecke gerichtet, das resultirende Moment M als ein rechtsdrehendes erblickt.

Da durch die bereits bekannte Schlussseite $\overline{02}$ und den Pfeil der Winder vollkommen bestimmt ist, so erübrigt nur die Bestimmung der Projectionen p' und p'' des Pfeiles.

Ehe wir zur Construction schreiten, stellen wir folgende Betrachtung an:

Von den ∞^4 conjugirten Kräftepaaren, die dem Kräftepaar P_1, P_2 gleichwertig sind, giebt es ∞^3 Paare conjugirter Kräfte, die zu einander senkrecht stehen.

Es fasst der unendliche Raum nämlich ∞^3 verschiedene Ebenen. Zerlegt man P_1 und P_2 in zwei Componenten, wovon die eine in eine bestimmte Ebene hineinfällt, die andere zur Ebene senkrecht steht, vereinigt hierauf die beiden in der Ebene liegenden Componenten und die zur Ebene senkrecht stehenden Componenten, so erhält man ein neues conjugirtes, dem Paar (P_1, P_2) gleichwertiges Paar von Kräften, die zu einander senkrecht stehen. Solcher Paare giebt es so viele, als Ebenen im Raume, somit ∞^3.

Nach Chasles kann der Momentensatz für gleichwertige Kräftepaare in folgende geometrische Form gebracht werden:

„Alle Tetraëder, welche sich über je zwei conjugirten (in ihren Richtungslinien liegenden) Kraftstrecken gleichwertiger Kräftepaare als Gegenkanten verzeichnen lassen, sind inhaltsgleich.*)

---

*) Streng genommen, hat bereits Möbius in seinen „Elementen der Mechanik des Himmels 1843“ den Satz allgemeiner gefasst. Man scheint übersehen zu haben, dass der Chasles'sche Satz nur eine Folgerung des Möbius'schen ist. Sind a und b, ferner α und β zwei Paare conjugirter in ihren Richtungslinien liegenden Kraftstrecken, das Paar a. b gleichwertig dem Paar α, β, und bezeichnet man mittelst des Symbols Vol $[m\ n]$ das

Endlich sei auf folgenden bekannten Satz hingewiesen: „Die Centralaxe wird von allen Linien kürzester Entfernung zweier conjugirten Kräfte rechtwinklig geschnitten.“ (Culmann „Graphische Statik“ 1875, pag. 258.) Die in der Fig. 2_a uud 2_b durchgeführten Constructionen werden nach dem vorgetragenen leicht verständlich.

Ersetzen wir vorerst unser Kräftepaar P_1, P_2 durch ein anderes Q_1, Q_2, dessen conjugirte Einzelnkräfte Q_1 und Q_2 zu einander senkrecht stehen. Nehmen wir an, dass Q_1, beispielsweise parallel zur zweiten Projectionsebene, Q_2 normal hiezu liegen soll.

Solcher Kräftepaare Q_1 Q_2, die den letzten Bedingungen entsprechen, giebt es ∞^1. Schneiden wir durch eine zur zweiten Projectionsebene parallele Ebene E die Richtungslinie a von P_1 im Punkte m und die Richtungslinie b von P_2 im Punkte n, zerlegen P_1 und P_2, jede hievon in eine in die Ebene E fallende Componente und in eine hiezu senkrechte Componente, so entsteht durch die Vereinigung der in die Ebene E fallenden Componenten die Kraft Q_1, durch die Vereinigung der zur Ebene E senkrechten Componenten die Kraft Q_2. — Da sich solcher Ebenen E eine einfach unendliche Anzahl legen lässt, so giebt es ∞^1 solcher Kräftepaare, deren Richtungslinien eine merkwürdig einfache geometrische Lage besitzen, auf deren Untersuchung einzugehen, wegen der weiteren Schlüsse von geometrischem Interesse ist.

Verschieben wir die Ebene E parallel zu sich selbst, so geben die Verbindungsgeraden der in derselben Ebene E liegenden Punkte m und n die Erzeugenden eines windschiefen Paraboloids, welches durch die Leitstralen a und b und die zweite Projectionsebene als Richtebene bestimmt ist.

Volumen eines über zwei Strecken m und n als Gegenkanten verzeichneten Tetraëders, so ist nach Möbius allgemein: $\mathrm{Vol}[ma] + \mathrm{Vol}[mb] = \mathrm{Vol}[m\alpha] + [m\beta]$, wo m eine beliebige Raumstrecke bedeutet. — Übergeht m succesive in die Strecken a, b, α, β, so resultiren die Gleichungen:

$$\mathrm{Vol}[aa] + \mathrm{Vol}[ab] = \mathrm{Vol}[a\alpha] + \mathrm{Vol}[a\beta]$$
$$\mathrm{Vol}[bb] + \mathrm{Vol}[ba] = \mathrm{Vol}[b\alpha] + \mathrm{Vol}[b\beta]$$
$$\mathrm{Vol}[\alpha\alpha] + \mathrm{Vol}[\alpha\beta] = \mathrm{Vol}[\alpha a] + \mathrm{Vol}[\alpha b]$$
$$\mathrm{Vol}[\beta\beta] + \mathrm{Vol}[\beta\alpha] = \mathrm{Vol}[\beta a] + \mathrm{Vol}[\beta b]$$

Da die Grössen $\mathrm{Vol}[aa]$, $\mathrm{Vol}[bb]$, $\mathrm{Vol}[\alpha\alpha]$, $\mathrm{Vol}[\beta\beta]$ als Null verschwinden, so folgt der Satz von Chasles als Corollar des Möbius'schen Satzes in der Form: $\mathrm{Vol}[ab] = \mathrm{Vol}[\alpha\beta]$, denn jede der Grössen ist gleich $\dfrac{\mathrm{Vol}[a\alpha] + \mathrm{Vol}[a\beta] + \mathrm{Vol}[b\alpha] + \mathrm{Vol}[b\beta]}{2}$.

Die ersten Projectionen dieser Erzeugenden sind alle parallel zur Projectionsaxe, die zweiten umhüllen eine Parabel, die zweite Contour des Paraboloids.

Wie wir auch E wählen, immer fällt Q'_1, die erste Projection von Q_1, mit dem entsprechenden $m'\ n'$ zusammen.

Ist A'' der Schnittpunkt von a'' und b'', so fällt Q''_1, die zweite Projection von Q_1, immer mit der durch A'' zur Projection der Schlussseite, $0''2''$ gezogenen Parallelen zusammen.

Für alle Lagen von E ist Q_1 dem Sinne, der Richtung und der Grösse nach durch $0''2''$ bestimmt.

In allen Lagen muss Q_1 das in A'' zur zweiten Projectionsebene gefällte Perpendikel rechtwinklig durchschneiden.

Das System sämmtlicher (unter einander gleicher und gleichgerichteter) Kräfte Q_1 erfüllt eine durch A'' normal zur zweiten Projectionsebene parallel zur Schlussseite $\overline{02}$ gelegte Ebene.

Etwas Aehnliches ergiebt sich für die Lage sämmtlicher Kräfte Q_2.

Von den durch die Zerlegung der conjugirten Kräfte P_1 und P_2 entstandenen, zur zweiten Projectionsebene normalen Componenten greift die erste in m, die zweite in n an. Die Componenten sind der Grösse und dem Sinne nach bestimmt durch die in Fig. 2_a markirten Strecken $\overline{1^*\,1'}$ und $\overline{1'\,2^*}$.

Die Resultirende aus diesen beiden Componenten, unser Q_2, ist der Grösse und dem Sinne nach bestimmt durch die algebraische Summe beider Strecken, durch die Strecke $1^*\,2^*$. — Der auf der Erzeugenden mn liegende Angriffspunkt δ von Q_2 liesse sich unter Zugrundelegung der Proportion $m\delta : \delta n = 1'\,2^* : 1^*\,1'$ in beiden Projectionen sehr leicht bestimmen.

Wir ziehen eine andere, directe Lösung vor. — Beachten wir 1), dass für alle Lagen der Erzeugenden mn des Paraboloides die Punkte m auf dem Leitstrale a, die Punkte n auf dem Leitstral b liegen, dass auf allen Erzeugenden das Verhältnis $m\delta : \delta n$ ein constantes ist, somit sämmtliche Punkte δ auf einem und demselben Leitstral $\triangle$ des Paraboloides liegen, dessen erste Projection $\triangle'$ durch den Punkt I' gehen muss, in dem sich a' und b' schneiden. Beachten wir ferner 2), dass für alle Lagen von E, oder für alle Lagen von $\overline{mn}$ die Kräfte Q_1 und Q_2 dieselben der Fig. 2 a entnehmbaren Werte $0''\,2''$ und $1^*\,2^*$ beibehalten, — dass sämmtliche Q_1 parallel zu einander eine zur zweiten Projectionsebene normale Ebene erfüllen, dass somit in Folge des Satzes von Chasles die Abstände je zweier ein conjugirtes

Paar bildender Kräfte Q_1 und Q_2 einander gleich sein müssen, was nur eintreten kann, wenn der Leitstral $\triangle$ parallel liegt zu der durch $\overline{02}$ normal zur zweiten Projectionsebene gelegten Ebene, $\triangle''$ also parallel ist zu $\overline{0''2''}$. — Beachten wir endlich 3), dass alle Linien kürzester Entfernung $\overline{\delta\lambda}$, welche zwischen je zwei conjugirten Kräften Q_1 und Q_2 gezogen werden können, und von denen ein Endpunkt immer mit δ in $\triangle$ zusammenfällt, einander gleich und parallel sind und dass alle diese Linien von der zu suchenden Centralaxe x rechtwinklig geschnitten werden. — Alle Linien kürzester Entfernung liegen somit mit x in derselben Ebene, in dieser liegt aber auch der Leitstrahl $\triangle$. — Weil nun x und $\triangle$ in derselben Ebene liegen, ihre zweiten Projectionen parallel sind, so muss der Leitstrahl $\triangle$ des Paraboloids parallel sein zur Centralaxe x im Raume und seine erste Projection $\triangle'$ parallel sein zu x' und somit zu $0'2'$. —

Zu demselben Resultate gelangt man auch durch folgende Schlüsse: a, b und $\triangle$ sind als Leitstralen Erzeugende des zweiten Systems des Paraboloids, somit parallel zur zweiten Richtebene, als welche (Fig. 2a) die Ebene des Dreieckes 012 angesehen werden kann. Weil $\triangle$ parallel ist zur Ebene 012, $\triangle''$ zugleich parallel ist zu $0''2''$, so muss $\triangle$ parallel sein zu 02, — mithin auch zu x. —

Die durch I' zu $0'2'$ gezogene Parallele ist mithin $\triangle'$, ihr Schnittpunkt mit einem beliebigen $\overline{m'n'}$ giebt δ', wodurch sich auch δ'' ergiebt. —

Die durch ein beliebiges δ'' zu $0''2''$ gezogene Parallele ist $\triangle''$, der geometrische Ort sämmtlicher δ''. *)

Sämmtliche Kräfte Q_2 erfüllen eine zur zweiten Projectionsebene normale Ebene und diese ist parallel zu jener, welche das System der Kräfte Q_1 bildet. — Nun bietet die weitere Construction keine Schwierigkeiten mehr, die Centralaxe x und der Pfeil p des Winders können leicht gefunden werden. — In Fig. 2a und 2b wurde hiezu folgender Weg eingeschlagen:

Durch 0, den Anfangspunkt des Linienzuges 012 (Fig. 2a), wurde eine Ebene parallel zur zweiten Projectionsebene gelegt, auf dieselbe die Schlussseite $\overline{02}$ projicirt und um diese Projection die

*) Um Linien zu ersparen, empfiehlt es sich, statt einer beliebigen Erzeugenden mn des Paraboloids eine solche anzunehmen, deren zweite Projection mit der zweiten Projection eines Leitstrals, z. B. mit b'' (Fig. 2a) coincidirt. — Nennen wir diese Erzeugende $m_1\ n_1$, so fällt m''_1 mit A'' zusammen; m'_1, δ'_1, δ''_1, $\triangle''$ ergeben sich auf die einfachste Weise. —

Schlussseite $\overline{02}$ in diese Ebene hineingedreht, so dass nach dieser Drehung die Schlussseite $\overline{02}$ in der zweiten Projection als die Hypotenuse $\overline{0''(2)}$ des rechtwinkligen Dreieckes $0''\,2''\,(2)$ erscheint, in dem die Kathete $\overline{0''2''}$ die Kraft Q_1, die Kathete $2''(2) = 1^*\,2^*$ die Kraft Q_2, die Hypotenuse $0''(2)$ die gesuchte Einzelnkraft R des Winders der Grösse nach bestimmt. —

In Fig. 2*b* wurde eine beliebige Erzeugende *mn* verzeichnet darin die Punkte λ und δ fixirt, welche als Endpunkte einer der Linien kürzester Entfernung zweier conjugirten Kräfte Q_1 und Q_2 gelten, und nach λ der Angriffspunkt von Q_1, sowie nach δ der Angriffspunkt von Q_2 verlegt. —

Die Bestimmung des auf $\delta\lambda$ liegenden Angriffspunktes π der resultirenden Einzelnkraft ergab sich folgendermassen:

Im Dreiecke $0''2''\,(2)$ Fig. 2*a* fällte man von $2''$ auf die Hypotenuse $0''\,(2)$ das Höhenperpendikel $2''\,(i)$. — Dadurch wurde eine Zerlegung der Kräfte Q_1 und Q_2 angebahnt. — Sinn und Richtung der Componenten wird unschwer klar, wenn man sich das durch $0''2''\,(2)$ dargestellte Dreieck sammt allen darin liegenden Linien in seine Urlage zurück versetzt denkt. —

Die Kraft $Q_1 = 0''2''$ zerfällt in die Componenten $\mathfrak{S}_1 = 0''\,(i)$ und $\mathfrak{T}_1 = (i)\,2''$. — Beide greifen in λ an. Die Kraft $Q = 2''\,(2)$ zerfällt in die Componenten $\mathfrak{T}_2 = 2''\,(i)$ und $\mathfrak{S}_2 = (i)\,(2)$. — Beide greifen in δ an.

Durch Zusammensetzung der Componenten $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ entsteht die resultirende Einzelnkraft R, — durch Zusammensetzung der Componenten $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, die gleich und bei entgegensetztem Sinne parallel sind, entsteht das resultirende Moment M des Winders. — Alle auf der zweiten Projection $\lambda''\,\delta''$ der Geraden $\lambda\delta$ liegenden Strecken erscheinen in wirklicher Grösse. —

Es ist somit $\delta''\pi'' = \delta\pi$, $\pi''\lambda'' = \pi\lambda$. —

Es folgt hieraus: $\delta''\pi'' : \pi''\lambda'' = \mathfrak{S}_1 : \mathfrak{S}_2 \ldots .$ 1)

Trägt man (Fig. 2*a*) von $0''$ auf der Hypotenuse $0''\,(2)$ oder deren Verlängerung über (2) hinaus die Strecke $0''t = \delta''\lambda''$ auf, fällt von t das Perpendikel tu auf $0''2''$, von dessen Fusspunkt u ein zweites Perpendikel uv auf $0''t$, und von dem Fusspunkte v ein drittes Perpendikel vw auf $0''\,2''$, mit dem Fusspunkt w, — so beantwortet uns der Linienzug *tuvw* alle Fragen, die über die einzelnen Bestimmungsstücke des gesuchten Winders,

— C e n t r a l a x e, M o m e n t u n d P f e i l — gestellt werden können. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt vorerst:

$0'' v : vt = 0''(i) : (i)(2) = \mathfrak{S}_1 : \mathfrak{S}_2 \ldots .\ 2)$

Aus der Vergleichung der Proportionen 1) und 2) und aus der Gleichung:

$\delta''\pi'' + \pi''\lambda'' = 0'' v + vt \ldots$ folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\delta''\pi'' = 0''v \\ \pi'\lambda'' = vt\end{array}\right\} \ldots .\ 3)$$

Hiedurch ist π'' gegeben. Weil $\lambda'\delta'$ mit $m'n'$ zusammenfällt, so ist auch π' bestimmt. — Man merke, dass π immer zwischen λ und δ liegen muss. — D i e d u r c h π z u $\overline{02}$ i m R a u m e g e l e g t e P a r a l l e l e x i s t d i e g e s u c h t e C e n t r a l a x e, also $x'' \,||\, 0''2''$,
$x' \,||\, 0'2'$.

In dieser liegt die der Grösse und dem Sinne nach durch $\overline{02}$ bestimmte Einzelnkraft R des Winders. Dieselbe ist somit vollkommen bestimmt.

Ebenso einfach bestimmt sich nun das resultirende Moment M und der resultirende Pfeil p. —

Das Moment $M = \mathfrak{T}_1 \times \overline{\lambda\delta} = \overline{(t)\,2''} \times 0''$t. (Fig. 2*a*). — Somit ist M gleich dem doppelten Flächeninhalte des Dreieckes $0''t2''$ oder des mit letzterem flächengleichen Dreieckes $0''(2)u$, daher $M = \overline{0''(2)} \times \overline{uv} = R \,.\, \overline{uv}$.

Bezeichnet $\overline{p}$ die Länge der Pfeilstrecke $\overline{\pi p}$, so ist $M = R \,.\, \overline{p}$, somit $\overline{p} = \overline{uv} \ldots .\ 3)$

Weil der Winkel $uvw = \sphericalangle\, (2)\, 0''2''$, und der letztere den Neigungswinkel der Centralaxe und des damit zusammenfallenden Pfeiles $\overline{p}$ gegen die zweite Projectionsebene bedeutet, so ist endlich d i e S t r e c k e $\overline{vw} = \pi'' p''$, g l e i c h d e r z w e i t e n P r o j e c t i o n d e r P f e i l s t r e c k e πp, die in Folge dessen von π'' auf x'' in einem solchen Sinne nach p'' aufzutragen ist, dass das auf der Centralaxe x in p liegende gegen π gerichtete Auge das Moment M als ein rechtsdrehendes erblickt.

Um Fehler beim Auftragen von $\pi''p''$ zu vermeiden, soll die letztere Bedingung einfacher umgestaltet werden. —

Es wurde hervorgehoben, dass π zwischen λ und δ liegen müsse. — Aus Fig. 2*a* folgt, dass, wenn $\mathfrak{T}_1 = \overline{(i)\,2''}$ in eine zur zweiten Projectionsebene normale Componente und eine hiezu parallele Componente zerlegt wird, letztere in Richtung und im Sinne mit $0''2'' = Q_1$ übereinstimmen muss. [Die letztere ergiebt sich als Projection derStrecke

(i) $2''$ auf $\overline{0''2''}$]. — Soll das Auge in p das Moment M als ein rechts drehendes erblicken, so muss es auch jenes Moment als ein solches erblicken, dessen Axe der durch p gehende, zur zweiten Projectionsebene normale Stral ist, und dessen Kraft durch die durch λ parallel mit $0''2''$ gezogene Q_1'' dargestellt ist. —

Es befindet sich dann p vor π oder vor der durch mn parallel zur zweiten Projectionsebene gelegten Ebene E, wenn die in λ'' angreifende, dem Sinne nach durch $\overline{0''2''}$ bestimmte Projection Q_1'' von Q_1 um p'', somit auch um π'' nach rechts dreht. —

Somit folgt die einfache Regel:

„Je nachdem Q_1'' um π'' nach rechts oder links dreht, muss p vor oder hinter π, somit p' vor oder hinter π' oder $m'n'$ liegen." — Hiemit ist jede Zweideutigkeit ausgeschlossen und die zweite Aufgabe gelöst.

3. Aufgabe: „Ein System von Kräften im Raume soll zu einem Winder zusammengesetzt werden." (Fig. 3a und 3b). — Die Behandlung dieses Problems wird nach dem Vorhergegangenen selbstverständlich.

Gegeben sind beispielsweise vier Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4; dieselben erscheinen in Fig. 3a ihrer Grösse, Richtung und dem Sinne nach gegeben durch die Projectionen ihrer zu einem Linienzug oder Kräftepolygon aneinandergereihten Kraftstrecken $\overline{01}$, $\overline{12}$, $\overline{23}$, $\overline{34}$. —

Die wirkliche Lage dieser Kräfte bestimmen in Fig. 3^b die Projectionen ihrer Richtungslinien a, b, c und d im Raume.

Auf die bei Lösung der ersten Aufgabe besprochene Weise ersetzt man:

1) Die in a und b wirkenden, durch die Kraftstrecken $\overline{01}$ und $\overline{12}$ bestimmten Kräfte P_1 und P_2 durch ein Paar anderer conjugirter Kräfte S_1 und S_2, von denen S_1 in c wirken soll. — Die Lage der Geraden $\mathfrak{c}$, in welcher S_2 wirken muss, findet man, wie in der 1. Aufgabe gezeigt wurde. (a, b, c, $\mathfrak{c}$ liegen auf demselben Hyperboloid). —

Wird in Fig. 3a $\overline{03^*}$ parallel zu $\mathfrak{c}$ gezogen, so bestimmen die Strecken $\overline{03^*}$ und $\overline{3^*2}$ den Sinn und die Grösse der Kräfte S_2 und S_1. —

2) Man verbinde S_1, S_2 mit P_3.

Weil S_1 und P_3 dieselbe Richtungsgerade besitzen, so vereinigen sie sich zu einer in c wirkenden Kraft $T_1 = S_1 + P_3$, deren Grösse sich in Fig. 3a aus der graphischen Addition der Kraftstrecken $\overline{3^*2}$ und $\overline{23}$ ergiebt. — An die Stelle der Kräfte P_1, P_2, P_3 haben wir

nun die zwei Kräfte T_1 (wirksam in c, näher bestimmt durch die Kraftstrecke $\overline{3^*3}$ in Fig. 3 a) und S_2 (wirksam in $\mathfrak{c}$, mit der Kraftstrecke $\overline{03^*}$) gesetzt. —

3) Man ersetze das Kräftepaar T_1, S_2 durch ein Paar conjugirter Kräfte S_3 und S_4, von denen S_3 in d wirken soll. —

Die Lage der Geraden $\mathfrak{d}$, in welcher S_4 wirken muss, findet man wie in der 1. Aufgabe. — (Es liegen c, $\mathfrak{c}$, d und $\mathfrak{d}$ auf demselben Hyperboloid.)

Wird in Fig. 3a, $\overline{04^*}$ parallel zu $\mathfrak{d}$ gezogen, so bestimmen die Strecken $\overline{04^*}$ und $\overline{4^*3}$ den Sinn und die Grösse der Kräfte S_4 und S_3.

4) Man verbinde S_3 und S_4 mit P_4. —

Weil S_3 und P_4 dieselbe Richtungslinie d besitzen, so vereinigen sie sich zu einer in d wirkenden Kraft $T_2 = S_3 + P_4$, deren Sinn und Grösse sich aus der Addition der Kraftstrecken $\overline{4^*3}$ und $\overline{34}$ ergiebt. —

An die Stelle der Kräfte P_1, P_2, P_3, P_4 treten nun zwei Kräfte, die Kraft T_2 (wirksam in d, bestimmt durch die Kraftstrecke $\overline{4^*4}$) und die Kraft S_4 (wirksam in $\mathfrak{d}$, mit der Kraftstrecke $\overline{04^*}$). —

Damit ist der erste Theil der Lösung unserer Aufgabe beendigt. — Es ist selbstverständlich, wie man durch Ersetzung einander äquivalenter Kräftepaare und Zusammensetzung zusammenfallender Einzelnkräfte nach und nach eine beliebige Anzahl von Kräften zu einem Kräftepaare vereinigen könnte. — Nebenbei sei auf die in der Construction auftretenden Seilpolygone $I' II' III' \ldots$ und $A'' B'' C'' \ldots.$ hingewiesen, die aus der succesiven Vereinigung der gleichnamigen Projectionen der Kräfte P_1, P_2, P_3, $P_4 \ldots.$ entstehen.

5) Man ersetze T_2 und S_4 durch ein Paar von Kräften Q_1 und Q_2, wovon die erste zur zweiten Projectionsebene parallel, die zweite hiezu normal sein soll. Der Vorgang ist bei der zweiten Aufgabe abgehandelt worden. —

Als $\overline{mn}$ ist in Fig. 3b jene Erzeugende des besprochenen Paraboloids angenommen worden, deren zweite Projection sich mit $\mathfrak{d}''$ deckt. —

Die in Fig. 3b vorkommenden Punkte δ, λ, π, so wie die in Fig. 3a markirten Punkte (i), t, u, v, w haben dieselbe Bedeutung, wie die gleichnamigen in Fig. 2a und 2b. — Nur tritt an die Stelle von den Punkten $2''$ und (2) in Fig. 3a $4''$ und (4). —

Die Bestimmung der Centralaxe x, der Einzelnkraft $R = \overline{04}$, des Momentes $M = 2$ Fläche $\triangle\,[0''\,u\,(4)]$, des Pfeiles $p = uv$, seiner

Jos. Tesař:

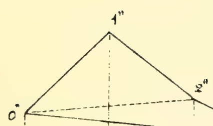
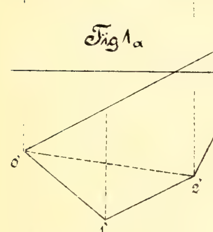
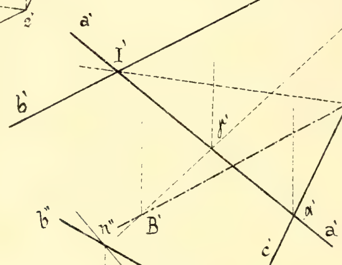


Fig 1a

Fig 1b





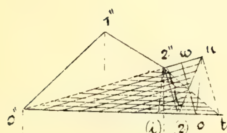
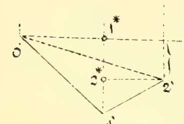
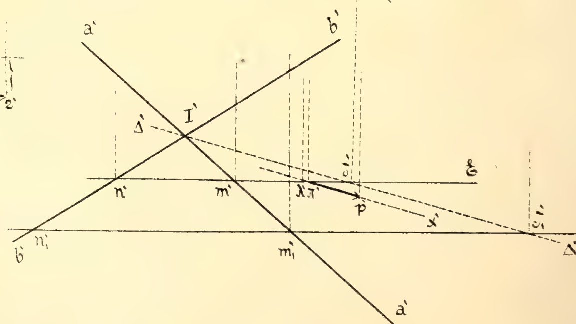


Fig 2a

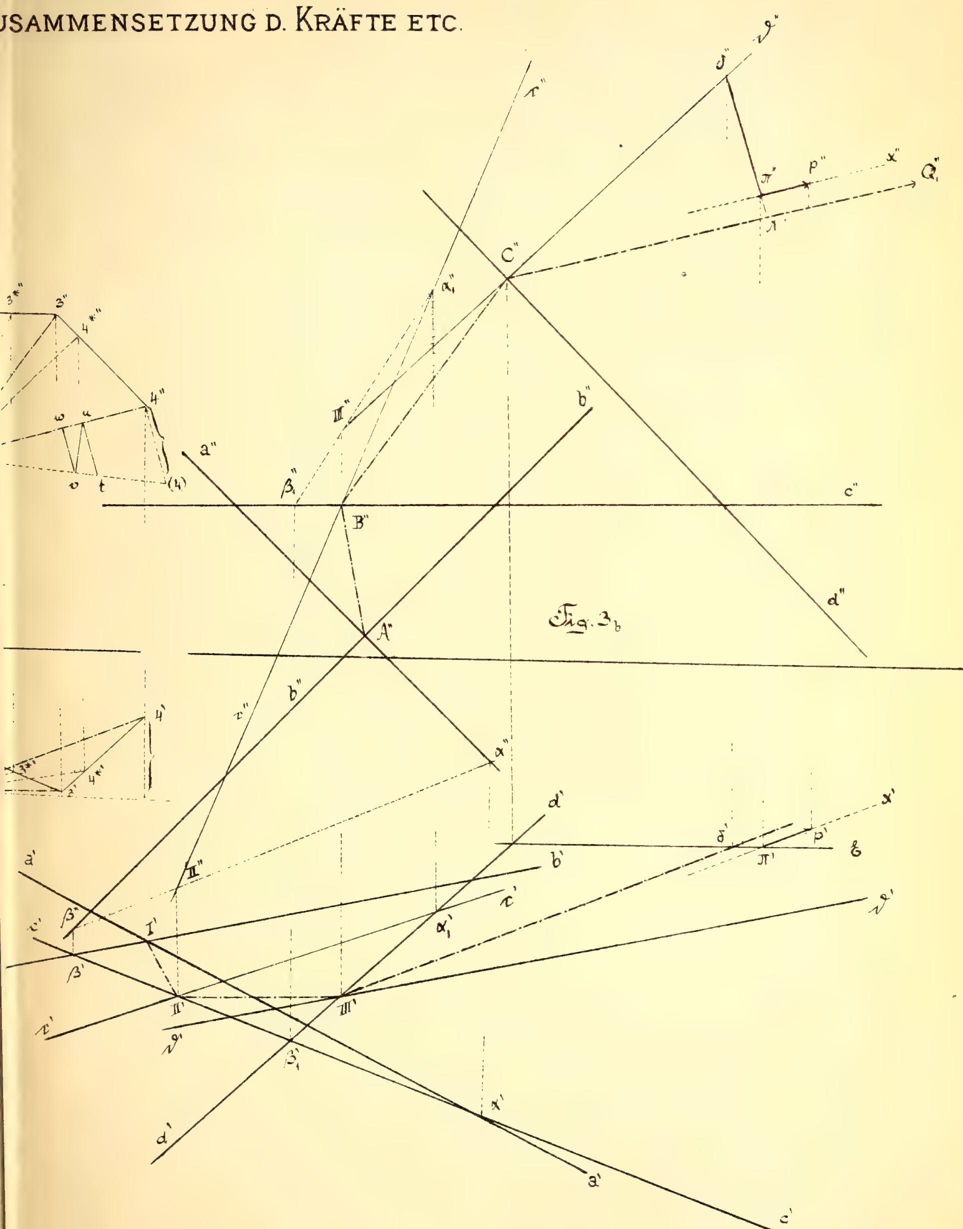
Fig 2b



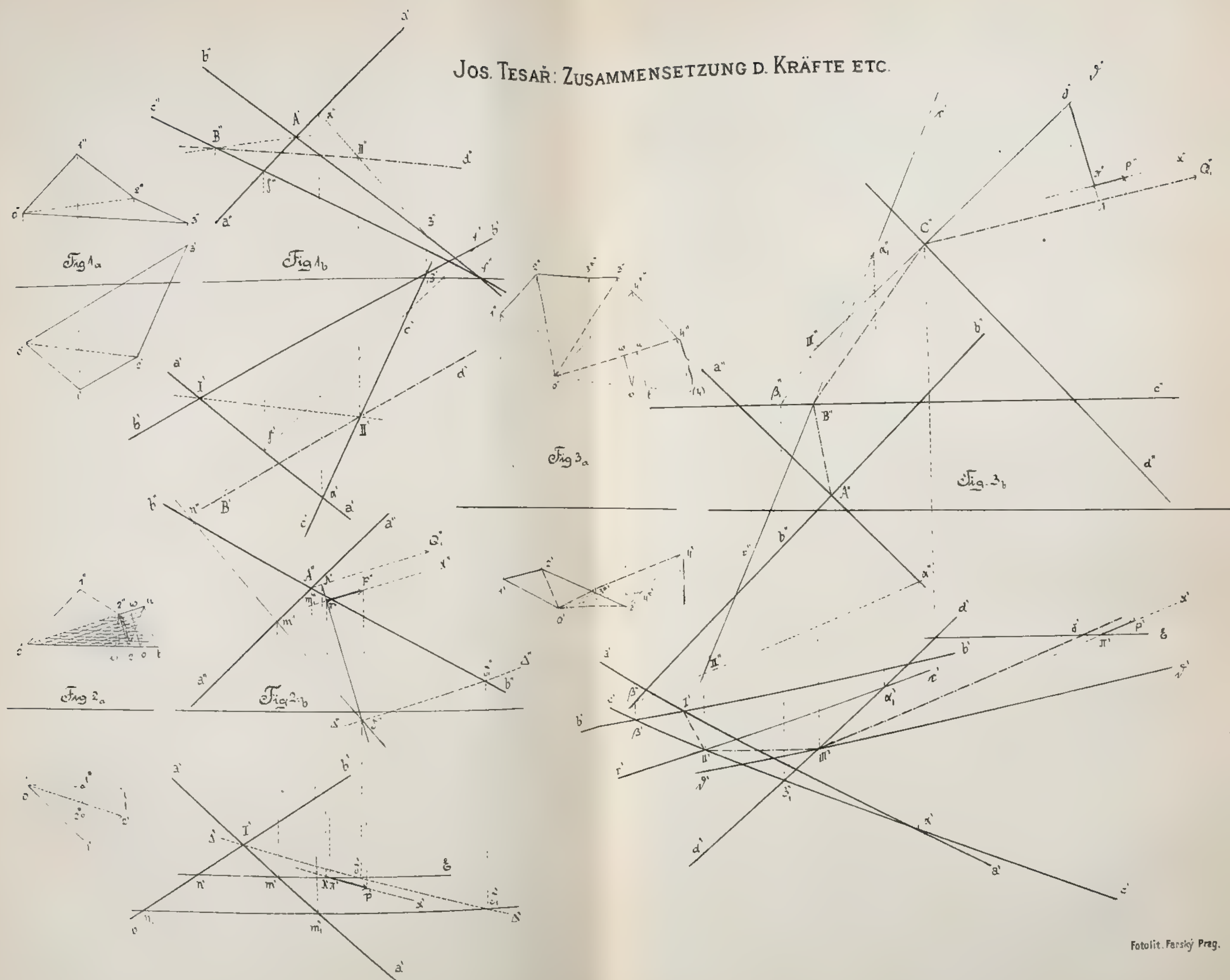


Fi

USAMMENSETZUNG D. KRÄFTE ETC.



Fotolit. Farský Prag.


Jos. Tesař: Zusammensetzung d. Kräfte etc.
Fig 1a
Fig 1b
Fig 2a
Fig 2b
Fig 3a
Fig. 3b
Fotolit. Farský Prag.

zweiten Projection $p'' \pi'' = vw$, sowie die Bestimmung des Sinnes, in dem p aufzutragen ist, ist in der 2. Aufgabe besprochen worden. —

Ein Blick auf die graphische Lösung unseres Schlussproblems in Fig. 3 und ein Vergleich mit anderen bisher üblichen Lösungen, (man vergleiche, z. B. Bauschinger's Atlas d. graphischen Statik, Fig. 50, wo nur 3 Kräfte zusammenzusetzen sind), dürfte die hier vorgetragene Methode in einem günstigen Lichte erscheinen lassen. —

14.

Kurze chemische Mittheilungen.

Vorgetragen von Prof. **Fr. Štolba** am 7. Mai 1886.

Uber die Einwirkung von Salzsäure auf Sphalerit.

Nachdem ich schon seit einigen Jahren zur Darstellung von Schwefelwasserstoffgas anstatt des Schwefeleisens Sphalerit und zwar die faserige Varietät von Příbram (Wurtzit) verwende,*) bot sich hiebei Gelegenheit zu Beobachtungen, deren Resultate ich in folgendem vorlege.

Es ist bekannt, dass der Sphalerit in fein gepulvertem Zustande von konzentrirter Salzsäure (von etwa 1·12 Dichte an) zersetzt wird und schon in der Kälte durch längere Zeit Schwefelwasserstoffgas entwickelt, welche Entwickelung durch Umschütteln befördert werden kann, beim Erhitzen aber so stürmisch wird, dass die Masse übersteigen kann und man demnach gut thut entweder Gefässe mit entsprechendem Steigraum anzuwenden oder eine kleine Menge von Vaselinöl zuzusetzen.

Es handelte sich mir zunächst darum zu bestimmen, bis zu welchem Gehalte an Chlorwasserstoff eine Salzsäure von 1·12 Dichte beim Erhitzen auf feinzerriebenen Wurzit einwirkt. Bei diesen Versuchen fand die Einwirkung zunächst bei gewöhnlicher Temperatur statt, denn wurde die Temperatur sehr langsam und endlich zum Kochen gesteigert und der Versuch unterbrochen, so bald sich das Schwefelwasserstoffgas nur sehr langsam entwickelte, z. B. während einer Minute nur wenige Gasblasen gab. Durch passende Einrichtung

*) Listy chemické 1885.

des Apparates wurden die entweichenden Dämpfe kondensirt und flossen in den Entwickelungskolben zurück.

Der feinzertheilte Wurtzit wurde selbstverständlich in solchen Quantitäten genommen, dass die Hauptmasse unzersetzt blieb.

Die chemische Analyse der erhaltenen Lösung ergab, dass dieselbe noch 11—11$^1/_3$% Chlorwasserstoff enthielt, und nachdem eine Salzsäure von 1·12 Dichte etwa 24·0% Chlorwasserstoff enthält, so wurde hiebei nahe die Hälfte derselben ausgenützt, die andere Hälfte blieb frei, weil eine schwache Salzsäure auf Sphalerit nur unbedeutend einwirkt.

Was nun die Einwirkung von Salzsäure derselben Conzentration auf dasselbe überschüssige Material, wenn es in Form kleiner etwa erbsengrosser Stücke genommen wird, betrifft, so ergiebt sich dieses.

Bei gewöhnlicher Temperatur wird der Wurtzit von Příbram in Form dieser Stücke von einer Salzsäure von 1·12 Dichte nur wenig angegriffen und es entwickelt sich das Schwefelwasserstoffgas so spärlich, dass man es unter diesen Bedingungen nicht darstellen kann.

Wenn man aber erwärmt, so wird die Einwirkung eine sehr kräftige und hat man es ganz in der Gewalt den Gasstrom nach dem Grade der Erwärmung zu regulieren. In ähnlicher Art wie bei dem gepulvertem Minerale wurden auch hiebei Versuche angestellt, in welchem Grade die Salzsäure bei der Darstellung des Schwefelwasserstoffgases ausgenützt werden könne, und wurde auch hier der Versuch abgebrochen, nachdem sich beim Kochen im Laufe einer Minute nur wenige Gasblasen entwickelten. Auch hier wurden die entweichenden Dämpfe abgekühlt und in den Kolben zurückgeleitet. Die Analyse der rückständigen Flüssigkeit ergab einen Gehalt von 12—12$^1/_3$% Chlorwasserstoff und gelangt demnach auch hier von der Salzsäure von 24% nahe die Hälfte zur Wirkung.

Obgleich demnach bei der Verwendung des Wurtzits die Salzsäure nur ungenügend ausgenützt wird, so ist zu berücksichtigen, dass der Preis der Salzsäure ein niedriger ist und dass die Lösung nach der Beseitigung des freien Schwefelwasserstoffes noch zu manchen Zwecken wie z. B. zur Entwickelung von Wasserstoffgas und von Kohlendioxid geeignet ist.

Durch passende Auswahl der Materialien kann man es dahin bringen, dass das entweichende Schwefelwasserstoffgas frei ist von Arsen, und wird bei Anwendung eines Sphalerits, der keine Carbonate enthält, ein ganz reines Gas erhalten, es ist alsdann nämlich frei von Kohlendioxid und enthält kein freies Wasserstoffgas, wie das

aus manchem Schwefeleisen erhaltene, es wird auch von den Lösungen der Alkalien vollständig aufgenommen.

Chemische Analyse des hydraulischen Kalkes aus den Kalköfen des Herrn A. Prochazka jun. in Podol.

Dieser vielfältig verwendete Kalk, welcher unter anderen auch zum Baue des bekannten Tunnels in Nusle verwendet wurde, ähnelt seiner Zusammensetzung nach einigen Sorten des bekannten Prager (Altstädter) Kalkes.

Ein gutes Durchschnittsmuster enthielt im Zustande der Einsendung:

Kalk	82·35%
Magnesia	1·58%
Kali	0·56%
Natron	0·12%
Thonerde	2·09%
Eisenoxid	0·98%
Manganoxid	0·15%
Phosphorpentoxid	Spuren
Schwefeltrioxid	0·07%
Kieselerde	11·20%
Kohlendioxid	0·90%

Die dem ursprünglichen Kalkstein beigemengten Silikate waren, wie das Verhalten gegen Salzsäure ergab, vollkommen aufgeschlossen.

Chemische Analyse des Kalksteines von Holubic bei Kralup a. M.

In Holubic bei Kralup findet sich ein Lager eines krystallinischen röthlichgrauen Kalksteines, welcher in den Kalköfen zu Holubic gebrannt wird und vielfache Verwendung zum Mauern findet, dagegen nicht zum Tünchen verwendet werden kann, da der gebrannte Kalk eine braune Farbe besitzt. Man rühmt an dem mittelst dieses Kalkes bereiteten Mörtel eine ungewöhnliche Festigkeit.

Ein Durchschnittsmuster ergab bei der Analyse:

Kalk	50·16%
Magnesia	0·63%

Eisenoxidul	0·77%
Manganoxidul	0·17%
Thonerde	1·83%
Kieselerde	5·60%
Kohlendioxid	40·62%
Wasser und organische Stoffe	0·53%
Summa	100·31

Hienach enthielte dieser Kalkstein:

Kohlensaures Calcium	89·46%
Kohlensaures Magnesium	1·32%
Kohlensaures Eisenoxidul	1·24%
Kohlensaures Manganoxidul	0·27%
Kieselerde	5·60%
Thonerde	1·83%
Wasser und organische Stoffe	0·53
Summa	100·31

Von Alkalien und Phosphorsäure, Schwefelsäure, waren nur Spuren vorhanden.

Chemische Analyse des sandigen Kalksteines von Jungbunzlau.

In der Nähe von Jungbunzlau tritt ein Kalkstein auf, welcher eine sehr reichliche Menge eines feinkörnigen weissen quarzigen Sandes beigemengt enthält, und an manchen Stellen in einen wirklichen Sandstein übergeht. Dieser Kalkstein wird an einigen Orten trotz seines hohen Sandgehaltes gebrannt.

Zwei Proben ergaben mir bei der Analyse

	a)	*b)*	
Kalk	29·64%	28·60%	In Salzsäure löslich
Magnesia	0·33%	0·33%	In Salzsäure löslich
Eisenoxid	0·96%	1·03%	In Salzsäure löslich
Thonerde	0·11%	0·05%	In Salzsäure löslich
Kieselerde	43·40%	42·06%	In Salzsäure unlöslich
Eisenoxid	0·12%	0·09%	In Salzsäure unlöslich
Thonerde		4·44%	In Salzsäure unlöslich
Kalk	0·05%	0·02%	In Salzsäure unlöslich
Magnesia	0·06%	0·02%	In Salzsäure unlöslich
Kohlendioxid	23·65%	22·98%	In Salzsäure unlöslich
Wasser u. organische Stoffe	0·64%	0·41%	In Salzsäure unlöslich

Alkalien und Phosphorsäure waren nur in Spuren anwesend.

Chemische Analyse eines Quellwassers aus der Nähe von Jungbunzlau.

In einer Entfernung von etwa einem Kilometer vom Centrum der Stadt Jungbunzlau östlich und an der rechten Seite der Jičiner Strasse befindet sich auf der Parzelle N. 1051 (am Rande des ehemaligen Teiches Houpavý) eine mächtige Quelle, welche in der letzten Zeit entsprechend gefasst und überwölbt wurde. Die Quelle entspringt im Sandsteine und wird von einer mächtigen und 6 kleineren Wasseradern gespeist. Das Wasser galt auch zu Zeiten des früheren verwahrlosten Zustandes für ein gutes Trinkwasser, es ist vollkommen klar ohne Geruch und Geschmack.

Eine mir zur Analyse eingesandte wohl verwahrte Probe ergab folgende Zusammensetzung:

Ein Liter des Wassers enthielt in Milligrammen:

Kalk	138·00	Mg.
Magnesia	16·88	„
Kali	10·50	„
Natron	7.64	„
Eisenoxid	2·00	„
Schwefeltrioxid	41·77	„
Stickstoffpentoxid	15·39	„
Kieselerde	15·00	„
Kohlendioxid (einfach gebundenes)	102·12	„
Chlor	8·72	„
Organische Stoffe	8·00	„
Ammoniak	0	

Die Härte des Wassers betrug 16·1°.

Hienach enthielte das Wasser nach anderer Zusammenstellung in einem Liter in Milligrammen:

Kohlensaures Magnesium	35·46	Mg.
Kohlensaures Calcium	189·89	„
Schwefelsaures Calcium	71·01	„
Salpetersaures Calcium	5·09	„
Chlornatrium	14·39	„
Salpetersaures Kalium	22·54	„
Kieselerde	15·00	„
Eisenoxid	2·00	„
Organische Stoffe	8·00	„
Summa	363·38	Mg.

welche Summa mit dem Verdampfrückstande nahe übereinstimmt.

Chemische Analyse des Wassers aus dem Versuchsbrunnen der Judeninsel in Prag.

Die folgende Analyse möge einen Beitrag zur Kenntniss der Zusammensetzung des Wassers neuer Brunnen, welche im Silurschiefer Prags angelegt sind, liefern.

Eine Probe dieses Wassers, welche am 27. März 1886 dem Versuchsbrunnen auf der Judeninsel in Prag entnommen wurde, enthielt im Liter in Milligrammen:

Kalk	688·5	Mg.
Magnesia	135·0	„
Kali	46·7	„
Natron	116·30	„
Schwefeltrioxid	563·0	„
Stickstoffpentoxid	257·0	„
Kohlendioxid (einfach gebundenes)	255·3	„
Kieselerde	23·5	„
Eisenoxid	Spuren	
Manganoxid	Spuren	
Chlor	197·0	„
Organische Stoffe	45·0	„

Die Härte dieses Wassers betrug demnach nicht weniger als 87·8°.

Nach anderer Zusammenstellung enthielte demnach dieses Wasser in einem Liter in Milligrammen:

Kohlensaures Magnesium	283·50	Mg.
Kohlensaures Calcium	242·70	„
Schwefelsaures Calcium	957·10	„
Salpetersaures Calcium	390·2	„
Chlornatrium	214·1	„
Chlorkalium	73·9	„
Chlorcalcium	50·05	„
Kieselerde	23·50	„
Organische Stoffe	45·00	„
Eisenoxid, Manganoxid, Phosphorpentoxid	Spuren	
Summa	2275·00	Mg.

was mit dem gefundenen Verdampfrückstand befriedigend übereinstimmt.

Bezüglich seiner physikalischen Eigenschaften wäre zu bemerken, dass das Wasser klar war und ohne Geruch und Geschmack. Es enthielt jedoch Organismen, namentlich Würmer und Algen.

O chemických rozborech několika technicky důležitých hornin.

Přednášel assistent **Ladislav Zykán**, dne 6. května 1886.

a) Chemické rozbory silurských vápenců.

K zjištění přehledného složení silurských vápenců, jichž užívá se k výrobě proslulého pražského vápna hydraulického, podrobil jsem 5 druhů vápenců chemickému rozboru, jež mi laskavostí ředitelství cementárny podolské zaslány byly; výsledek práce jest pak následující: (Viz tabulku na stránce 280.)

b) Rozbor opuky ze zadních lomů strahovských.

Tato jemnozrnná opuka, kteráž zevnějškem svým blíží se k opukám, jichž užívá se k stavbě ohnivzdorných nístějů, obsahuje:

Kysličníku křemičitého SiO_2	69·16%
„ hlinitého Al_2O_3	1·32 „
„ železitého Fe_2O_3	0·89 „
„ vápenatého CaO	13·13 „
„ hořečnatého MgO	0·51 „
„ draselnatého K_2O	1·43 „
„ sodnatého Na_2O	0·78 „
Kyseliny sírové SO_3	0·12 „
„ uhličité CO_2	7·61 „
Chemicky vázané vody	4·61 „
Vláhy hygroskopické	0·27 „
	99·83

c) Chemický rozbor jílu z krajiny táborské.

Materiál, z něhož ohnivzdorné kelímky, hlavně ale jímadla k destilaci zinku pro technickou laboratoř c. k. české vys. školy technické v Praze se zhotovují, jest bílá hrnčířská hlína třetihorní z okolí městýse Sepekova, následujícího složení:

Kysličníku křemičitého SiO_2	61·52%
„ hlinitého Al_2O_3	21·63 „
„ železitého Fe_2O_3	3·57 „
„ vápenatého CaO	sledy

Vápence	Nerozp. zbytek			Fe_2O_3	Al_2O_3	CaO	MgO	K_2O	Na_2O	P_2O_5	SO_3	CO_2	Hygr. vláha
	x*)	Fe	S										
čís. 1. Podolský hydraulický vápenec *modrák* na pražské hydraulické vápno	12·33	.	.	0·16	1·19	47·35	0·98	0·65	0·16	sledy	sledy	36·84	0·21
čís. 2. Podolský hydraulický vápenec *černý* na pražsko-podolský portlandský cement	34·12	1·94	2·22	0·34	1·62	30·62	1·71	0·44	0·25	sledy	sledy	25·87	0·59
čís. 3. *Saturační vápenec* na pražsko-podolské vápno	4·92	1·52	1·74	0·17	0·23	45·69	5·25	0·48	0·10	sledy	sledy	39·64	0·15
čís. 4. Branický vápenec *modrák* na pražské staroměstské vápno hydraulické	30·96	.	.	0·25	2·89	33·20	0·72	1·02	0·20	sledy	.	25·92	4·53
čís. 5. Branický vápenec *žluťák* na pražské staroměstské hydr. vápno	18·49	.	.	0·51	0·05	45·10	0·52	0·51	0·14	sledy	sledy	34·28	0·24

Ve všech vápencích zjištěna přítomnost manganu, množství jeho však stanoveno nebylo.

*) Směs křemene a jílu.

Kysličníku hořečnatého	MgO	0·13%
„ draselnatého	K_2O	0·92 „
„ sodnatého	Na_2O	0·27 „
Chemicky vázané vody	. . . .	10·43 „
Hygroskopické vláhy	. . . .	1·40 „
		99·87

16.

Sur le réseau de coniques du deuxième indice.

Par **J. S. Vaněček**.

(Předložil tajemník math.-přír. třídy dne 7. května 1886.)

I.

1. Supposons que tous les points d'un plan correspondent aux droites d'un faisceau (v) de la première dimension dans l'espace, c'est-à-dire aux droites qui passent par un point v. Les points du dit plan peuvent être groupés sur les rayons d'un faisceau (s_1) de la première dimension dans ce plan ainsi que les droites du faisceau (v) remplissent un faisceau de plans passant par une droite S qui contient le point v. Cela posé, nous pouvons dire que aux points d'un rayon du faisceau (s_1) correspondent les rayons du faisceau (v) qui se trouve dans un plan du faisceau (S).

Ce faisceau de plans (S) rencontre le plan P du faisceau (s_1) en un faisceau de droites (s_2) dont le centre s_2 est le point de rencontre de la droite S avec P. Nous voyons que toute la construction peut s'effectuer sur un plan qui peut être regardé comme deux plans coïncidents dont chacun contient une simple infinité de points.

De plus, nous pouvons considérer le faisceau de droites (s_1) comme l'intersection du plan P avec un faisceau de droites de la première dimension concentrique avec le faisceau (v).

Les résultats que nous obtiendrons dans le travail actuel peuvent être interprétés dans le sens que nous avons indiqué tout à-l'heure.

2. Il s'agit d'etablir la correspondance des éléments de ces deux faisceaux (s_1), (s_2). A un rayon A_1 du faisceau (s_1) correspond un seul rayon A_2 du faisceau (s_2), et réciproquement. A un point a_1 de la droit A_1 correspond de même un seul point a_2 sur la droite A_2.

Etablissons au premier lieu la correspondance des deux faisceaux (s_1), (s_2). Faisons correspondre aux trois rayons A_1, B_1, C_1 du

faisceau (s_1) trois rayons arbitraires A_2, B_2, C_2 du faisceau (s_2). La correspondance de ces deux faisceaux est donc déterminée. Ces deux faisceaux engendrent une conique Σ, qui passe, comme on sait, par les points s_1, s_2 et par les points d'intersection a, b, c des droites correspondantes A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2. Par un point arbitraire d de la conique Σ passent deux droites correspondantes D_1, D_2.

Faisons maintenant correspondre les points des deux rayons correspondants. On sait que, en faisant correspondre trois points d'une de ces droites aux trois points arbitraires sur la seconde droite, la correspondance des points de ces deux droites est déterminée.

Supposons que les points s_1, s_2, par les quels passent respectivement les droites correspondantes D_2, D_1, soient les points correspondants. Coupons les droites D_1, D_2 par deux droites arbitraires T, U. La droite T rencontre D_2 ou ds_1 en le point d_2^t et la droite D_1 ou ds_2 en d_1^t. De plus, la droite U rencontre les droites D_1, D_2 respectivement en des points d_1^u, d_2^u.

Nous avons ainsi obtenus deux points d_1^t, d_1^u sur la droite D_1, qui correspondent aux points d_2^t, d_2^u de la droite D_2. Les droites $s_1 d_1^t$ et $s_2 d_2^t$ se rencontrent au point d^t. De même les droites $s_1 d_1^u$, $s_2 d_2^u$ se coupent en un point d^u. Sur la droite $d^t d^u$ ou D se rencontrent chaquefois deux rayons correspondants des faisceaux s_1 (d_1^t, d_1^u), s_2 (d_2^t, d_2^u) qui sont perspectifs. A l'aide de la droite D nous pouvons construire sur la droite D_2 un point a_2 correspondant au point a_1 de D_1. La conique (d), determinée par les séries de points D_1, D_2, touche les droites T, U, D_1, D_2 et $s_1 s_2$ ou S. La droite D rencontre D_1, D_2 respectivement en les points d_1, d_2 qui sont les points de contact de ces droites avec la conique (d).

Supposons que les droites T, U soient fixes pour toutes les coniques (d) dérivées des points de la courbe Σ. Ces coniques touchent donc à la fois les droites S, T, U et forment, par conséquent un réseau de coniques, quand le point d parcourt la conique Σ. Dans l'article 7 nous allons déterminer la nature de ce réseau.

3. Considérons deux faisceaux arbitraires de droites (a_1), (a_2). En prenant un rayon quelconque A_1 du faisceau (a_1) pour une tangente fixe du réseau de coniques (d) déterminé par les tangentes communes S, T, U, A_1, les coniques de ces réseau touchent toutes les droites du faisceau (a_2). Nous obtenons ainsi une simple infinité de coniques ayant quatre tangentes fondamentales. Quand la droite A_1 parcourt le faisceau (a_1), nous obtenons une double infinité de coniques qui touchent trois droites fixes.

Supposons que le point a_1 se trouve en s_2 et a_2 en s_1; s_1, s_2 étant situés, comme nous avons dit, sur la conique Σ. Une droite quelconque D_1 passant par s_2 rencontre les droites du faisceau (s_1) en une infinité de points auxquels correspond une infinité de coniques tangentes aux droites S, T, U, D_1. Nous en allons choisir une seule conique de la manière suivante. La droite D_1 rencontre Σ outre le point s_2 encore en un point d par lequel passe une seule droite D_2 du faisceau (s_1), que nous allons regarder comme la cinquième tangente de la conique choisie. Les coniques ainsi déterminées forment le réseau considéré; il y en a une simple infinité.

4. Nous allons maintenant déterminer les coniques dégénérées qui se trouvent dans le réseau considéré. Quand le point d occupe une position générale sur Σ, la conique correspondante (d) ne dégénère pas.

Considérons le point d'intersection m de la droite U avec la conique Σ comme une position du point d. Par ce point passent trois tangentes M_1, M_2, U de la conique (m) qui se décompose, par conséquent, en deux points dont un est m et l'autre est le point de rencontre m' des droites S, T. Le second point d'intersection n de la droite U avec Σ offre de même deux points, savoir: n et m' en lesquels se décompose la conique correspondante.

Les points d'intersection o, p de la droite T avec Σ fournissent aussi deux coniques décomposées en les points o, o'; p, o'; o' étant le point de rencontre des droites S, U.

Nous avons ainsi obtenu quatre coniques décomposées.

Supposons que la droite R_2 passe par le point d'intersection r' des droites T, U ou, en d'autres termes, le point r vient d'occuper une telle position sur Σ que sa jonction avec le point s_1 passe par le point T, U. Dans ce cas trois tangentes de la conique (r) passent par le point r'; cette conique se décompose donc en deux points, savoir: r' et s_2 qui est le point de rencontre des tangentes R_1, S. Quand la droite Q_1 passe par s_2 et r', nous obtenons une seconde conique décomposée en les points r', s_1.

Nous avons ainsi trouvé que dans le réseau de coniques (d) il y a six coniques qui se décomposent en des points. Il y en a neuf, savoir: les points d'intersection des droites S, T, U qui sont doubles et les autres six points sont les points de rencontre de ces droites avec Σ.

5. Considérons encore le cas, quand le point d vient d'être placé en s_1 ou s_2. Supposons qu'il se trouve en s_1; la tangente S_2 de la

conique (s) du réseau considéré touche la conique Σ en s_1 pendant que la tangente S_1, joignant les points s_1, s_2 coïncide avec la droite S et détermine sur cette droite le point de contact s_2 avec la conique (s). Quant au point s_2 nous obtenons de même une conique tangente à la droite S au point s_1.

6. Soit donnée une conique par cinq tangentes D_1, D_2, S, T, U; on demande le centre de cette conique.

Négligeons une de tangentes données. Les autres quatre tangentes déterminent un réseau de coniques dont les centres se trouvent, comme on sait, sur une droite P qui passe par les points milieux des diagonales du quadrilatère complet déterminé par les dites quatre tangentes. Dans ce réseau de coniques il y a seulement une qui touche la cinquième tangente.

En négligeant de nouveau l'une des cinq tangentes données, nous obtenons une nouvelle droite P' qui contient les centres des coniques du réseau correspondant.

De là suit que le centre de la conique K qui touche toutes les cinq droites données se trouve en le point de rencontre des droites P, P'. La construction du centre d'une conique déterminée par cinq tangentes est donc linéaire.

Revenons aux coniques du réseau (d). Les droites S, T, U sont fixes et les droites D_1, D_2 passent respectivement par les points s_2, s_1. A la droite D_2 correspond une droite P_1 qui passe par le point milieu σ_1 du segment $s_1 r'$; r' étant le point de rencontre des droites T, U. A la seconde droite D_1 correspond une autre droite P_2 passant par σ_2 qui est le point milieu de $s_2 r'$.

Quand le point d change de position sur Σ, les droites D_1, D_2 et, par conséquent, les droites correspondantes P_1, P_2 le font aussi; mais le points σ_1, σ_2 restent fixes. Il s'ensuit que les droites P_1, P_2 forment deux faisceaux (σ_1), (σ_2) qui sont projectifs aux faisceaux $s_1(d)$, $s_2(d)$; les faisceaux (σ_1), (σ_2) sont donc projectifs et engendrent, par conséquent, une conique que nous allons désigner par (σ). Cette courbe passe, comme on sait, par les points σ_1, σ_2 ainsi que par les centres des coniques décomposées dans le dit faisceau (d).

Nous pouvons donc énoncer les théorèmes suivants

Les centres des coniques d'un réseau du deuxième trouvent sur une conique;

et de plus

Les côtes d'un triangle rencontrent une conique indice se Σ en six points; quand on joint ces points aux

sommets opposés de ce triangle, les points milieux de ces six segments se trouvent sur une conique.

7. Une droite arbitraire X rencontre la conique (σ) en deux points s'_1, s'_2 qui sont les centres des deux coniques du réseau considéré de coniques.

Considérons la droite X comme le lieu des centres des coniques d'un réseau ordinaire qui a les droites S, T, U pour tangentes fondamentales et dont la quatrième tangente commune nous allons déterminer comme il suit.

La droite X rencontre S, T, U respectivement en les points a', b', c'. Les tangentes données S, T, U forment un triangle pqr. En portant les distances du sommet p, en lequel se rencontrent par exemple les côtes S, U, de points a', b' en directions opposées sur les droites S, U, nous obtenons deux points a_1, b_1 dont la jonction est parallèle à X suivant un théorème bien connu sur les transversales dans un triangle. La droite a_1b_1 rencontre le côté opposé qr en un point m. La droite X divise en deux également le segment mp qui est une diagonale du quadrilatère complet $STUV$.

Quand nous suivons la même marche quant aux autres sommets du triangle pqr, nous obtenons trois points m, n, o qui se trouvent sur une droite V. Cette droite est la quatrième tangente demandée fondamentale du faisceau ordinaire de coniques.

La droite V est donc tangente aux deux coniques du faisceau du deuxième indice, qui sont dérivées de points de la conique Σ et dont les centres se trouvent en les points ξ_1, ξ_2.

Parce qu'il y a au plus deux coniques du réseau (d), qui touchent une droite arbitraire V, il suit de là que

le réseau considéré (d) est du deuxième indice.

II.

8. Nous allons maintenant étudier les figures qui résultent de l'article 2. Il nous serait permis d'expliquer en quelques mots les propriétés des figures qui nous servent de base dans ce qui va suivre.

Supposons que soient données les droites s_1s_2, U dont nous avons parlé dans l'article 2, et puis une droite arbitraire Q. Les jonctions as_1, as_2 d'un point quelconque a de Q avec les points s_1, s_2 rencontrent U respectivement en les points a''_2, a''_1. Les droites $s_1a''_1$, $s_2a''_2$ se coupent en un point a''.

Quand le point a parcourt la droite Q, le point correspondant a^u engendre de même un lieu. Les faisceaux $s_1(abc\ldots)$, $s_2(abc\ldots)$ étant perspectifs, les séries a_2^u, b_2^u, $c_2^u\ldots$; a_1^u, b_1^u, $c_1^u\ldots$ sont projectives. De là suit que les faisceaux $s_1(a_1^u b_1^u c_1^u\ldots)$, $s_2(a_2^u b_2^u c_2^u\ldots)$ sont projectifs; mais ils sont aussi perspectifs, car ils possèdent un rayon commun $s_1 s_2$ qui résulte du point r de rencontre des droites Q, $s_1 s_2$. Ces deux faisceaux se rencontrent donc en une droite P qui passe par le point q d'intersection des droites Q, U.

Les droites as_1, as_2, $a_1^u s_1$, $a_2^u s_2$ forment un quadrilatère complet dont deux sommets sont s_1, s_2, deux autres se trouvent en a_1^u, a_2^u, le cinquième sommet est le point a et le sixième a^u. Quand le point a parcourt la droite Q, les sommets a_1^u, a_2^u glissent sur la droite U, les sommets s_1, s_2 restent fixes et le sommet a^u engendre la droite P. Deux diagonales $s_1 s_2$, U de ce quadrilatère sont fixes et la troisième aa^u rencontre $s_1 s_2$ en un point v qui est de même fixe pour toutes les positions de aa^u, puis qu'il est conjugué harmonique du point s par rapport aux points s_1, s_2; s étant le point d'intersection des deux diagonales $s_1 s_2$, U.

Tant que les droites $s_1 s_2$, U restent fixes et de même les points s_1, s_2, le point v reste le même pour tous les points du plan. Un point donné x et son point correspondant x^u se trouvent ainsi toujours sur une droite passant par v.

Il s'ensuit que à un segment ab dans le plan des droites $s_1 s_2$, U correspond un autre segment $a^u b^u$ dont les extrémités correspondantes se trouvent sur les droites av, bv, et que les droites ab, $a^u b^u$ se rencontrent sur la droite U.

Il est clair que les droites ab, $a^u b^u$ sont homologiques par rapport au centre d'homologie v et par rapport à l'axe d'homologie U.

Quand la droite Q passe par un des points s_1, s_2, sa droite homologique passe par l'autre de ces points et par le point d'intersection des droites Q, U, ce que l'on peut démontrer aisément.

9. Dans l'article 2 nous avons obtenus les points d^t, d^u. Quel est le lieu de ces points, quand le point d parcourt la conique Σ?

Quand le point d glisse sur cette conique, la droite $s_1 d$ engendre un faisceau (s_1) projectif au faisceau (s_2) engendré par la droite $s_2 d$. Le faisceau (s_1) détermine sur la droite T une série (d_2^t) et l'autre faisceau (s_2) engendre sur la même droite une série (d_1^t). Ces deux séries sont projectives. Il résulte de là que les faisceaux $s_1(d_1^t)$, $s_2(d_2^t)$ engendrent une conique que nous allons appeler (c^t).

En appliquant le même procédé quant à la seconde droite U, nous obtenons une autre conique (c^u).

Ces deux coniques (c^t), (c^u) passent par les points s_1, s_2. Puis la conique (c^t), étant homologique à Σ par rapport à l'axe T, elle passe par le points d'intersection de cette droite avec la conique Σ; par la même raison la seconde conique (c^u) passe par les points de rencontre de la droite U avec Σ.

10. Les points d^t, d^u correspondant au point d de Σ déterminent une droite D qui rencontre chacune des coniques (c^t), (c^u) en deux points. Seulement nous n'obtenons ainsi que un seul point de chacune de ces coniques sur D directement. Les autres points d'intersection de D avec (c^t), (c^u) nous allons déterminer comme il suit.

D peut être regardée comme la droite homologique d'une autre droite Δ qui passe par le point d. La droite D rencontre l'axe d'homologie U en un point q. En joignant ce point avec d nous obtenons Δ qui rencontre Σ en un autre point e. Ce point offre le second point d'intersection de la droite D avec la conique (c^u). La jonction des points e, v coupe la droite D an le point demandé e^u.

Quand la droite D passe par le centre d'homologie v, la construction, que nous avons indiquée tout à l'heure, ne peut pas être appliquée, puis que les deux droites homologiques D, Δ coïncident. Dans ce cas on se sert de la construction générale. La droite D rencontre Σ en deux points qui fournissent les points correspondants de (c^u) sur D.

Les coniques Σ, (c^u) étant homologiques, nous pouvons donc construire la tangente en un point donné de la conique (c^u) sans avoir besoin de tracer cette conique.

Supposons que soit donnée une droite arbitraire L, dont les points de rencontre avec la conique (c^u) doivent être déterminés. Dans ce cas nous construisons la droite homologique Λ à L, qui rencontre Σ en deux points x, y. Leurs points homologiques x^u, y^u sont les points demandés.

11. Revenons à la droite D de l'article 2. Cette droite joint deux points d^t, d^u dont chacun se trouve sur une conique. Qu'el est le lieu qu'enveloppe la droite D, quand le point d parcourt la conique Σ?

La droite D rencontre les droites T, U respectivement en les points p, q. La jonction des points d, p coupe la conique Σ en b et la droite dq rencontre Σ en un point c. Le point b^t homologique au point b par rapport à l'axe T, et puis le point c^u homologique

au point c par rapport à U sont les points d'intersection de la droite D avec les coniques (c^t), (c^u); les autres points de rencontre sont d^t, d^u.

Le point c^t homologique au point c par rapport à l'axe T détermine avec le point c^u une tangente de la courbe enveloppe (D). Par le point c^u passent ainsi au plus deux tangentes $d^t d^u$, $c^t c^u$ de la courbe (D). De là suit que le lieu que enveloppe la droite D est nne conique (D).

La construction de la droite D nous apprend qu'elle est la droite polaire du point d par rapport à la conique (d).

12. Par un point arbitraire m^u de la conique (c^u) on peut mener deux tangentes à la conique (D). Ces deux tangentes coupent (c^u) encore en deux points n^u, o^u. Déterminons les points homologiques m, n, o sur la courbe Σ aux points m^u, n^u, o^u par rapport au centre v et par rapport à l'axe U d'homologie. Nous voyons que à un point m correspondent deux points n, o; ces points forment ainsi un système symétrique du second ordre sur la conique Σ.*) On sait que la courbe directrice de ce système est une conique que nous allons désigner par (u).

Les coniques Σ, (u) possèdent quatre tangentes communes. Leurs droites homologique par rapport à v et U sont les tangentes communes aux coniques (c^u), (D), ce que l'on peut démontrer ainsi. La droite homologique à une tangente de la conique Σ touche la conique (c^u). L'une des dites quatre tangentes communes soit A' et son point de contact avec Σ soit a. Ce point offre, comme nous avons déduit, par rapport aux droites T, U une droite A qui est par conséquent une tangente de (D).

La courbe directrice (u) du système symétrique rencontre la conique Σ en quatre points x. A chacun de ces points correspond un point homologique x^u qui est le point de rencontre de la conique (c^u) avec la courbe enveloppe (D). La tangente de la conique (u) au point x est homologique à la tangente de (D) au point x^u.

On voit aisément que, quand on connait la position réciproque des coniques (u), Σ, on en peut conclure à la position réciproque des courbes (c^u), (D).

Tous ces résultats se rapportent aussi aux courbes (t), Σ; (c^t), (D).

13. La droite D rencontre les droites D_1, D_2 respectivement en les points δ_1, δ_2 qui sont les points de contact de ces droites avec

---

*) Voir: Dr. Emil Weyr Beiträge zur Curvenlehre, p. 13.

la conique (d). Déterminons le lieu géométrique de ces points de contact δ_1, δ_2.

Les droites D_1, D_2 passent par un point d de la conique Σ, elles forment, par conséquent, de faisceaux projectifs s (D_2), s_2 (D_1). A chaque position du point d correspond une seul droite D qui engendre un faisceau du second ordre. Les faisceaux s_1 (D_2), (D) engendrent donc une courbe (δ_2) du troisième ordre ainsi que le lieu du point δ_1 est une courbe (δ_1) du même ordre. On voit sur le champ que les courbes (δ_1), (δ_2) possèdent respectivement en s_2, s_1 les points doubles.

Quand le point d est un point d'intersection de la conique Σ avec une des droites T, U, sa droite correspondante D passe par ce point et rencontre y les deux droites D_1, D_2. D'où il suit que les courbes (δ_1), (δ_2) se rencontrent aux points d'intersection de la conique Σ avec les droites T, U. Nous avons ainsi déterminés tous les points de rencontre des courbes (δ_1), (δ_2) avec Σ.

Quand le point d se trouve sur la droite qui joint le point s_1 avec le point d'intersection r' des droites T, U, la droite correspondante D passe par r' et par s_2 et rencontre $s_1 d$ en r' qui appartient donc à la courbe (δ_2) et de même à la courbe (δ_1) pour la droite $s_2 r'$. Les courbes (δ_1), (δ_2) se rencontrent ainsi en le point d'intersection des droites T, U.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Etant donné un réseau de coniques du deuxième indice, qui touchent trois droites fixes et en faisant passer par les points de contact des deux coniques de ce réseau une conique Σ les droites polaires de tous les points de la conique Σ par rapport aux coniques correspondantes du réseau, enveloppent une conique, et les points de contact se trouvent sur deux courbes du troisième ordre.

17.

Ueber perspectivische Restitution, Bewegung und Verzerrung.

Vorgetragen vom Assistenten **M. Pelíšek** am 7. Mai 1886.

Eine perspectivische Zeichnung ist eine gesetzmässige Darstellung des Raumes auf einer Ebene für eine bestimmte Lage des Auges; sie kann daher nur dann die richtige Vorstellung von dem dargestellten Raum in uns erwecken, wenn wir das Auge bei Betrachtung dieser Zeichnung in jene Lage bringen. Betrachten wir sie dagegen aus einer anderen Lage, so verliert sie ihren Sinn nicht vollständig wie eine Anamorphose, sondern weckt in uns Vorstellungen von Gegenständen, welche mit den der Zeichnung zu Grunde liegenden in einer gewissen Beziehung stehen.

Der erste, welcher diese Beziehung geometrisch studirte, ist unseres Wissens De la Gournerie. Die in seinem Traîté de Perspective Linéaire 1859 niedergelegten Resultate hat auch Mannheim in seinen Cours de Géométrie Descriptive 1880 theilweise aufgenommen, während in keinem uns sonst bekannten Werke diese Frage, welche doch für eine verständnissvolle Beurtheilung einer perspectivischen Zeichnung und füglich einer jeden malerischen Darstellung von fundamentaler Wichtigkeit ist, erörtert wird.

Im Folgenden stellen wir nun die Beziehung auf, in welcher die durch eine perspectivische Zeichnung für zwei beliebige Lagen des Auges fixierten Räume zu einander stehen und da dieselbe von der von De la Gournerie und Mannheim aufgestellten wesentlich abweicht, so wollen wir auch den Beweis führen, dass die letztere falsch ist, und werden auch den Grund des Fehlers angeben.

Unseren Betrachtungen liegen folgende Annahmen zu Grunde:

Für einen beliebigen Augepunkt sind

1. Die Restitutionen von Geraden und Ebenen wieder Gerade und Ebenen.

2. Die restituirten Geraden und Ebenen gehen durch die Anfangselemente.

3. Die Restitutionen der Fluchtpunkte und Fluchtlinien liegen im Unendlichen.

4. Jeder Punkt wird in seinem Sehstrahl restituiert.

Es ist evident, dass die perspectivischen Darstellungen keinen Sinn hätten, sobald man irgend eine von diesen Annahmen fallen

liesse; aber diese Annahmen sind hinreichend, um eine räumliche Affinität zu bestimmen, wie aus dem Nachfolgenden genauer ersichtlich ist.

Eine durch den Anfangspunkt t und den Fluchtpunkt f dargestellte Gerade wird durch das Auge O_1 in die durch t gehende zu $O_1 f$ parallele Gerade, durch das Auge O_2 dagegen in die durch t gehende zu $o_2 f$ paralelle Gerade versetzt oder restituiert. Speciell wird eine durch einen Punkt p dargestellte Gerade von dem Auge O_1 bezüglich O_2 in die Lage $O_1 p$ und $O_2 p$ versetzt. Ein zu $O_1 f$ paralleles System von Geraden erscheint daher von O_2 als ein System von Geraden, welche zu $O_2 f$ parallel sind.

Eine durch die Bildtrasse T und die Fluchttrasse F dargestellte Ebene versetzt das Auge O_1 in die durch T gehende zur Fluchtebene $O_1 F$ parallele Ebene, das Auge O_2 dagegen in die durch T gehende zur Fluchtebene $O_2 F$ parallele Ebene. Speciell stellt eine durch eine Gerade P dargestellte Ebene für O_1 bezüglich O_2 die Ebenen $O_1 P$ bezüglich $O_2 P$ dar. Analog wie früher erscheint ein System paralleler Ebenen für jede Lage des Auges als ein solches.

Ein durch p dargestellter Punkt wird, wie bereits angedeutet, durch das Auge O_1 bezüglich O_2 in die Strahlen $o_1 p$ und $o_2 p$ versetzt; seine Lage im Raume ist daher erst dadurch bestimmt, dass er auf einer durch tf dargestellten Geraden oder in einer durch TF dargestellten Ebene liegen soll. Nehmen wir ersteres an, so wird der Punkt p von o_1 in den Schnittpunkt p_1 des Sehstrahles $o_1 p$ mit der durch t gehenden zu $o_1 f$ parallelen Geraden versetzt; ebenso restituiert das Auge O_2 den Punkt p in den Schnittpunkt p_2 des Sehstrahles $o_2 p$ mit der durch t gehenden zu $o_2 f$ parallelen Geraden.

Da aber folgende Aehnlichkeiten bestehen:

$$\triangle pfo_1 \sim ptp_1 \text{ und } \triangle pfo_2 \sim ptp_2, \text{ so gilt:}$$

$$\frac{po_1}{pp_1} = \frac{pf}{pt} \text{ und } \frac{po_2}{pp_2} = \frac{pf}{pt}; \text{ daher auch}$$

$$\frac{po_1}{pp_1} = \frac{po_2}{pp_2}; \text{ daher auch die Ähnlichkeit:}$$

$$\triangle po_1 o_2 \sim pp_1 p_2, \text{ aus welcher folgt:}$$

$$p_1 p_2 \parallel o_1 o_2 \text{ und } \frac{o_1 o_2}{p_1 p_2} = \frac{pf}{pt}.$$

Fällen vier nun von o_1, o_2, p_1, p_2, die Perpendikel

$$o_1(o_1) \quad o_2(o_2) \quad p_1(p_1) \quad p_2(p_2)$$

auf die Bildebene, so folgt aus weiteren Aehnlichkeiten:

$$\frac{o_1(o_1)}{p_1(p_1)} = \frac{o_1 p}{p_1 p} = \frac{fp}{tp} \text{ und } \frac{o_2(o_2)}{p_2(p_2)} = \frac{o_2 p}{p_2 p} = \frac{pf}{pt}; \text{ daher auch:}$$

$$\frac{p_1(p_1)}{p_2(p_2)} = \frac{o_1(o_1)}{o_2(o_2)} = \text{const.}$$

Die Verwandtschaft zwischen dem Raume $p_1 \ldots$ und $p_2 \ldots$ ist also so beschaffen, dass parallelen Ebenen und Geraden wieder solche entsprechen, ferner, dass die Verbindungslinien eutsprechender Punkte parallel sind der Verbindungslinie der Augepunkte $o_1 o_2$ und endlich, dass das Verhältnis der Abstände zweier entsprechender Punkte von der Bildebene gleich ist dem Verhältnis der Abstände der zugehörigen Augepunkte von dieser Ebene. Dieses Verhältnis ist also für alle Punkte constant.

Diese Verwandtschaft, welche durch die Bildebene als selbstentsprechende Ebene und die Punkte $o_1 o_2$ als ein Paar entsprechender Punkte bestimmt ist, ist bekanntlich die räumliche Affinität.

Wir stellen daher den Satz auf:

Betrachtet man eine perspektivische Zeichnung aus zwei verschiedenen Punkten o_1 und o_2, so stehen die Räume, welche die Zeichnung in beiden Fällen fixiert, in der Beziehung der räumlichen Affinität, welche durch die Bildebene als selbstentsprechende Ebene und durch die beiden Augepunkte als ein Paar entsprechender Punkte bestimmt ist.

Die Transformation, welche der Raum auf diese Weise erleidet, scheint uns folgende Ueberlegung sehr wirksam zu beleuchten.

Denken wir uns den Raum hinter der Bildebene, welche wir uns vertical denken, durch ein System von horizontalen, ferner durch ein System von Ebenen, welche zur Bildebene parallel laufen, und endlich durch ein System von Kreuzrissebenen in congruente, hinreichend kleine Würfel zerlegt, durch welche der Raum gleichsam craticuliert wird; denken wir uns ferner den Raum sammt den Würfeln und den in ihm befindlichen Gegenständen für einen Augepunkt o_1 perspectivisch abgebildet, und sei H die Fluchttrasse der horizontalen und K die Fluchttrasse der Kreuzrissebenen. Versetzen wir dann das Auge in die beliebige Lage O_2 so transformiert sich das System der horizontalen Ebenen in ein System von Ebenen, welche unter einander und zur neuen Fluchtebene $O_2 H$ parallel sind; das System der Kreuzrissebenen transformiert sich in ein System von

Ebenen, welche zur neuen Fluchtebene O_2K parallel sind; die zur Bildebene parallelen Ebenen, welche die Anfangslinien und Fluchtlinie im Unendlichen haben, bleiben solche, aber ihre gegenseitigen Abstände verhalten sich nach dem oben Bewiesenen zu den früheren wie die Abstände der Punkte O_2 und O_1 von der Bildebene.

Das System congruenter Würfel transformiert sich also in ein System congruenter, schiefwinkliger Parallelpipede, durch welche der zweite Raum craticuliert wird. Hat man nun die Würfel hinreichend klein gewählt, so werden es auch die Parallelpipede, da die Inhalte affiner Körper in constantem Verhältnis stehen, wir sind daher im Stande, die Deformation, welche die durch die Zeichnung dargestellten Gegenstände durch die Aenderung des Augepunktes in unserer Vorstellung erleiden, auf eine sehr einfache Weise mit ziemlicher Schärfe a priori zu beurtheilen.

Schon hier müssen wir den sehr wichtigen Umstand hervorheben, dass diese Deformation für den ganzen Raum gleich ist.

De la Gournerie leitet die in Rede stehende Beziehung beiläufig in folgender Weise ab (Loc. cit. p. 158—160).

Erstens betrachtet er die Punkte einer horizontalen Ebene — des Geometrales — wenn der Augepunkt seine Lage so ändert, dass er den Horizont nicht verlässt; dass die in diesem Falle von Gournerie abgeleitete Beziehung — die ebene Affinität — richtig ist, hat seinen Grund nur darin, dass sich diese Ebene bei der supponierten Lagenänderung des Auges selbst entspricht.

Zweitens betrachtet Gournerie die Punkte des Geometrales, wenn das Auge aus einer Lage O in eine andere O_1 ausserhalb des Horizontes sich begibt, und schliesst in folgender Weise: Ist M das perspectivische Bild von einem Punkte m des Geometrales für das Auge O, so liegt der für O_1 restituierte Punkt m auf dem Strahle O_1M und zwar — hierin liegt eben der Trugschluss — in dessen Schnittpunkte mit dem Geometrale; da ferner die Gerade mm_1 in der Ebene der beiden Sehstrahlen OM, O_1M liegt, so schneidet sie die Verbindungslinie der beiden Augepunkte OO_1 in dem Schnittpunkte G der letzteren mit dem Geometrale, woraus hervorgeht, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte mm_1 alle durch einen festen Punkt G gehen müssen. Diese Beziehung ist also eine Homologie — wir sagen jetzt ebene Centralcollinea-

tion —, deren Centrum G und deren Axe die Schnittlinie des Geometrals mit der Bildebene ist.

Diese Deduction ist deshalb falsch, weil sie von der unrichtigen Annahme ausgeht, dass sich hier das Geometrale selbst entspricht, während der Punkt m_1 der Schnittpunkt des Sehstrahles O_1M mit derjenigen Ebene ist, welche dem Geometrale in der aufzufindenden Beziehung entspricht. Uebrigens stosst man sofort auf Widerspruch, wenn man bedenkt, dass in dieser Verwandtschaft einem System paralleler Geraden ein System von Geraden entsprechen müsste, welche sich in einem Punkte der endlichen Gegenlinie schneiden, während sie als Gerade mit gemeinschaftlichem Fluchtpunkt abgebildet sind.

Drittens betrachtet Gournerie einen Punkt m' ausserhalb jenes Geometrales, welcher sich auf das letztere nach m orthogonal projiciert; für das Auge O sind die Centralprojectionen von m und m' die Punkte M und M'. Begibt sich nun das Auge nach O_1, so geht m wie früher nach m_1, daher gelangt mm' in die Verticale m_1m_1', wobei m_1' auf dem Sehstrahl O_1M' liegt. Da nun mm', m_1m_1' MM' ein dreiseitiges rechtwinkliges, oben schief abgestutztes Prisma bilden, so müssen sich die homologen Linien der beiden Basisflächen in drei Punkten OO_1G einer Geraden schneiden; daher trifft die Linie $m'm_1'$ die Linie OO_1 in ihrem Schnittpunkte G mit dem Geometrale. Damit ist wieder eine Homologie im Raume — wir sagen eine räumliche Centralcollineation — bestimmt, von welcher die Bildebene die selbstentsprechende Ebene und der Punkt G das Centrum ist.

Diese Deduction ist deshalb falsch, weil in ihr die in zwei unrichtig bestimmten Punkte m_1 verwendet werden. Man stosst auch hier sofort auf Widerspruch, wenn man überlegt, dass hiernach einem System paralleler Ebenen für ein anderes Auge ein System von Ebenen entsprechen würde, welche sich in einer Geraden der endlichen Gegenebene schneiden, während dieselben mit gemeinschaftlicher Fluchttrasse dargestellt sind.

Die Entwicklung unter (3), in welcher füglich die in (2) angeführte enthalten ist, hat auch Mannheim (loc. cit. p. 107—110) mit geringen Veränderungen wiedergegeben, woraus wir schliessen, dass diese Unrichtigkeiten noch von niemand aufgedeckt worden sind.

Bevor wir zu den Anwendungen unserer Theorie übergehen, wollen wir noch untersuchen, welche Veränderung die Winkel und

im Zusammenhange damit die Krümmungen durch die Änderung des Augepunktes in unserer Vorstellung erleiden.

Zwei durch die Fluchtpunkte f_1 und f_2 dargestellten Geraden erscheinen von O_1 betrachtet unter dem Winkel $f_1 O_1 f_2$, von O_2 dagegen unter dem Winkel $f_1 O_2 f_2$. Die beiden Geraden scheinen also immer denselben Winkel einzuschliessen, so lange das Auge auf dem Torus bleibt, welcher durch die Rotation des durch $f_1 O_1 f_2$ bestimmten Kreises um die Axe $f_1 f_2$ entsteht; dagegen erscheint dieser Winkel für alle Lagen des Auges innerhalb dieser Fläche grösser und für alle Lagen ausserhalb derselben kleiner. — Zwei durch ihre Fluchttrassen F_1 und F_2 dargestellten Ebenen scheinen von O_1 den Winkel zu bilden, den die Fluchtebenen $O_1 F_1$ und $O_1 F_2$ mit einander einschliessen. Der Ort der Punkte O, von welchen aus die beiden Ebenen denselben Winkel mit einander zu bilden scheinen, ist, wie man unschwer erkennt, derjenige senkrechte Kreiskegel, welcher durch die zwei gegebenen Fluchtlinien und durch die Verbindungslinie des Punktes O_1 mit deren Schnittpunkte als dritte Erzeugende bestimmt ist; dieser Winkel erscheint aber grösser oder kleiner, jenachdem sich Auge innerhalb oder ausserhalb dieser Fläche begibt. Speciell heben wir hervor, dass der Winkel zweier durch parallele Fluchttrassen dargestellten Ebenen sich nicht zu ändern scheint, solange sich das Auge auf dem durch diese beiden Fluchttrassen und eine seiner Lagen O_1 bestimmten senkrechten Kreiscylinder befindet, und noch specieller, dass zwei Ebenen mit parallelen Fluchttrassen von allen Punkten desjenigen senkrechten Kreiscylinders, welcher durch diese Fluchttrassen als Diametralerzeugende bestimmt ist, unter rechtem Winkel erscheinen.

Ähnliche Beziehungen lassen sich über den Winkel einer Geraden mit einer Ebene aufstellen.

Durch die oben aufgestellte Beziehung erklären sich verschiedene Eigenthümlichkeiten perspectivischer Zeichnungen, also auch aller malerischen Darstellungen, welche uns aus Erfahrung sehr geläufig sind, die aber auf Grund der früheren Restitutionstheorie nur mangelhaft und theilweise unrichtig geometrisch erklärt werden konnten.

Ist die Bildebene vertical, so erscheinen uns verticale Geraden und Ebenen wieder als solche, wo sich auch immer das Auge befindet; wäre dagegen die Bildebene eine schiefe wie z. B. bei den Gemälden auf der Rückseite einer Treppe, oder auf schiefen Theilen

einer Decke, so werden die Bilder verticaler Geraden, welche nach einem bestimmten Fluchtpunkt convergieren, nur für eine bestimmte Lage des Auges in uns die Vorstellung verticaler Geraden erwecken, und für jede andere Lage nicht, was die Gegenstände in eine unnatürliche Lage brächte; daher immer die Wahl einer verticalen Bildebene.

Die Bilder horizontaler Geraden und Ebenen bleiben solche, solange das Auge den Horizont nicht verlässt; diese Geraden und Ebenen scheinen sich dagegen nach aufwärts oder abwärts zu neigen, sobald sich das Auge über oder unter den Horizont begibt; aus diesem Grunde neigen wir bekanntlich unsere Gemälde, welche zu hoch aufgehängt sind, damit der im Bilde supponierte Horizont durch unser Auge geht.

Gerade, welche durch unser Auge zu gehen scheinen, bei denen also Anfangspunkt und Fluchtpunkt zusammenfallen, scheinen dies für alle Lagen des Auges zu thun. Scheint uns daher eine Figur eines Bildes zu fixieren, was dann der Fall sein wird, wenn ihr Auge in solcher Stellung abgebildet ist, dass sich dessen Axe zu einem Punkt verkürzt, so wird sie uns mit ihren Blicken verfolgen, wohin wir uns auch immer begeben (Gournerie p. 158.)

Bewegt sich das Auge in irgend einer Richtung, so bewegt sich jeder Punkt des durch die Zeichnung fixierten Raumes auf einer Parallelen in entgegensetzter Richtung und zwar so, dass das Verhältnis der Abstände von der Bildebene in dem oben angegebenen Verhältnis steht; die durch diese Punkte gehenden Geraden und Ebenen scheinen sich um ihre Anfangselemente zu drehen, die scheinbaren Bewegungen der Punkte sind also desto grösser, je weiter wir die Punkte hinter die Bildebene in unserer Vorstellung versetzen.

Bewegt sich der Beobachter nach links, so scheinen sich die dargestellten Gegenstände nach rechts zu drehen und zwar mit desto grösserer Geschwindigkeit, je weiter entfernt wir sie wähnen.

Entfernt sich der Beobachter von der Bildebene, so entfernen sich auch scheinbar alle Gegenstände des Gemäldes von demselben nach der entgegengesetzten Richtung; dies ist der Grund, warum wir uns möglichst weit von einem Gemälde stellen, wenn wir, wie der Kunstausdruck lautet, möglichst grosse Tiefen erzielen wollen.

Hiemit hängt es auch zusammen, dass uns ein Bild desto flächenhafter erscheint, je mehr wir uns demselben nähern.

Diese Erscheinungen, welche man aus Erfahrung schon lange sehr gut kennt und die einer richtigen geometrischen Erklärung

bedurften, fasst man unter dem Namen perspectivische Bewegung des Bildes zusammen. Dieselbe ist bei einer malerischen Darstellung desto mehr in die Augen springend, je sorgfältiger die Perspective durchgeführt ist und kann gewissermassen als ein Kriterium für die Richtigkeit der letzteren dienen.

Ferner ist klar, dass diese Bewegung bei Gegenständen, deren Gestalt uns sehr geläufig ist, also namentlich bei geometrischen und architektonischen Formen grösser sein wird als bei Gegenständen von geringer Gesetzmässigkeit und namentlich bei solchen, über welche wir uns nicht hinreichend klare Vorstellungen bilden können.

Mit der Bewegung des Auges und der gleichzeitigen scheinbaren Bewegung der dargestellten Gegenstände geht auch eine Gestaltsänderung der letzteren Hand in Hand. Es werden z. B. Gerade und Ebenen, die für eine Lage O zu einander senkrecht zu sein schienen, von einem anderen Punkte O_1 im Allgemeinen schiefe Winkel einzuschliessen scheinen, es werden also im allgemeinen alle Winkel und im Zusammenhange damit auch die Krümmungen geändert. Es werden z. B. Häuser, welche für O quadratische oder rechteckigen Grundrisse zu haben schienen, von O_1 im allgemeinen rhomboidische Grundrisse aufweisen und selbst, wenn das Auge auf dem oben erwähnten Kreiscylinder sich bewegt, so werden nur die Häuser einer bestimmten Front rechtwinklig bleiben; dabei werden aber ihre Längen- und Breitenverhältnisse sich ändern, während anders gerichtete Fronten auch in Bezug auf die Winkel deformiert werden. Es wäre wol überflüssig, mehr solcher Erscheinungen aufzuzählen.

Solche Deformationen nennen wir perspektivische Verzerrungen und zwar solche, die mit unrichtigem Standpunkte des Beobachters zusammenhängen.

Von entscheidender Wichtigkeit ist der Umstand, dass diese Deformation für den ganzen Raum dieselbe ist. —

Wir schliessen daraus zunächst, dass die unter dem Namen perspektivische Ränder bekannten Verzerrungen nicht von der unrichtigen Lage des Beobachters herrühren können, sondern dass diese Verzerrungen eine andere Quelle haben müssen als die eben geschilderten und wir hoffen in einer späteren Arbeit zu zeigen, dass der Träger dieser Verzerrungen das Auge selbst ist, oder noch besser gesagt, dass sie auf der Nichtübereinstimmung des Sehprocesses und der Centralprojection beruhen.

In Bezug auf die Verzerrungen, die mit der unrichtigen Lage des Auges zusammenhängen, haben wir noch Folgendes zu bemerken.

Man sollte meinen, dass sofort ein Zerrbild entsteht, sobald wir das Auge aus der richtigen Lage herausbringen, wie dies thatsächlich bei den sogenannten Anamorphosen der Fall ist.

Dieses geschieht bei perspectivischen Darstellungen nicht.

Die Erfahrung lehrt uns, dass wir ziemlich genau beurtheilen können, ob eine Linie gerade ist oder nicht, ob eine Fläche eben ist oder nicht, ferner ob Gerade und Ebenen parallel sind oder nicht; dagegen können wir erfahrungsgemäss die Aenderung der Grösse eines Winkels und im Zusammenhange damit die Aenderung einer Krümmung mit weit kleinerer Genauigkeit abschätzen.

Wenn wir aber das Auge in eine andere Lage bringen, als für welche die Zeichnung verfertigt ist, so bleiben die ersten Umstände intakt, es ändern sich nur scheinbar die Winkel uud Krümmungen; sind aber diese Aenderungen nicht beträchtlich genug, so gelangen dieselben nicht zu unserem Bewusstsein und daher kommt es, dass eine perspectivische Zeichnung, welche eigentlich nur für eine einzige Stellung des Auges eine Erscheinung richtig fixiert, auch dann noch zufriedenstellende Vorstellungen in uns erweckt, wenn sich das Auge innerhalb eines beträchtlichen Gebietes um jene Lage herum befindet, beziehungsweise, wenn die Zeichnung von vielen Personen gleichzeitig betrachtet wird.

18.

Über die Gränzen der Mittelmeervegetation in Frankreich.

Vorgetragen von Prof. **Johann Palacký** am 21. Mai 1886.

Der Vortragende besprach unter Vorlage der neuesten Florenkarte Europas von Hofrath Drude die Gränzen der Mittelmeervegetation in Frankreich. Speciell das dort neu eingeführte Uebergangsgebiet in West-Frankreich gab Gelegenheit zu weiten Auseinandersetzungen. Nach einer Schilderung der deutschen (klimatischen) und französischen (chemischen) Schule pcto des Ursprungs der Vegetationsverschiedenheiten wurde auf die neuere geologische Theorie Saporta's und Martins, wornach hiebei auch die geologischen Veränderungen eine Rolle spielen, im Detail hingewiesen. Speciell der Pliocen von

Mezimieux, die Tuffe der Auvergne und Montpellier etc. geben mehr Anhaltspunkte zur Geschichte der Vegetation als man sonst finden kann.

Vor Allem muss darauf hingewiesen werden, dass die Tertiärflora bereits neben einzelnen tropischen Formen die Urahnen unserer Vegetation, und speciell viele noch heute erhaltene Typen aufwies, die oft sich nicht sehr weit erhalten haben (Weisspappel, Oleander, Woodwardia radicans, Lorbeer, Feige, Buchsbaum, Ahorn (Cette-Moret).

Typen, die der jetzigen Mittelmeerflora im engern Sinne, d. h. der immergrünen Vegetation, angehören, haben sich in fast ganz Frankreich erhalten, jedoch in ungleicher Weise. Während der Nordosten am wenigsten davon besitzt, hat der Westen stets mehr daran und im Süden die tiefliegenden Gegenden natürlich mehr als die höheren. Die mittlere hohe Auvergne hat die nördliche mitteleuropäische Flora (ja selbst 100 alpine spec.) z. B. bis St. Pons, ja in den Seealpen reicht diese bis zum Meere, ebenso fast in den Corbieren (was schon Drude richtig angiebt, doch ist in der Karte die Strandregion nicht deutlich geblieben).

Darum haben Savoyens Thäler so viele mediterrane Typen im Schutze der Berge erhalten, die z. B. der offenen Bresse fehlen (Rhus cotinus, Cyclamen, Muscari, Myrica, Kastanien, Narcissus, Adiantum capillus veneris — bei Chavert 30 spec. darunter Afyllanthes monspeliensis, Terebinthen, Leuzea conifera, etc.) Der Bourgogne fehlen auch nicht einzelne südliche Formen — aber sie hat mehr die sog. kalkliebenden cretaceen Typen — Buxus sempervirens, Dictamnus (bis Drachenloch im Elsass und Kaiserstuhl im Breisgau, schon in den Cineriten von Pas de Mogudo), Meconopsis cambrica (eine atlantische Form, bis 1700 M. in der Auvergne), aber auch Melica nebrodensis, Athamanta cretica, Prunus mahaleb, Helianthemum pulverulentum (Vertreter der westlichen Cistineen).

Die Limagne (nördlich der hohen Auvergne) hat weniges derart erhalten — hauptsächlich nur Althea cannabina (wurde als segetales Unkraut wohl auch möglicherweise später d. h. nach der Eiszeit eingeschleppt — (bis Clermont-Ferrand), Helianthemum salicifolium (auch Niort), Erythronium dens canis (auch Puy de Sancy). Wie vorsichtig man mit der Annahme typischer Pflanzen sein muss, zeigt, dass z. B. der nach Grenier überall verbreitete Narcissus pseudonarcissus sich in der Auvergne noch in 1500 m. Höhe findet. Die doch unzweifelhaft alte und einer südlichen Familie angehörige Dioscorea

pyrenaica findet sich in 2800 m. Höhe neben Saxifraga aizoides und Empetrum nigrum, was aber das Räthsel ihrer Erhaltung sehr erleichtert. So ist Leuzea conifera am Cantal, in Savoyen, aber bei Grenoble in 1053 m. Höhe. Selaginella denticulata erreicht Venasque in den Pyrenäen und Savoyen (Grenoble bei Godron).

Als eine wohl der ältesten noch lebenden Pflanzen wurde der in der Bretagne (Ille et Vilaine, Morbihan, Maine et Loire, Loire inferieure in Teichen wie in Böhmen) und in der Auvergne (angeblich im Silur) vorkommende seltene Coleanthus subtilis erwähnt, dessen übrige Fundorte Oregon, Christiania, Ritten (Alpe, bei Bozen), und Südböhmen nur im geologischen Alter übereinstimmen.

Dann kommen wohl die zwei Farren, die schon Parlatore als Relicte der Steinkohlenperiode bezeichnete — Hymenophyllum tunbridgense (Bretagne bei Godron, Corsica — auch dep. Ourthe) und das irische Trichomanes speciosum (radicans auct. — Killarney fern) Rhuneberg in 230 m. bei Luz (Nordwestecke der Pyrenäen) in Frankreich auf den Westen beschränkt, der auch Hymenophyllum wilsoni, Notholaena marantae (Ardéche) etc. besitzt.

Bezüglich der übrigen präglazialen Pflanzen wurde der Theorie von Martins und Saporta — der lokalen Erhaltung — der Vorgang gegeben vor Newberry's Einwanderungstheorie der miocenen Pflanzen aus Amerika nach Europa oder gar ihrer Rückkehr aus Amerika nach der Eiszeit, wofür man nur Eriocaulon septangulare von Sky als Beweis hatte.

Unter Wiederholung speciell der Beweise, die Saporta dafürgebracht, wurde der Begriff der atlantischen Flora, wie ihn Roth specialisirt hat, als ein zu weit gehender kritisirt, da dort Strandpflanzen (Honckeneya peploides) und gemeine ubiquitäre Arten Mitteleuropas mit den karakteristischen Pflanzen der atlantischen Flora vermengt werden.

Auch der Ausdruck Übergangsgebiet — den Drude gewählt, erscheint nicht ganz glücklich — und besser mit gemischtes Gebiet zu ersetzen. Denn eine bestimmte Anzahl von Typen des Mittelmeeres (wie z. B. Quercus ilex) erscheinen nicht im ganzen Gebiet, aber an allen passenden Stellen gleichförmig. Diese Zahl nimmt von Nantes bis Toulouse aber nicht wesentlich zu. Ein gutes Beispiel einer solchen Remanenz ausser den von Andern bereits citirten ist Lobelia urens von Rambouillet, über Cherbourg, Caen, Blois, Insel Noirmoutier, Nantes, Tours bis Aurillac, Dax, (neben Pedicalaris!) Bayonne, Pau, Foix, dep. Allier, Gard etc. — während die sonst

atlantische (z. B. belgische) Lobelia dortmanna nur im Teich von Cazau (Gironde) und bei Bayonne gefunden wurde, wobei auf den Propagationsmodus derselben, den Buchenau nachgewiesen, als ihren Erhaltungsgrund hingewiesen wurde. Lobelia urens entspross bei Essarts nach Fällung eines Waldes in einem Erikagebüsche!

Ein Beispiel einer atlantischen Pflanze, die Roth in seiner etwas flüchtigen Compilation übersehen, ist Pinguicula lusitanica in Westfrankreich, Cherbourg in der Sologne, bei Aurillac, am Meere von Dunkirchen, bis Bayonne.

Auch Meconopsis cambrica fehlt ihm aus Frankreich, die doch schon Godron aus der Bretagne, der Auvergne und den Pyrenäen angibt, wo sie bei Eauxbonnes neben Erinus alpinus wächst, die aber auch noch bei Dijon im Dep. Yonne vorkömmt.

Auf die von Martins erwähnten Relicten wurde nur kurz hingewiesen, dagegen musste ausführlich dargethan werden, dass die unperiodischen grossen Fröste, die z. B. 1870 in Frankreich noch häufig Epheu und Stechpalmen tödteten, der Erhaltung südlicher Formen sehr ungünstig sind, wie sich darum z. B. nicht einmal die Zwergpalme Liguriens erhielt. So hat sich Anagyris foetida — auch eine alte Remanenz, bei Montpellier nur in 10 ex. erhalten, die seit dem 16. Jahrhundert bekannt sind.

Die Eintheilung der Pflanzen der Provence nach dem Alter, die Saporta aufgestellt (jüngste, mediterrane u. tertiäre) musste als ausserhalb des Rahmens gelegen, nur kurz erwähnt werden.

Der Vortragende setzte auseinander, dass die Erhaltungsbedingungen im Osten und Süden (Pyräneen) andere seien als im Westen. Im Osten und Süden sind es entweder einjährige Pflanzen, die die grosse Sonnenwärme benützen, oder geschützte Lagen, die südliche Formen bringen. Erreicht doch z. B. Acanthus mollis noch in Bèziers $1^1/_2$ m. Höhe. Die bei Lyon vorkommenden südlichen Formen (Leuzea, Afyllanthes, Centranthus, Lavandula, Erythronium) gehören meist hieher. Der Westen Frankreichs hat wenig geschützte Lagen, da er den Nordwinden offen steht, darum haben die kalkigen Karststeppen, die Causses, so wenig südliche Formen, erst im Südwesten beginnen auf den Kalkhängen die immergrünen Eichengebüsche (Qu. ilex), die garrigues mit mediterranem Gebüsch (Perückensumach, Terebinthen, Coriaria, Cisten, Osyris etc.) — weil die Auvergne Windschutz bietet. — Bei Toulouse sind schon Psoralea, Coriaria, Ecbalium, Osyris. In den Pyrenäen dagegen sind in ca. 3000 m. Merendera bulbocodium, Erythronium dens canis, Dafne, Buxus mit Alpenpflanzen gemischt, und die

Erhaltung der Ramondia, der Dioscorea ist eben dadurch erklärlich, dass sie nur in geschützten Thälern vorkommen. Ebenso sind in den Alpen z. B. bei Gap. in 1000 m. Seehöhe noch Leuzea, Afyllanthes, Jasminum fruticans, Rhus cotinus, Prunus mahaleb, Salvia ethiopis.

Anders haben sich dagegen diejenigen südlichen Pflanzen im Westen erhalten, die nur eine milde Wintertemperatur wünschen. So ist die spanische Kriecheiche (Q. toza) bis in die Touraine nachgewiesen. Ein gutes Beispiel gibt die Insel Noirmoutier, wo neben Quercus ilex, Efedra, Cistus salvifolius, (Bayonne, Bordeaux, Agen, Lyon), Romulea columnae (Oleron, Cherbourg, Vannes, Quimper), Asparagus acutifolius, Lobelia, Cynanchum etc. vorkommen, oder die Umgebung von Aurillac (Lobelia urens, Adiantum capillus veneris, Arum italicum, Centranthus, der in Frankreich weitverbreitete Buxus, Pterotheca sancta, Gladiolus segetum, Oxalis corniculata, Scilla liliohyacinthus).

Endlich wurde das so interessante Faktum erwähnt, dass sowie der Jura nach Christ nur die Flora der Kalkalpen besitzt und (ausser Heracleum alpinum) keine endemische Pflanze hat, so auch die geologisch so junge Auvergne keine endemische Pflanze hat (ausser Arabis cebennensis), sowie — vor der Jordan'schen Artenzersplitterung — der grösste Theil Frankreichs, da doch die spanischen, italienischen und griechischen endemischen Arten gleich und allgemein anerkannt wurden, ein Räthsel um so auffälliger, als ja die Kunde von der Mittelmeervegetation so wesentlich von Montpellier ausging, dass es so viele Artsnamen noch heute bezeugen.

19.

Über eine specielle, durch ein dioptrisches System bestimmte Raumcollineation.

Vorgetragen von **Miloslav Pelíšek**, am 21. Mai 1886.

Mit 1 Tafel.

Im Jahre 1840 hat Gauss in der berühmten Abhandlung: Dioptrische Untersuchungen den Gang der Lichtstrahlen durch ein centrisches System von brechenden Medien, welche von Kugelflächen begrenzt sind, und zwar für sogenannte Centralstrahlen angegeben, solche Strahlen nämlich, welche mit der Axe des Systems

Winkel einschliessen, deren Sinus noch dem Bogen gleichgesetzt werden kann.

Durch diese Arbeit wurden alle früheren Untersuchungen in Schatten gestellt; dieselben befassten sich entweder mit Systemen von Linsen, deren Dicke vernachlässig werden konnte, wie in den Arbeiten von Euler, Lagrange, Möbius u. A. oder es wurden Linsensysteme mit Berücksichtigung der Dicke der Linsen rechnend untersucht, aber die dabei erhaltenen Formeln waren so complicierter Natur, dass sie keiner anschaulichen geometrischen Deutung fähig waren. An diesem Übel leiden auch alle späteren Versuche einer genaueren Theorie der Linsensysteme.

Von den Arbeiten, welche die Gauss'sche zu vervollständigen suchten, ist die Abhandlung: Beitrag zur physiologischen Optik 1845 von Listing die wichtigste, weil sie die beste bisher aufgestellte Theorie des menschlichen Auges bildet.

Von den späteren Arbeiten, welche diese Theorien zu popularisieren bestrebt waren, erwähnen wir nur das Buch von Ferraris: Die Fundamental-Eigenschaften der optischen Instrumente, deutsch von Lippich, auf welches mit reicher Quellenangabe versehene Werk wir erst nach Vollendung dieser Abhandlung aufmerksam gemacht wurden.

Vorliegende Schrift verfolgt den Zweck, die Resultate der erwähnten Untersuchungen, welche in der allgemein bekannten Listing'schen Construction gleichsam condensiert sind, von der letzteren ausgehend, auf möglichst kurzem, geometrischem Wege so zu reproducieren, dass man sich ein klares, anschauliches Bild von der Beziehung zwischen den Gegenständen der Aussenwelt und ihren optischen Bildern im Auge machen kann; nebenbei werden geometrisch interessante Umstände gelegentlich hervorgehoben und in einer Fortsetzung aus dieser Beziehung Folgerungen gezogen, auf Grund deren verschiedene Fragen erörtert werden, welche für perspectivische Darstellungen von grösster Wichtigkeit sind.

Nach Listing kann der Verlauf der Lichtstrahlen durch ein beliebiges centrisches dioptrisches System, sofern man sich nur auf die Centralstrahlen beschränkt, daher auch das optische Bild eines beliebigen Gegenstandes bestimmt werden, wenn die Lage gewisser Fundamentalpunkte auf der Axe des Systemes bekannt ist. Es sind dies (Fig. 1.) nach Gauss die Brennpunkte ff', die

Hauptpunkte hh' und die Listing'schen Knotenpunkte kk', welche so liegen, dass

$$fh = f'k' \text{ und } hh' = kk' \qquad \text{ist.}$$

Die durch die genannten Punkte gehenden auf der Axe des Systems senkrechten Ebenen heissen bezüglich Brenn-Haupt- und Knotenebenen, welche wir mit den entsprechenden grossen Buchstaben bezeichnen; ferner wollen wir uns nicht auf die Umgebung der Axe allein beschränken, sondern die durch die Listing'sche Construction bestimmte Verwandtschaft uneingeschränkt gelten lassen.

Das Bild a' eines Punktes a wird bekanntlich in folgender Weise abgeleitet: Man fällt die Senkrechte aa_1 auf die Ebene H' und verbindet den Fusspunkt a_1 mit dem Brennpunkte f'; ferner a mit dem Knotenpunkte k und zieht zu dieser Verbindungslinie eine Parallele durch k'; diese Parallele muss a_1f' in dem gesuchten Punkte a' schneiden, weil alle angeführten Geraden in der durch a und die Axe bestimmten Ebene liegen.

Daraus folgern wir zunächst, dass in der in Rede stehenden Beziehung jede durch die Axe gehende Ebene, daher auch die Axe sich selbst entspricht. Da ferner alle durch die Axe gehenden Ebenen gegen die Fundamental-Punkte und Ebenen dieselbe Lage haben, so schliessen wir, dass wir alle Constructionen nur in der Zeichenebene auszuführen brauchen.

Legen wir durch a eine beliebige Ebene E, so entsteht die Frage, was der Ort der Punkte ist, die den Punkten derselben entsprechen. Das Parallel-Strahlenbündel aa_1 ist zu dem Strahlenbündel $f'a_1$ perspectivisch, weil sich die entsprechenden Strahlen auf der Ebene H' schneiden; das Parallelstrahlenbündel aa_1 ist aber auch zu dem Strahlenbündel ka perspectivisch, weil sich die entsprechenden Strahlen in der Ebene E schneiden, daher sind die Strahlenbündel ka und $f'a_1$ projectivisch. Endlich sind die Strahlenbündel $k'a'$ und ka congruent, weil ihre entsprechenden Strahlen parallel laufen; daher sind auch die Strahlenbündel $f'a'$ und $k'a'$ projectivisch; da aber jede durch die Verbindungslinie der Scheitel f' und k' dieser Bündel gehende Ebene nach Obigem sich selbst entspricht, so sind diese Bündel perspectivisch*); daher ist das Erzeugnis derselben eine Ebene E.

Die Verwandtschaft ist demnach so beschaffen. dass jeder Ebene E wieder eine Ebene E', somit einer

*) Reye, Geometrie der Lage 1880 Bd. II. p. 16.

Geraden wieder eine Gerade entspricht; sie ist demnach räumliche Collineation.

Führen wir die Construction für einen Punkt b der Hauptebene H durch, so erkennen wir wegen $bb_1 = kk'$, dass der entsprechende Punkt $b' \equiv b_1$ in H' liegt. Der Hauptebene H entspricht also die Hauptebene H' und zwar so, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte parallel zur Axe gehen; die entsprechenden Punkte dieser Ebenen bilden daher zwei congruente Systeme.

Führen wir die Construction für einen Punkt c der Knotenebene K durch, so erkennen wir, dass der entsprechende c' auf k' liegt. Der Knotenebene K entspricht die Knotenebene K' und zwar so, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt γ der Axe gehen. Es ist nämlich

$$\frac{\gamma k'}{\gamma k} = \frac{c'k'}{ck} = \frac{c'k'}{c_1 h'} = \frac{f'k'}{f'h'} = \text{const.}$$

Die entsprechenden Punkte der Knotenebenen bilden demnach zwei ähnliche Systeme in perspectivischer Lage für ein auf der Axe gelegenes Centrum und zwar so, dass sich die Grösse des Gegenstandes zur Grösse des Bildes verhält, wie die Abstände der Hauptebene H' und der Knotenebene K' von der Brennebene F'.

Der Schnittlinie der Ebenen H und K muss die Schnittlinie der entsprechenden Ebenen H' und K' entsprechen, das heisst, die unendlich ferne Gerade dieser Ebenen entspricht sich selbst, woraus wir schliessen: jeder zur Axe senkrechten Ebene entspricht wieder eine solche. Der Ebene A entspricht also A' und zwar wieder so, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen festen Punkt o der Axe gehen; denn es ist:

$$\frac{o\alpha}{o\alpha'} = \frac{a\alpha}{a'\alpha'} = \frac{a_1 h'}{a'\alpha'} = \frac{h'f'}{\alpha' f'} = \text{const.} \qquad \text{d. h.}$$

Zwei einander entsprechende zur Axe senkrechte Ebenen bilden zwei ähnliche Systeme in perspectivischer Lage und zwar liegt ihr perspectivisches Centrum auf der Axe so, dass sich die Grösse des Gegenstandes zur Grösse des Bildes verhält, wie die Abstände der Hauptebene H' und der Ebene der Bilder A' von der Brennebene F'.

Führen wir die Construction für einen Punkt d der Brennebene F durch, so überzeugen wir uns, dass der entsprechende d' ins Unendliche fällt, weil wegen $dd_1 = f'k$ die Geraden dk, d_1f' und $k'd'$ parallel sind, das heisst:

Der Brennebene F entspricht die unendlich ferne Ebene und zwar ist k ihr perspectivisches Centrum; jedem Strahlenbündel, dessen Scheitel d in F liegt, entspricht ein Parallelstrahlenbündel von der Richtung dk; speciell dem Strahlenbündel fa des Parallelstrahlenbündels $a'\mathfrak{a}'$. Dies führt uns zu einer neuen Construction des Bildes a' aus dem Original a. Es entspricht nämlich der Geraden af die zur Axe parallele $a'\mathfrak{a}'$, dem Schnittpunkte $\mathfrak{a}$ von H und af der Schnittpunkt $\mathfrak{a}_1$ der entsprechenden $a'\mathfrak{a}'$ und H'; ausserdem müssen die entsprechenden Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ auf einer zur Axe Parallelen liegen, woraus folgt, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{a}_1 a'$ auf einer Geraden liegen. Mann kann also a' aus a ableiten, indem man die Verbindungslinie af mit H zum Schnitte bringt und durch den Schnittpunkt $\mathfrak{a}$ eine Parallele zur Axe zieht, ferner zu der Verbindungslinie ak durch k' eine Parallele führt.

Führt man aber die inverse Construction durch, nämlich zum Punkte a' als Bild auf diese Art das Original a zu finden, so gelangt man zu der ursprünglichen Construction, wobei aber die Hauptebene sowie die Knotenebenen ihre Rollen vertauscht haben; speciell erkennt man, dass der Ebene F' die unendlich ferne des Originals entspricht, wobei k' ihr perspectivisches Centrum ist. Endlich kann man das Bild a' des Punktes a mit Anspruchnahme des Trapezes $aa_1a'\mathfrak{a}$ allein construieren.

Wir heben ausdrücklich hervor, dass, wenn man dem Punkte a als Original den Punkt a' in der angegebenen Weise zuweies, dadurch eine Collineation statuiert ist, in welcher den Ebenen F, H und K des Originals bezüglich die unendlich ferne Ebene, ferner H' und K' als Bilder entsprechen; würde man aber dem Punkte a' als Original den Punkt a als Bild zuweisen, so wäre damit eine von der früheren verschiedene Collineation festgesetzt, in welcher den Ebenen K', H' und F' als Original die Ebenen K, H und die unendlich ferne Ebene als Bilder entsprechen würden. Wir haben es hier also mit keinem involutorischen Entsprechen zu thun.

Betrachten wir die Ebene (H), welche denselben Abstand von der Brennebene F hat wie H und construieren zu irgend einem Punkte p derselben den entsprechenden p' ohne Intervention der Knotenpunkte, so erkennen wir, dass wegen $pf = f\mathfrak{p}$ der Punkt p' denselben Abstand von der Axe hat wie p; ferner wegen $p_1f = f'p'$, dass die

Ebene (H') denselben Abstand von F' hat wie H'. Da sich die Grösse des Bildes zur Grösse des Gegenstandes so verhält, wie die Abstände der Ebenen (H') und H' von F', so sehen wir, dass die entsprechenden Ebenen (H) und (H') zwei congruente Systeme bilden, die so gelegen sind, dass die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch das Centrum (O_h) auf der Axe gehen, welches die Strecke (h) (h') halbiert. Nimmt man alle Strecken absolut, so haben diese Ebenen dieselben Eigenschaften wie die Hauptebenen; da aber ihre Lage gegen die Brennebenen, ferner die Lage ihrer Bilder gegen die Axe entgegengesetzt ist, wie bei den Hauptebenen, so wurden sie von Töpler negative Hauptebenen, die Punkte (h) u. (h') negative Hauptpunkte genannt. Auf diese negativen Hauptebenen und negativen Hauptpunkte basiert eine neue, leicht zu errathende Construction des Bildes a' von a, wenn nur die vier Hauptebenen und die Knotenpunkte gegeben sind.

Betrachten wir einen Punkt i der Ebene (K), welche von F gleichen Abstand hat wie K, so erkennen wir, dass i' auf einer Ebene (K') liegt, welche denselben Abstand von F' hat wie K'. Es ist nämlich

$$\triangle\,(k)ik \sim (k')i'k' \text{ ferner } \triangle\,ifk \sim i'f'k',$$

weil $(k)h' = ii_1 = ff'$, somit $if \parallel i_1 i'$ ist. Da aber $(k)f = fk$ ist, so muss auch $(k')f' = k'f'$ sein, wodurch die Behauptung erwiesen ist. Zieht man nun durch (k) irgend eine Gerade $(k)g$, wobei g der Brennebene F angehört, so entspricht ihr nach Früherem eine Gerade, welche parallel zu kg ist. Da aber die Geraden $g(k)$ und gk entgegengesetzt gleiche Winkel mit der Axe einschliessen, so auch $(k)g$ und die ihr entsprechende $(k')g'$. Wegen dieser Eigenschaft erhielten diese Punkte (k) u. (k') den Namen negative Knotenpunkte und die Ebenen (K) u. (K') den Namen negative Knotenebenen. Es ist klar, in welcher Weise diese Elemente zu neuen Constructionen des Bildes a' von a dienen können. Das perspectivische Centrum $o_{(k)}$ dieser Ebenen theilt nach Früherem die Strecke (k) (k') in dem Verhältnis $h'f' : (k')f'$.

Es ist für unsere Zwecke von entscheidender Wichtigkeit, den Verlauf dieses perspectivischen Centrums zu verfolgen, wenn die zur Axe senkrechte Originalebene alle möglichen Lagen einnimmt.

Liegt dieselbe im Unendlichen (etwa links in unserer Figur), so fällt das Centrum mit k' zusammen; durchläuft die Ebene alle Lagen bis nach (K), so bewegt sich das Centrum bis (O_k); bewegt

sich die Ebene bis nach (H), so auch das Centrum bis nach (O_h); fällt die Ebene mit F zusammen, so auch das Centrum mit k; durchläuft die Ebene die Raumschichte bis nach H, so bewegt sich das Centrum bis ins Unendliche in der bereits eingeschlagenen Richtung etc.

Aus dem letzten Umstande schliessen wir zunächst, weil in jeder Collineation einer continuierlichen Bewegung wieder solche entspricht, dass das perspectivische Centrum mit der ihm zugehörigen Ebene einmal zusammenfallen muss; ist dies aber der Fall, so müssen auch die entsprechenden Ebenen zusammenfallen und bilden eine reelle Doppelebene des Systems, welche nach Listing symptotische Ebene genannt wird. Aus dem betrachteten Verlauf schliessen wir aber:

Die Gegenstände der Aussenwelt und ihre reellen Linsenbilder (optische Bilder) nähern sich desto mehr einer einheitlichen räumlichen Centrallcolineation, je grösser die Entfernung der Gegenstände von der Linse ist; es findet dagegen desto grössere Abweichung von dieser Beziehung statt, je näher die Gegenstände an der Linse liegen. Strenge genommen, gilt eine einheitliche Centralcollineation selbst für Raumschichten von kleinster Dicke nicht.

Bezeichnen wir die Entfernung der Ebene A von der Brennebene F (nach links gemessen) mit x; die Entfernung der entsprechenden A' von F' (nach rechts gemessen) mit y; die Entfernung eines Punktes a in A von der Axe mit λ; die des entsprechenden a' mit λ' und setzen endlich

$$fh = \alpha,\ fh' = \beta,\ ff' = \gamma,$$

so gilt: $$\triangle fh(a) \sim f\alpha a \text{ und } \triangle f'h'a_1 \sim f'\alpha'a',$$

daher auch $$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\alpha}{x} \text{ und } \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{y}{\gamma - \beta},$$

woraus wir schliessen:

$$xy = \alpha(\gamma - \beta) = \text{const.}$$ d. h.

Das Produkt der Entfernungen zweier entsprechenden Punkte von den ihnen zugehörigen Brennebenen ist constant, nämlich gleich dem Produkte der Entfernungen der Hauptebenen oder der Knotenebenen von den entsprechenden Brennebenen.

Dieses Resultat führt uns zu der einfachsten Construction des Bildes π' irgendeines Punktes π der Axe. Wir beschreiben über $h(k)$ als Durchmesser einen Kreis, welcher F in D schneidet; dann ist wegen $f(k) = f'h'$ nach dem vorhergehenden Satz $xy = FD^2$. Machen wir ferner auf F' $F'D' = FD$ und beschreiben über DD' als Durchmesser den Kreis $\varkappa$ und verbinden irgend einen Punkt desselben mit D und D', welche Verbindungslinien auf der Axe die Punkte π und π' herausschneiden, dann ist, wie man leicht erkennt, $\pi f \,.\, \pi' f' = FD^2$, daher π u. π' ein Paar entsprechender Punkte. Dies führt uns zu folgendem Satze, welcher auf unsere Beziehung des hellste Licht wirft:

Bewegt sich ein rechter Winkel, so dass seine Schenkel stets durch D und D' gehen, sein Scheitel also stets auf dem Kreise $\varkappa$ bleibt, so schneiden jene Schenkel auf der Axe immer ein Paar entsprechender Punkte π und π' aus.

Daraus ergiebt sich unmittelbar, dass die Schnittpunkte δ und δ' dieses Kreises mit der Axe die selbstentsprechenden oder nach Listing symptotischen Punkte sind, durch welche die beiden selbstentsprechenden oder symptotischen Ebenen $\triangle$ und $\triangle'$ bestimmt sind. Die Verwandtschaft in diesen Ebenen ist nach dem Vorhergehenden dadurch characterisiert, dass ein Punkt a und sein entsprechender a' auf einem durch δ gehenden Strahl liegt, ferner dass auch hier gilt

$$\frac{a\delta}{a'\delta} = \frac{FH'}{F\triangle} = \text{const.} \qquad \text{d. h.}$$

Die beiden Punktsysteme einer selbstentsprechenden Ebene $\triangle$ sind ähnlich und ähnlich gelegen für den selbstentsprechenden Punkt δ der Axe als Centrum.

Die Bewegung des angeführten rechten Winkels setzt uns in den Stand uns eine klare Vorstellung über den Verlauf der entsprechenden zur Axe senkrechten Ebenen zu machen; für unsere Zwecke ist folgende Erkenntnis sehr wichtig:

Je weiter eine Raumschichte von bestimmter Dicke von der Linse entfernt ist, desto kleinere Dicke hat die ihr entsprechende Raumschichte des optischen Bildes, wobei unter Raumschichte der Raum zwischen irgend zwei zur Axe senkrechten Ebenen verstanden werden soll. Mit anderen Worten:

Ändert ein Gegenstand in der Nähe der Axe seine Lage im Raume, so wird die Änderung seines optischen

Bildes desto kleiner sein, je weiter der Gegenstand von der Linse entfernt ist.

Nebenbei sei erwähnt, dass für ein schematisches Auge folgende Werte gelten:

$$\alpha = 14\ mm,\ \beta = 14{\cdot}4\ mm,\ \gamma = 26{\cdot}6\ mm,$$

ferner wird der sogenannte Nahepunkt für ein normales Auge in der Entfernung von 25 *cm* vom Brennpunkte der Augenlinse angenommen. Setzen wir diese Werte in die obige Gleichung ein, so erhalten wir

$$y = 0{\cdot}68\ mm.$$

Würde also in einem schematischen, auf die Unendlichkeit eingerichteten Auge ein reelles Bild aller Gegenstände der Aussenwelt vom Unendlichen bis zum Nahepunkte entstehen können, so hätte es bloss eine Dicke von 0·68 *mm*.

Die in Rede stehende Collineation hat für den Geometer interessante Eigenthümlichkeiten. Es ist bekannt, dass die allgemeine Collineation höchstens vier reelle, das sogenannte Haupttetraëder bildende selbstentsprechende Punkte besitzt. In unserer Collineation sind erstens die beiden symptotischen Punkte selbstentsprechend, ausserdem entspricht aber, wie wir gesehen haben, die unendlich ferne Gerade der zur Axe senkrechten Ebenen sich selbst, und zwar ist jeder Punkt derselben selbstentsprechend, weil die durch die Axe gehenden Ebenen selbstentsprechend sind. Dies ist der allgemeinere Grund, warum je zwei entsprechende auf der Axe senkrechte Ebenen in perspectivischer Lage sind; ferner, dass die in solchen Ebenen einander entsprechenden Figuren ähnlich sind; dass speciell in solchen Ebenen einem Kreise wieder ein Kreis entspricht, weil die imaginären Kreispunkte auf dieser unendlich fernen Geraden ebenfalls selbstentsprechende Punkte sind. Wählen wir auf dieser Geraden irgend zwei Punkte, so bilden dieselben mit den symptotischen Punkten ein selbstentsprechendes Tetraëder; also:

In der in Rede stehenden Collineation gibt es unendlich viele Haupttetraëder. Charakteristisch ist für diese Collineation auch folgender Umstand. In irgend einer durch die Axe gehenden Ebene tritt eine ebene Collineation auf, deren Hauptpunkte

die symptotischen Punkte und der unendlich ferne Punkt der zur Axe senkrechten Richtung sind; drehen wir die Ebene um die Axe, so entsteht unsere räumliche Collineation. Dies gilt nicht von einer beliebigen ebenen Collineation, deren drei Hauptpunkte im Endlichen liegen; denn drehen wir dieselbe um die Verbindungslinie zweier Hauptpunkte, so beschreibt der dritte Hauptpunkt einen sich selbst entsprechenden Kreis, woraus hervorgeht, dass die nun auftretende Beziehung keine räumliche Collineation ist.

Construction des Bildes einer beliebigen Geraden.

Die allgemeine Methode, das Bild G' einer Geraden G zu bestimmen, würde darin bestehen, dass man zu zwei beliebigen Punkten derselben die entsprechenden bestimmt. Je nach der Wahl dieser Punkte gibt es dann besondere Methoden.

1. Verwendung der Brennebene: Nehmen wir den einen Punkt φ_1 von G in der Brennebene F an, so ist nach Früherem $G' \| k\varphi_1$. Daraus folgt aber eine einfache Beziehung zwischen den Winkeln, welche die Geraden und ihre Bilder mit der Axe einschliessen. Fällen wir nämlich von einem Punkte p der Geraden G (Figur 2.) die Senkrechte $p\pi$ auf die Brennebene und bezeichnen die Winkel, welche die Gerade G bezüglich ihr Bild G' oder, was dasselbe ist $\varphi_1 k$ mit der Axe einschliessen, mit α bezüglich α', so gilt:

$$tg\alpha = \frac{\varphi_1\pi}{\pi p} \text{ und } tg\alpha' = \frac{\varphi_1 f}{fk}; \text{ daher } \frac{tg\alpha}{tg\alpha'} = \frac{fk}{p\pi} \cdot \frac{\varphi_1\pi}{\varphi_1 f}, \text{ oder}$$

$$\frac{tg\alpha}{tg\alpha'} = \text{const.} \frac{\varphi_1\pi}{\varphi_1 f}.$$

Dies ist die allgemeinste Beziehung, welche zwischen den Winkeln welche die Strahlen eines Büschels p, bezüglich des entsprechenden Büschels p' mit der Axe einschliessen. Fällt der Punkt p somit auch π mit der Axe zusammen, so ist

$$\frac{tg\alpha}{tg\alpha'} = \frac{fk}{fp} = \text{const.}$$

Beschränken wir uns endlich nur auf Centralstrahl, so ist:

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{fk}{fp} = \text{const.} \qquad \text{d. h.}$$

Die Winkel, welche die Centralstrahlen eines Büschels, dessen Scheitel p auf der Axe liegt, und die Strahlen des entsprechenden Büschels mit der Axe einschliessen, sind den Abständen des Knotenpunktes k und des Scheitels p von dem Brennpunkte f proportional. Fällt p mit k oder (k) zusammen, so erhalten wir $\alpha = \alpha'$, beziehungsweise $\alpha = -\alpha'$.

Im Falle der Centralstrahlen lässt sich auch eine einfache Beziehung zwischen den Winkeln aufstellen, welche je zwei Gerade eines Büschels p und die entsprechenden mit einander bilden. Seien (Fig. 2.) g_1 und g_2 zwei Gerade der Büschels p; $\varphi_1 \varphi_2$ ihre Schnittpunkte mit der Brennebene; $\alpha_1 \alpha_2$, $\alpha'_1 \alpha'_2$ die Winkel, welche diese Geraden und ihre Bilder mit der Axe einschliessen, dann gilt wieder:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha'_1} = \text{const.} \frac{\pi\varphi_1}{f\varphi_1}, \frac{\alpha_2}{\alpha'_2} = \text{const.} \frac{\pi\varphi_2}{f\varphi_2}; \text{ daher}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \text{const.} = \left[\frac{\pi\varphi_2}{f\varphi_2}\alpha'_2 - \frac{\pi\varphi_1}{f\varphi_1}\alpha'_1\right].$$

Weil alle Winkel unendlich klein sind, so können wir setzen:

$$f\varphi_1 = fk \,.\, \alpha'_1, \; f\varphi_2 = fk \cdot \alpha'_2, \text{ woraus folgt:}$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\text{const.}}{fk}\left(\pi\varphi_2 - \pi\varphi_1\right).$$

Andererseits ist:

$$\alpha'_2 - \alpha'_1 = \frac{1}{fk}\,(f\varphi_2 - f\varphi_1); \text{ daher:}$$

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha'_2 - \alpha'_1} = \text{const.} \frac{\pi\varphi_2 - \pi\varphi_1}{f\varphi_2 - f\varphi_1}$$

Nehmen wir der Einfachheit wegen die Geraden G_1 und G_2 mit der Axe in einer Ebene an, so ist:

$$\frac{\pi\varphi_2 - \pi\varphi_1}{f\varphi_2 - f\varphi_1} = 1$$

Setzen wir noch $\alpha_2 - \alpha_1 = \omega$ und $\alpha'_1 - \alpha'_1 = \omega'$ so gilt, wie früher

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{fk}{\pi p} = \text{const.}$$

2. Verwendung der Hauptebenen. Schneidet die Gerade G die Hauptebenen H und (H) in p und (p), so ziehen wir durch p eine Parallele zur Axe, bis H' in p' geschnitten wird, der Punkt (p').

Pelíšek: Über eine specielle Raumcollineation.

Fig. I.

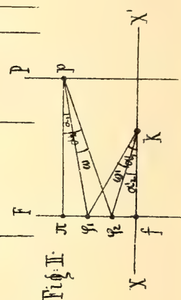


Fig. II.

Fotolith. Farský Prag.

liegt in der Schnittlinie der durch (p) und die Axe bestimmten Ebene mit (H') und hat entgegengesetzt gleichen Abstand von der Axe wie (p),

3. Verwendung der Doppelebenen. Schneidet die Gerade G die Ebenen $\triangle_1$ und $\triangle_2$ in p_1 und p_2, so verbindet man diese Punkte mit δ_1 bezüglich δ_2 und bestimmt auf diesen Strahlen p'_1 und p'_2 durch die Proportionen:

$$\frac{\delta_1 p_1}{\delta_1 p'_1} = \frac{f'h'}{f'\delta_1} \text{ und } \frac{\delta_2 p_2}{\delta_2 p'_2} = \frac{f'h'}{f'\delta_2}.$$

Da sich alle Theilungen mittels eines einzigen Proportionalwinkels ausführen lassen und nur in den Ebenen $\triangle_1 \triangle_1$ Constructionen auszuführen sind, so ist diese Methode die zweckmässigste. Es ist klar, wie man auch die einzelnen Methoden combinieren könnte.

Construction des Bildes einer beliebigen Ebene.

1. Verwendung der Brennebene. Schneidet die Ebene E die Brennebene F nach einer Geraden G, so ist die entsprechende E' zu der durch k und G bestimmten Ebene parallel und geht durch den entsprechenden Punkt ε' des Schnittpunktes ε der gegebenen mit der Axe.

2. Verwendung der Hauptebenen. Schneidet E die Ebenen H und (H) nach G und (G) und ziehen wir in H' die Parallele G' zu G in gleichem, ferner in (H') die Parallele (G') zu (G) in entgegengesetztgleichem Abstande von der Axe, so ist E' durch G' u. (G') bestimmt.

3. Verwendung der Doppelebenen. Schneidet E die Ebenen $\triangle_1$ und $\triangle_2$ nach G_1 und G_2 und bemerken, wir dass $G'_1 \parallel G_1$ ferner $G_2 \parallel G_2$ ist, so haben wir von jeder Geraden nur einen Punkt wie oben zu ermitteln.

Specialisierung der untersuchten Collineation.

1. Wenn die Medien vor und hinter der Linse identisch sind, dann fallen die Hauptpunkte und Knotenpunkte zusammen. Sämmtliche Constructionen sind wie früher auszuführen, wenn man nur an den Identitäten festhält:

$$h \equiv k \; h' \equiv k' \; (h) \equiv (k) \; (h') \equiv (k'); \; H \equiv K \; H' \equiv K' \; (H) \equiv (K) \; (H') \equiv (K')$$

2. Bei den unendlich dünnen Linsen fallen die Hauptpunkte und Knotenpunkte mit dem Mittelpunkte O von f und f' zusammen. Nur in diesem Falle ist das Punktsystem a'.... einheitliche Centralprojection des Originalsystems. Sei wieder x die Entfernung eines Axenpunktes von f, y die des Bildes von f', $2e$ der Abstand der beiden Brennpunkte, dann gilt

$$x \cdot y = e^2 \qquad \text{d. h.}$$

Die halbe Excentricität ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Abständen der entsprechenden Punkte von den zugehörigen Brennebenen.

Daraus folgt, dass der Kreis x die Axe in O berühren wird, zum Beweis, dass in O zwei Paare entsprechender Punkte zusammenfallen.

Zum Schlusse bemerken wir noch, dass auch durch diese einfachere Construction zwei Collineationen bestimmt sind: die erste durch O als zwei Paare entsprechender Punkte, ferner f als Original und den unendlich Fernen als Bild, die zweite durch O als zwei Paar entsprechender Punkte, f' als Original und den unendlich fernen als Bild.

Wir können also in jedem Falle sagen:

Ein Gegenstand und sein Linsenbild sind die entsprechenden Elemente in zwei Collineationen, welche durch die Brennpunkte, Hauptpunkte und Knotenpunkte (in der aus der Figur zu erkennenden Weise) bestimmt sind, und zwar gilt auf je einer Seite je eine Collineation.

20.

Sur le réseau de coniques du 2n[ième] indice.

Par **J.-S. Vaněček.**

(Předložil tajemník math.-přír. třídy dne 21. května 1886.)

1. Dans la Note précédente nous avons considérées les coniques qui touchent trois droites fixes et forment un réseau du deuxième indice. A présent, nous nous proposons d'étudier les réseaux des indices supérieurs qui sont, comme on sait, trés importants dans les

recherches sur la génération des figures nouvelles. Nous verrons que la construction de ces réseaux est très facile.

Prenons sur une des tangentes fondamentales S, T, U du réseau demandé deux points s_1, s_2, par les quels passent les autres tangentes déterminant les coniques du réseau de telle manière que le point d'intersection de ces deux dernières tangentes parcourt une courbe Σ du $n^{ième}$ ordre. Le réseau considéré est du $2n^{ième}$ indice. Il peut arriver que la courbe Σ occupe des positions singulières vers les points s_1, s_2 et vers le point d'intersection r des autres deux tangentes fondamentales du réseau, ce qui a une influence à l'abaissement de l'indice. Nous pouvons donc d'une courbe Σ du quatrième ordre, douée de trois points doubles, dériver un réseau du huitième, septième, etc. jusqu'au deuxième indice.

2. La construction des coniques du réseau est la suivante. D'un point quelconque d de la courbe Σ menons deux droites D_2, D_1 par les points s_1, s_2 que nous avons choisis sur S. Ces droites D_2, D_1 rencontrent les autres tangentes fixes T, U respectivement en les points d_2^t, d_2^u; d_1^t, d_1^u. Les droises $s_1 d_1^t$, $s_2 d_2^t$ se rencontrent en le point d^t; puis les droites $s_2 d_2^u$, $s_1 d_1^u$ se coupent en d^u. Les points d^t, d^u déterminent une droite D, à l'aide de laquelle nons établissons la correspodance des faisceaux de droites (s_1), (s_2), qui nous servent à la construction des autres tangentes de chaque conique donnée par les tangentes fixes S, T, U et par D_1, D_2.

3. Considérons un point arbitraire d sur Σ; la droite ds_1 qui le joint au point s_1 est la quatrième tangente fondamentale d'un réseau ordinaire de coniques. En construisant les droites Δ_2 des centres de tels réseaux, nous trouvons qu'il faut diviser en deux également les diagonales d'une infinité de quadrilatères complets. Pour éviter ce longue travail nous allons le simplifier comme il suit.

Les tangentes fixes S, T, U forment un triangle pqr, quand nous désignons les points ST, SU, TU respectivement par p, q, r. Les diagonales des quadrilatères complets se terminent en les sommets p, q, r du triangle pqr.

Les points milieux de ces diagonales se trouvent sur les droites S', T', U' parallèles respectivement aux droites S, T, U, qui passent par les points milieux p', q', r' des côtés du triangle pqr; p' étant sur qr, q' sur pr et r' sur pq. Nous avons ainsi obtenu un nouveau triangle $p'q'r'$ inscrit au triangle pqr.

4. Revenons maintenant au point considéré d sur Σ. La droite D_2 au ds_1 rencontre T en d_2^t et U en le point d_2^u. La diagonale

$d_2^u p$ du quadrilatère complet $STUD_2$ rencontre U' en un point $d_2^{u'}$, et la deuxième diagonale qd_2^t coupe la droite T' en $d_2^{t'}$. La troisième diagonale rs_1 rencontre S' en σ_1. Tout ces points milieux $d_2^{t'}$; $d_2^{u'}$, σ_1 se trouvent sur une droite Δ_2 qui est le lieu des centres des coniques d'un réseau ordinaire, dont nous avons parlé ci-devant.

La droite D_2 rencontre la courbe Σ en n points d. En joignant ces points au point s_2, nous obtenons n droites D_1 qui sont les tangentes de n coniques du réseau $STUD_2$. Quand nous les considérons successivement comme les quatrièmes tangentes fondamentales des réseaux ordinaires, nous obtenons n droites Δ_1 par la même manière comme les droites Δ_2. Les droites Δ_1 passent par un point fixe σ_2 qui est le point milieu de la diagonale fixe $s_2 r$ de tous le quadrilatères complets $STUD_1$.

Les droites Δ_1 ainsi obtenues rencontrent la droite Δ_2 en n points δ qui sont les centres des n coniques du réseau $STUD_2$. En prenant une autre droite D_2 passant par s_1, nous obtenons une autre droite Δ_2, et toutes les droites Δ_2 passent par le point milieu σ_1 de la diagonale fixe des quadrilatères $STUD_2$. Nous avons ainsi construits deux faisceaux correspondants (σ_1), (σ_2) de droites Δ_2, Δ_1. A un rayon Δ_2 du faisceau (σ_1) correspondent, comme nous avons déduit, n rayons Δ_1, et réciproquement; ou en d'autres termes, sur un rayon Δ_2 du faisceau (σ_1) nous obtenous au plus n points δ. Il nous reste encore de chercher combien de points δ se réunissent en les points σ_1, σ_1.

Supposons que la droite D_2 passe par le point r. Dans ce cas toutes les coniques du réseau ainsi déterminé se décomposent en deux à deux points. Déterminons sa droite des centres. Les points d_2^t et d_2^u se confondent en r et, par conséquent, la diagonale qd_2^t se rénuit avec qr et la diagonale pd_2^u avec pr. Leurs points milieux sont respectivement p', q' et la droite $p'q'$ au Δ_2 passe par les points σ_1, σ_2.

La droite D_2 rencontre Σ en n points d et par chacun d'eux passe une droite D_1 à laquelle correspond une droite Δ_1. Toutes ces droites Δ_1 passent par le point σ_2 et rencontrent y la droite Δ_2. De là suit que σ_2 est un point multiple d'ordre n de la courbe (σ). La même chose a lieu quant au point σ_1. Nous obtenons ainsi sur une droite Δ_2 $2n$ points δ; la courbe (σ) est donc d'ordre $2n$.

Considérons le point d en lequel la droite S ou $s_1 s_2$ rencontre la courbe Σ. Les droites Δ_1, Δ_2 passent par le point r' qui appartient par conséquent à la courbe (σ). Puisque la droite S coupe

Σ en n points nous voyons que r' est un point multiple d'ordre n de la courbe (σ).

5. Coupons la courbe (σ) par une droite arbitraire Ξ que nous pouvons considérer comme le lieu des centres des coniques du réseau donné par les tangentes fondamentales S, T, U, X; X étant la droite qui peut être dérivée de Ξ de la manière que nous avons indiquée dans l'article 7 de la Note précédente.

A $2n$ points d'intersection de la droite Ξ avec la courbe (σ) correspondent $2n$ coniques (d) dont les centres se trouvent en ces points d'intersection, et qui touchent la droite X. Dans le réseau considéré il y a donc $2n$ coniques qui touchent une droite arbitraire. De là suit que

Trois droites fixes, étant les tangentes, déterminent une simple infinité de réseaux ordinaires de coniques. En prenant sur une de ces tangentes deux points fixes s_1, s_2, les jonctions de ces points avec un point arbitraire d étant considérées comme les tangentes d'une conique de tous les dits réseaux, cette conique engendre un réseau du $2n^{ième}$ indice, quand le point d parcourt une courbe Σ d'ordre n.

Le lieu des centres de ce réseau est une courbe du $2n^{ième}$ ordre douée des trois points multiples d'ordre n.

6. Supposons que la courbe Σ possède en s_1 et s_2 les points multiples respectivement d'ordre k, l dont la consequence est l'abaissement de l'ordre de la courbe (σ).

Par le points s_1 menons une droite arbitraire D_2; à celle-ci correspond une droite Δ_1 des centres. La droite D_2 rencontre Σ en $(n-k)$ points d; à chacun d'eux correspond une droite D_1 et une droite Δ_2. Ces $(n-k)$ droites Δ_2 rencontrent Δ_1 en $(n-k)$ points δ de la courbe (σ). Nous obtenons ainsi sur chaque droite Δ_1, passant par le point σ_1, $(n-k)$ points differents de point σ_1.

Joignons le point s_2 par la droite D_1 avec le point r d'intersection des droites T, U. A cette droite D_1 correspond une seule droite Δ_2 qui passe, comme nous avons vu, par le point σ_1. D_1 rencontre Σ en $(n-l)$ points dont chacun offre une droite Δ_1. Toutes ces $(n-l)$ droites Δ_1 passent par le point σ_1 et rencontrent Δ_2 en autant de points σ de la courbe (σ). De là suit que le point σ_1 est multiple d'ordre $(n-l)$ sur (σ). Or, sur un rayon arbitraire du faisceau (σ_1) se trouvent $(n-k)+(n-l)=2n-k-l$ points de a courbe (σ) qui est, par conséquent, d'ordre $(2n-k-l)$.

Par un raisonnement semblable nous pouvons déduire que le point σ_2 est multiple d'ordre $(n-k)$ sur (σ) et que sur un rayon quelconque du faisceau (σ_2) se trouvent $(n-l)$ points δ différents de σ_2.

7. Nous allons maintenant examiner ce que offrent les points multiples s_1, s_2 de la courbe Σ. Considérons le point s_1. La droite D_1 menée du point s_2 au point s_1 rencontre les droites T, U en les points p, q. La droite correspondante Δ_1 passe par le point milieu r' du segment pq et par le point σ_2. Puisque le point s_1 est multiple d'ordre k, il s'ensuit que la droite $r'\sigma_2$ ou Δ_1 est de même multiple d'ordre k. Toutes les droites D_2 issues du point s_1 offrent des droites Δ_2 qui rencontrent Δ_1 dans toute son étendue. La droite Δ_1 fait donc une partie d'ordre k de la courbe (σ).

Quand nous considérons le point s_2, nous obtenons la droite $r'\sigma_1$ comme la seconde partie d'ordre l de la courbe (σ).

De là suit que σ_2, σ_1 sont les points multiples respecti vement d'ordre k, l de la courbe propre (σ), pendant qu'ils sont multiples d'ordre n pour la courbe complète. r' est donc un point multiple d'ordre $(n-k-l)$ de la courbe propre (σ).

8. Supposons que le point r est multiple d'ordre m sur la courbe Σ. En traçant la droite D_2 qui joint ce point au point s_1, les points r_2^t, r_2^u coïncident avec r, et nous obtenons la droite $\sigma_1\sigma_2$ comme Δ_2 qui est, par la même raison, la droite Δ_1. Les droites Δ_1, Δ_2 se rencontrent donc dans toutes leur étendue et nous pouvons dire que la droite $\sigma_1\sigma_2$ fait une partie de la courbe (σ). Le point r étant multiple d'ordre m sur Σ, la droite $\sigma_1\sigma_2$ est de même multiple d'ordre m. La courbe propre (σ) est par conséquent d'ordre $(2n-k-l-m)$, sur laquelle les points $\sigma_1\sigma_2$ sont multiples respectivement d'ordre $(n-l-m)$, $(n-k-m)$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Quand la courbe Σ possède en s_1, s_2, r points multiples respectivement d'ordre k, l, m, le réseau de coniques (d) est d'indice $(2n-k-l-m)$. La courbe (σ) des centres de ces coniques se décompose en quatre parties, savoir: en la courbe propre (σ) d'ordre $(2n-k-l-m)$ douée des points multiples σ_1, σ_2, r' respectivement d'ordre $(n-l-m)$, $(n-k-m)$, $n-k-l)$; puis en trois droites $r'\sigma_2$, $r'\sigma_1$, $\sigma_1\sigma_2$ qui sont multiples respectivement d'ordre k, l, m.

9. Nous voyons donc que nous pouvons construire un réseau de coniques d'indice arbitraire, quand nous faisons passer la courbe Σ plusieursfois par l'un, deux ou par tous les points s_1, s_2, r.

Ce mode est donc analogue à celui que l'on emploie à détermination des groupes de l'involution sur un support à l'aide des faisceaux de courbes ou de surfaces, qui possèdent quelquesuns des points fondamentaux sur le dit support.

10. Quand la ligne Σ est une droite qui occupe une position générale, le réseau de coniques est du deuxième indice car le lieu (σ) de centres est une conique.

Supposons que Σ passe par exemple par le point s_2. Dans ce cas la droite Σ touche toutes les coniques et nous obtenons un réseau ordinaire de coniques ayant quatre tangentes fondamentales S, T, U, Σ.

La conique (σ) des centres devient une droite (ou proprement dit, elle se décompose), qui passe par σ_2 et par le point d'intersection de la droite T' avec la jonction du point q et du point d'intersection des lignes T, Σ.

Quand nous considérons une droite arbitraire passant par s_1 comme la cinquième tangente d'une conique du dit réseau, cette tangente rencontre T en un point qui détermine avec σ_1 une droite rencontrant la droite (σ) en le centre de la conique déterminée par la cinquième tangente.

Nous avons ainsi trouvée une construction très simple du centre d'une conique d'un réseau ordinaire, quand la droite des centres est tracée. Il est clair que les points s_1, s_2 se présentent directement

11. Supposons que la courbe Σ du $n^{ième}$ ordre possède un point multiple d d'ordre m. Au point d correspond d'une part une droite ds_1 ou D_2 et de même une droite Δ_1 et de l'autre part correspond à ce point une droite D_1 et une droite Δ_2. La droite D_2 rencontre Σ outre le point d encore en $(n-m)$ points qui fournissent $(n-m)$ droites Δ'_2 et ces droites rencontrent Δ_1 en $(n-m)$ points δ. Seulement sur la droite se trouvent, en général, n points distincts du point σ_2 qui est multiple d'ordre n. De là suit que le point d'intersection δ des droites Δ_1, Δ_2 est multiple d'ordre m.

Nous voyons donc que

A chaque point multiple d'ordre m de la courbe proposée Σ correspond un point multiple du même ordre sur la courbe (σ).

Quand la droite D_2, menée par le point s_1, touche la courbe Σ, les points infiniment voisins du point de contact d se trouvent

sur le même côté de cette tangente. A la droite D_2 correspond une seule droite Δ_1 et les points δ correspondant aux dits points infiniment voisins jouissent de la même propriété et se trouvent de même sur l'un côté de la droite Δ_1. Or, quand la droite D_2 touche la courbe Σ_1 en un point d, la droite $\sigma_1\delta$ touche la courbe (σ) en le point δ.

Ainsi

Aux tangentes de la courbe Σ, issues des points s_1, s_2, correspondent les tangentes de la courbe (σ), menées des points σ_1, σ_2.

12. Revenons à la construction du point z^u dérivé d'un point donné z de la courbe Σ. La droite qui le joint au point s_1 rencontre U en un point z_2^u. La jonction zs_2 des points z, s_2 rencontre U en z_1^u. Les droites $s_1z_1^u$, $s_2z_2^u$ se rencontrent en le point demandé z^u. Les quatre droites s_1z, s_2z, $s_1z_1^u$, $s_2z_2^u$ ainsi obtenues forment un quadrilatère complet. Les droites U, s_1s_2 sont les diagonales de ce quadrilatère. La troisième est la droite zz^u qui rencontre les deux premières respectivement en les points z', v qui sont harmoniquement conjugués par rapport aux points z, z^u.

Supposons que nous avons obtenu le point z^t par rapport à la droite T par la même manière. La droite z^tz^u est tangente à une courbe enveloppe (D) et rencontre la droite U en un point ζ^u. Quand nous projettons de ce point les points harmoniques z, z', z^u, v sur la droite vz^t, le point v se projette en lui même, et les projections des points z', z^u, z sont respectivement ζ', z^t, ζ. Nous avons ainsi obtenus de nouveau les points coujugués harmoniques ζ', v par rapport aux points z^t, ζ.

Quand la droite z^tz^u tourne autour du point z^t, les points v, z^t restent fixes et de même le point ζ', parce que le point z' est assujeti de parcourir la droite U. De là suit que le point ζ est fixe.

Pendant la rotation de la droite z^tz^u autour du point z^t, le point z change de position et il n'est pas situé, en général, sur la courbe Σ, seulement il faut qu'il se trouve sur la droite $\zeta\zeta^u$. Quand nous employons la même construction quand à la droite T, nous obtenons un point ζ_1 qui jouit de la même propriété comme le point ζ. La droite $\zeta_1\zeta^t$ contient le point z qui correspond à la position de la droite z^tz^u. Les droites $\zeta\zeta^u$, $\zeta_1\zeta^t$ se rencontrent donc en le point z qui se trouve, en géneral, hors de la courbe Σ. S'il vient d'être placé sur cette courbe, il devient le point qui offre la tangente de la courbe (D). Le nombre de points z situés sur Σ est en même

temps le nombre de tangentes issues du point z^t à la courbe (D). Cherchons le lieu du point z.

La droite $z^t z^u$ pivote autour du point z^t et engendre sur les droites T, U les séries (ζ^t), (ζ^u) qui sont projectives et déterminent une conique Z rencontrant la courbe Σ en les points cherchés z qui présentent les tangentes du (D) passant par z^t. La courbe Σ étant d'ordre n, elle rencontre donc la conique Z en $2n$ points.

De là suit le théorème suivant:

Les droites D d'un réseau de coniques du $2n^{ième}$ indice enveloppent une courbe (D) de la classe $2n$.

Il est clair que à un point c^t de la courbe (c^t) correspondent $2n$ points c^u sur (c^u). En prenant l'un de ces $2n$ points c^u, nous abtenons un groupe de points sur (c^t) entre lesquels se trouve aussi le point choisi c^t. Nous obtenons ainsi un système symétrique du $2n^{ième}$ ordre sur deux courbes dont chacune est du $n^{ième}$ ordre. La courbe directrice (D) de ce système est de la classe $2n$.

Si le point z était en une position générale vers la courbe Σ, nous pourrions construire la conique Z par la même manière, savoir nous menons les droites zv, $z\tau$ par le point z. Le point ζ est conjugué harmonique du point z par rapport au point v et ζ', qui est le point d'intersection de la droite U avec vz. De même quant au point ζ_1.

13. Considérons le point d de Σ, qui se trouve sur la droite $s_1 TU$ au $s_1 r$. Quand nous joignons le point d aux points s_1, s_2 par les droites, le point d_2^n de rencontre des droites ds_1, U se trouve en r qui est le point d' intersection des droites T, U. Les droites $s_1 d_1^u$, $s_2 d_2^u$ se rencontrent en un point d^u qui est situé sur la droite rs_2. Nous pouvons démontrer, par la même manière, que le point d^t se trouve sur la même droite rs_2 qui est, par conséquent, une tangente de la courbe (D).

Seulement la droite rs_1 rencontre Σ en n points d dont chacun a les points correspondants sur la droite rs_2. De là suit que là droite rs_2 est une tangente multiple de la courbe (D). Nous trouvons, par un raisonerement semblable, que la droite rs_1 est de même une tangente multiple d'ordre n de la courba (D). Ainsi

Les droites qui joignent les points s_1, s_2 au point d'intersection r des droites T, U sont multiples d'ordre n de la courbe (D).

Il suit de là que les droites rs_1, rs_2 sont les seules tangentes de la courbe (D), qui passent par la point r.

14. Les points m^r, m^u, derivés du point de rencontre m de la courbe Σ avec la droite s_1s_2, sont situés sur cette droite qui est, par conséquent, une tangente de la courbe (D). La courbe Σ étant d'ordre n, elle rencontre la droite s_1s_2 en n points, qui est donc une tangente multiple d'ordre n de la courbe (D).

Ainsi

Les côtés du triangle rs_1s_2 sont les tangentes multiples d'ordre n de la courbe (D).

15. Dans l'article 12, nous avons construite la conique Z afin que nous puissions déterminer la classe de la courbe (D).

Quand la droite z^tz^u qui pivote autour du point z^t passe par le point r, ce point appartient à la conique Z. La droite $\zeta\zeta_1$ rencontre les droites T, U respectivement en les points m, n. Quand la droite mobile passe successivement par ces points, les points ζ, ζ_1 se trouvent sur la conique Z. De plus, quand la droite z^tz^u passe par s_1, le point correspondant de la conique Z est situé en s_2, et inversement. La conique Z passe donc par les points ζ, ζ_1, r, s_1, s_2, dont les trois derniers sont fixes. A l'aide de cette propriété nous pouvons déterminer la classe de la courbe (D), quand la courbe Σ occupe des positions singulières vers les points s_1, s_2, r.

16. Supposons que la courbe Σ possède en s_1, s_2 les points multiples respectivement d'ordre k, l. Dans ce cas, la conique Z rencontre Σ en $(2n-k-l)$ autres points qui présent autant de tangentes issues du point z (auquel correspond la conique Z) à la courbe (D). Nous voyons ainsi que la courbe (D) est de la classe $(2n-k-l)$. Elle s'abaisse de $(k+l)$ unités ou, en d'autres termes, la courbe (D) se décompose en des parties que nous allons déterminer comme il suit.

Supposons que le point d pendant son mouvement sur la courbe Σ vient dans la position s_1. La droite ds_1 touche la courbe Σ en s_1 rencontrant T en d_2^t et U en d_2^u. La droite ds_2 coïncide avec s_1s_2 et coupe les droites T, U respectivement en les points d_1^t, d_1^u. Il est clair que les droites $s_2d_2^t$, $s_1d_1^t$ se rencontrent en s_2, qui est par conséquent d^t. De même les droites $s_2d_2^u$, $s_1d_1^u$ offrent s_2 comme le point d^u.

La courbe Σ rencontre la droite s_1s_2 en $(n-k-l)$ autres points. De là suit que cette droite s_1s_2 est une tangente multiple d'ordre $(n-k-l)$ de la courbe propre (D).

Les points d^t, d^u étant réunis, la tangente d^td^u de la courbe $D)$ est indéterminée et engendre un faisceau qui a son centre en s_2.

Ce point fait donc partie de la courbe (D). Puisque le point s_1 est multiple d'ordre k sur Σ et offre chaque fois le point s_2, il suit de là que s_2 est une partie multiple d'ordre k de la courbe (D). Par la même manière nous pouvons déduire que le point s_1 est une partie multiple d'ordre l de la dite courbe, le point s_2 étant multiple d'ordre l sur Σ.

La droite rs_1 rencontre la courbe Σ en $n-k$ autres points. Il s'ensuit que la droite rs_2 est une tangente multiple d'ordre $(n-k)$ de la courbe (D) et une tangente multiple d'ordre k de la partie s_2 qui est, comme nous avons vu, de la classe k. La droite rs_1 est une tangente multiple d'ordre $(n-l)$ de la courbe propre (D) et d'ordre l de la partie s_1.

17. Supposons enfin que la courbe Σ est douée d'un point multiple d'ordre m en le point r. Les points correspondants r^t, r^u à ce point se confondent en lui même. La droite $r^t r^u$ ou D devient indéterminée et forme le faisceau (r). Le point r est en effet une partie multiple d'ordre m de la courbe (D).

Nous voyons donc que la courbe propre (D) de l'article précédent se décompose de nouveau en deux parties dont l'une est le point r et l'autre est la courbe (D) de la classe $(2n-k-l-m)$, car la conique Z, passant par les points s_1, s_2, r, rencontre la courbe Σ en $(2n-k-l-m)$ autres points.

De plus, la droite rs_1 est une tangente multiple d'ordre $(n-l-m)$ et rs_2 est une tangente multiple d'ordre $(n-k-m)$ de la courbe propre (D). Quand nous considérons la courbe entière (D), les droites rs_1, rs_2, s_1s_2 sont les tangentes multiples d'ordre n de cette courbe.

Nous avons donc le théorème:

Quand la courbe Σ possède en s_1, s_2, r les points multiples respectivement d'ordre k, l, m, la courbe enveloppe (D) se décompose en quatre parties, savoir: en une courbe propre de la classe $(2n-k-l-m)$ et en trois points s_2, s_1, r qui sont multiples respectivement d'ordre k, l, m.

18. A un point d de la courbe Σ correspond une seule droite D qui rencontre les droites D_1, D_2 au ds_2, ds_1 respectivement en les points δ_1, δ_2. Quand le point d parcourt la courbe Σ, le point δ_1 engendre une courbe (δ_1) dont l'ordre nous allons déterminer.

La droite D engendre un faisceau d'ordre $2n$ et la droite D_1 forme un faisceau d'ordre n dont la rélation est bien connue. Le

produit de ces deux faisceaux devrait être du $3n^{ième}$ ordre; seulement il faut faire réflexion sur la circonstance suivante.

Les points dérivés du point d'intersection m de la droite $s_1 s_2$ avec Σ se trouvent, selon la construction, sur la droite $s_1 s_2$. En joignant le point m au point s_2, le rayon M_1 du faisceau (D_1) coïncide avec la droite M au $s_1 s_2$. Puisque la droite $s_1 s_2$ rencontre Σ en n points, il s'ensuit que n rayons du faisceau (D_1) se confondent avec n droites du faisceau (D). Ces deux faisceaux ont donc n rayons communs et engendrent, par conséquent, une courbe d'ordre $2n$. La courbe (δ_2) est de même du $2n^{ième}$ ordre.

19. Considérons le point d'intersection n de la droite rs_1 avec la courbe Σ. La droite correspondante N est rs_2 et le rayon correspondant ns_2 du faisceau (s_2) rencontre rs_2 en s_2. Ce point appartient donc à la courbe (δ_1). Il y a n points n; d'où il suit que s_2 est un point multiple d'ordre n sur la courbe (δ_1).

Le point de rencontre de la droite rs_2 avec Σ soit désigné par o. Sa droite correspondante O coïncide avec rs_1. Le rayon os_2 du faisceau (s_2) rencontre rs_1 en r qui appartient à la courbe (δ_1); il est son point multiple d'ordre n_1 parcequ'il y a n points o.

La courbe (δ_1) ayant en r, s_2 les points multiples d'ordre n, elle ne rencontre plus la droite rs_2.

20. Considérons maintenant le cas quand la courbe Σ possède en s_2, r les points multiples d'ordres l, m.

La droite rs_1 rencontre Σ en les points dont un soit x. Sa droite correspondante X se confond avec la droite rs_2. Quand le point x se trouve en r, le rayon X_1 du faisceau (s_2) coïncide avec X et rencontre la dans toute son étendue. De là suit que la droite rs_2 est une partie multiple d'ordre m de la courbe (δ_1).

La droite rs_1 rencontre Σ en $(n - m)$ points différents du point r, qui offrent le point s_2. Ce point est donc multiple d'ordre $(n - m)$ sur la courbe propre (δ_1).

Considérons la droite rs_2. Elle rencontre Σ en y. La droite correspondante Y de ce point vient de ce confondre avec rs_1. Cette droite rencontre Y_1 ou ys_2 en r qui appartient à la courbe (δ_1). Le point s_2 étant multiple d'ordre l sur Σ, selon la supposition, nous obtenons $(n - l)$ points y. De là suit que le point r est multiple d'ordre $(n - l)$ de la courbe (δ_1).

Quand le point y ce trouve en s_2 qui est multiple d'ordre l, les droites Y forment le faisceau (s_1) d'ordre l, qui rencontre la

droite rs_2 en une série de points, qui est, par conséquent, une partie mnltiple d'ordre l de la courbe (δ_1).

La droite rs_2 est donc une partie multiple d'ordre $(l+m)$ de la courbe (δ_1) dont la seconde partie est une courbe propre (δ_1) ayant en r, s_2 les points multiples respectivement d'ordre $(n-l)$, $(n-m)$.

Quant à la courbe (δ_2), s_1 étant un point multiple d'ordre k sur Σ, nous obtenons une courbe propre d'ordre $(2n-k-m)$ aya, en r, s_1 les points multiples d'ordre $(n-k)$, $(n-m)$.

21. En réunissant tous les résultats obtenus dans le cas général, nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Quand nous faisons choisir entre les coniques, données par trois tangentes fixes S, T, U, celle qui touche les deux droites issues d'un point arbitraire d d'une courbe Σ d'ordre n aux deux points fixes s_1, s_2 pris à volonté sur l'une des tangentes fixes, la conique (d) ainsi choisie engendre un réseau du $2n^{ième}$ indice, quand le point d parcourt la courbe Σ.

Le lieu des centres des coniques de ce réseau est une courbe (σ) du $2n^{ième}$ ordre douée de trois points multiples d'ordre n.

Les droites polaires des points d par rapport à leurs coniques correspondantes (d) du réseau enveloppent une courbe (D) de la classe $2n$ douée de trois tangentes multiples d'ordre n, savoir: les droites qui joignent les points s_1, s_2 avec le points d'intersection r des autres tangentes fixes, et puis la droite $s_1 s_2$.

Les points d'intersection de ces droites polaires avec les coniques correspondantes (d) se trouvent sur deux courbes du $2n^{ième}$ ordre, dont l'une a en s_1 et l'autre en s_2 et toutes les deux en r les points multiples d'ordre n.

22. Quand la courbe Σ possède en s_1, s_2, r les points multiples respectivement d'ordre k, l, m, le théorème précédent prend la forme.

Quand nous faisons choisir entre les coniques, données par trois tangentes fixes S, T, U, celle qui touche les deux droites issues d'un point arbitraire d d'une courbe Σ d'ordre n aux deux points fixes s_1, s_2, pris à volonté sur l'une des tangentes fixes, pendant que la courbe Σ possède en s_1, s_2 et en le point de ren-

contre r des autres tangentes fixes les points multiples respectivement d'ordre k, l, m, la conique (d) ainsi choisie engendre un réseau du $(2n-k-l-m)^{ième}$ indice, quand le point d parcourt la courbe Σ.

Le lieu des centres des coniques de ce réseau est une courbe propre d'ordre $(2n-k-l-m)$ douée de trois points multiples d'ordres $(n-l-m)$, $(n-k-m)$, $(n-k-l)$; et puis trois droites qui sont multiples d'ordres k, l, m*).

Les droites polaires D des points d par rapport aux coniques correspondantes du réseau (d) enveloppent une courbe propre (D) de la classe $(2n-k-l-m)$ et trois points s_1, s_2, r qui sont multiples respectivement d'ordre l, k, m.

Les points d'intersection des droites polaires D avec leurs coniques correspondantes (d) ce trouvent sur deux courbes; l'une, par rapport à r, s_2, se dé compose en une courbe propre (δ_1) d'ordre $(2n-l-m)$ et en la droite rs_2 multiple d'ordre $(l+m)$; la seconde, par rapport à r, s_1, se décompose aussi en une courbe propre (δ_2) d'ordre $(2n-k-m)$ et en la droite rs_1 multiple d'ordre $(k+m)$.

21.

Über den Lichtwechsel einer Anzahl von Sternen

aus der Bonner Durchmusterung und aus den Katalogen rother Sterne von Schjellerup und Birmingham.

Vorgelegt von Prof. Dr. **A. Šafařík** am 21. Mai 1886.

Seit vier Jahren habe ich eine Anzahl Sterne aus den genannten Katalogen systematisch auf Lichtwechsel geprüft; andere habe ich bei verschiedenen Gelegenheiten in Helligkeit von früheren Angaben abweichend gefunden, und sie den vorigen angeschlossen. Für einen Theil dieser Sterne genügen meine bisherigen Beobachtungen zum Nachweise der Veränderlichkeit oder Unveränderlichkeit; andere muss

*) Voir la Note de M. M.-N. Vaněček: O lineárných konstrukcích rationelných křivek rovinných všech stupňů. — 11. února 1882.

ich noch länger verfolgen, und gedenke später über sie zu berichten. Kürze halber will ich hier nicht die Originalbeobachtungen, sondern nur die aus ihnen abgeleiteten Helligkeiten sammt jenen der Vergleichsterne mittheilen.

Bis März 1885 benützte ich einen 32mal vergrössernden Reflector mit Silberglasspiegel von 16^{cm} Öffnung und 1^{0} Feld (aequivalent einem Achromaten von 13^{cm}), später einen Achromaten von 12^{cm} Öffnung 23 Vergr. 1^{0} 30′ Feld. Die Beobachtungsmethode war die Argelandersche, einseitige Vergleichungen wurden ausgeschlossen, mitunter Controllehalber mit zwei Sternpaaren verglichen. Bei stark gefärbten und wenig veränderlichen Sternen kann nur grosse Sorgfalt entscheidende Ergebnisse liefern; blosse Grössenschätzungen nach einer im Kopfe festgehaltenen Scala oder einseitige Vergleichungen führen hier zu nichts. Birmingham's Grössenschätzungen desselben Sternes variiren um ganze Grössenclassen in Fällen, wo ich nur wenige Zehntel oder gar keine Änderung constatiren konnte.

DM. $+ 41^{0}{\cdot}521$ ($7^{m}{\cdot}2$) *AR.* 2^{h} 33^{m} $17^{s}{\cdot}6$ *D* $+ 41^{0}$ $48'{\cdot}2$ (*1855·0*).

Steht im Sternhaufen M. 34 (Perseus), fiel mir 1885. 1.12 als stark gefärbt auf (durch Nebel), und wurde bis 1885. 12.30 an 8 Abenden verglichen mit DM. $+ 41^{0}{\cdot}495$ und 496 (beide $7^{m}{\cdot}3$). Die grösste Differenz der Schätzungen war 2 Stufen, und der Stern ist als unveränderlich zu betrachten. Die Färbung erschien mir später weniger lebhaft (eine häufige Erscheinung), im Mittel aus 6 Schäzzungen $5^{0}{\cdot}2$ (Schmidt'sche Scala). Alle folgende Farbenschätzungen beziehen sich auf Betrachtung im lateralen Felde — nicht fixirt; fixirt erscheinen mir gelbe und rothe Sterne weniger gefärbt, vergl. VJS. 18, 141. Gewöhnlich richte ich die Augenaxe 1^{0} bis 2^{0} (angular, also bei 23maliger Vergrösserung 3′ bis 5′) unterhalb des Sternes.

DM. $+ 18^{0}{\cdot}762$ ($9^{m}{\cdot}3$) *AR.* 4^{h} 49^{m} $22^{s}{\cdot}3$ *D* $+ 18^{0}$ $42'{\cdot}8$ Tauri.

Bei Helligkeitsvergleichungen der Vesta mit Sternen der DM. fiel mir der Stern als tiefgefärbt auf, und schien mir heller als in der Karte, weshalb ich ihn zwischen 1885. 12.28 und 1886. 3·24 an 6 Abenden mit $+ 18^{0}{\cdot}763$ und 765 verglich. Die Helligkeit blieb völlig constant $= 9^{m}{\cdot}0$, die Farbe ist tief gelbbraun $= 7^{0}{\cdot}9$ (3 Schätzungen).

Natürlich ist Lichtwechsel innerhalb längerer Zeiträume nicht ausgeschlossen, für stark gefärbte Sterne mir sogar wahrscheinlich,

wie mir namentlich DM. + 58°·439 beweist, für welchen ich soeben die Bearbeitung von 250 Beobachtungen aus den Jahren 1880—86 abgeschlossen habe. Dieselbe Bemerkung gilt für die folgenden analogen Fälle.

DM. + *18°·747* (*7m·8*) *AR 4h 45m 6s·3 D* + *18° 49′·4* Tauri.

Bei denselben Vergleichungen fand ich obigen Stern intensiv gefärbt; Vergleichungen mit + 18°·717 (8m·0) und 734 (7m·0) an 9 Abenden zwischen 1885. 12.31 und 1886. 4.1 ergaben regellose Schwankungen von 2 Stufen, somit Unveränderlichkeit. Farbe = 7c·2 (6).

DM. + *22°·832* (*9m·5*) *AR 4h 58m 55s·9 D* + *22° 10′·9* Tauri.

Bei denselben Vergleichungen wie oben vermisste ich den Stern:
1886. 3.9 sehr heiter, Mondschein, keine Spur von (832)
„ 3.24 a. o. „ = 11m·7 } bezogen auf Winnecke's
„ 3.28 heiter ≦ 12m·3 } Scala zu U Geminorum.
Später war ich durch meine örtliche Lage verhindert ihn nachzusehn. Nach gefälliger Privatmittheilung von Geh.-Rath Schönfeld in der Bonner Durchmusterung dreimal beobachtet:
1853. 10.25. Z. 233 = 9·5 }
1855. 1.19. Z. 610 = 9·5 } jedoch mit ziemlich discordanten Declinationen.
1855. 11.10. Z. 771 = 9·5 }
Chacornac hat hier einen Stern 12m der am besten der zweiten Declination (10′·8) entspricht. Es ist an starker Veränderlichkeit kaum zu zweifeln.

DM. + *9°·1228* (*8m·3*) *AR 6h 32m 9s·7 D* + *9° 26′·1* Monocerotis.

Bei Gelegenheit von Stufenvergleichungen der Juno im Winter 1883—84 fiel mir ein schön röthlicher Stern 8m nahe bei 15 (S) Monocerotis auf. Ich habe ihn an 8 Abenden mit nahen DM. Sternen verglichen, deren Positionen und Helligkeiten sind:

γ	DM. + 9°·1221 (8m·5)	Stufen 10
β	DM. + 9°·1224 (8m·0)	14
α	DM. + 9°·1222 (8m·1)	18
E	DM. + 9°·1244 (8m·1)	23
D	DM. + 9°·1228 (8m·3)	rubida

Beobachtete Helligkeiten:

1884.	2.24	= 16·6
	3.13	= 17·0
	11.11	= 19·0
1885.	2.13	= 18·0
	3.18	= 15·5
	12.30	= 15·0
1886.	3.9	= 11·5
	5.6	= 13·2

Also ein Lichtwechsel von 7 Stufen, etwa $8^{m}\cdot 1$ bis $8^{m}\cdot 5$, zugleich ein regelmässiger Gang der Zahlen, so dass mir die Veränderlichkeit kaum zweifelhaft ist. Die Periode, falls eine vorhanden, dürfte lang sein. Ich gedenke den Stern genauer zu verfolgen. Färbung $7^{0}\cdot 5$ (5).

DM. $+22^{0}\cdot$*1806* *(*$8^{m}\cdot 9$*)* *AR* $7^{h}\ 45^{m}\ 47^{s}\cdot 5$ *D* $+22^{0}\ 56'\cdot 1$ Geminorum.

Bei Beobachtungen von U Geminorum hatte ich eine Anzahl DM. Sterne in die Scala von Winnecke (Astr. Nach. 1120 vol. 47) eingeschaltet, darunter obigen von mir mit *E* bezeichneten. Im April 1884 erhielt ich mit *E* grosse Abweichungen, und verglich ihn nun wiederholt mit $+22^{0}$ 1794, 1797, 1804, 1811 und $+23^{0}$ 1850, mit so schwankenden Resultaten, dass mir die Veränderlichkeit entschieden schien. Doch waren die Vergleichungen wegen Lichtschwäche der Sterne im lateralen Felde angestellt, daher minder sicher. Erst 1885. 4.11 fiel mir auf, dass *E* fixirt anfangs verschwand, dann sichtbar wurde, und langsam eine Maximalhelligkeit annahm, für mich sicheres Kennzeichen rother oder gelber Färbung. Vergleichungen (im centralen Felde) mit DM. $+22^{0}$ 1811, 1813, 1857 (*m*, *o*, *n* Winnecke) an 8 Abenden 1884. 4.11 bis 1886. 3.10 ergaben so gut wie völlige Constanz, grösste Schwankung 2 Stufen ($9^{m}\cdot 1$ bis $9^{m}\cdot 2$). Farbe dunkelbraungelb $7^{0}\cdot 9$ (2).

DM. $+35^{0}\cdot$*2038* *(*$9^{m}\cdot 5$*)* *AR* $9^{h}\ 33^{m}\ 2^{s}\cdot 9$ *D* $+35^{0}\ 51'\cdot 9$.

1886. 3.9 sah ich *R* Leonis minoris nach, und vermisste sofort in der nahen charakteristischen Constellation obigen Stern *(c)*, nur ein minimum visionis ($12^{m}\cdot 11$) tauchte zuletzt bei heiterem Himmel und schwachem Mondschein auf.

1886. 3.23 und 3.31 ebenso
4.3 an der Stelle von *c* blinken zwei Sterne auf (das letztemal bestimmt nur einer) Dist. 3′ PW. 40^{0}, der südliche *c* etwas heller als der nördliche *d*,
4.7 noch deutlicher 2 Sterne da, die Hell.-Diff. grösser als neulich *c*2...3*d*,
4.21 es trübt sich ehe scharfe Vergleichung gelang; es muss *c*4...5*d* sein,
4.22 sehr heiter *c*5...6*d* 2...3*e*,
4.25 zu dunstig, *c* mehr als 5*d*,

5.6 $d > c$? Es wurde sofort undeutlich, leicht dunstig,
5.20 $c > d$,
5·22 $c6d$ }
5.23 $c8d$ ± } ausserordentlich heiter.

An der Veränderlichkeit ist nicht zu zweifeln.

Nach Mittheilung von Geh.-Rath Schönfeld in der BDM. so:

„1857. 1.17 Zone 1140 Sch. hat den Stern nicht, obwohl er an der Grenze noch facultativ vorkommen k ö n n t e.

1857. 2.15 Zone 1160 Sch. 9·5 m }
2.22 1178 „ } Alles deutlich."

J = *DM.* — 0°·2777 (9^{m}·5) *AR* 13^{h} 55^{m} 32^{s}·3 *D* — 0° 29′·4 Virginis.

Bei Stufenvergleichungen der Juno fand ich 1885. 4.12 *J* statt 9·5 m nur 11 m, und verglich ihn von nun an ab und zu mit zwei nahen feinen Sternen, deren Helligkeiten im Mittel aller Beobachtungen α = 16·3, β = 10·0

1885. 4.14 sehr heiter. *J* unsichtbar,
4.17 ausserord. heiter. *J* vielleicht etwas leichter sichtbar als 4·12,

	4.18 ☽	*J* = 12·8 ± Stufen,
	4.19 ☽	13·9
	4.21 ☽	12·4
	5.7	11·8 ±
	5.12	12·6
	6.0	12·2
1886.	4.1	12·6
	4.22	12·7
	4.26	12·7
	5.5	12·0

5.6 Nach Vergleichung mit feinen Sternen von bekannter Grösse schätze ich *J* = 10^{m}·8
5.22 *J* 12·5 Stufen.

Der Stern ist demnach 1½ Grössen schwächer als in der DM., ohne jedoch während der Dauer der Beobachtungen erheblichen Lichtwechsel zu zeigen.

x = *DM.* + 19°·2764 (9^{m}·5) *AR* 14^{h} 5^{m} 7^{s}·8 *D* + 19°47′·8 }
y = *DM.* + 19°·2773 (9^{m}·5) *AR* 14^{h} 7^{m} 53^{s}·1 *D* + 19°48′·8 } Bootis.

1885. 5.3 sah ich bei aoh. Himmel Baxendell's *T* Bootis nach,

von welchem keine Spur zu sehn war, aber auch der nahe DM. Stern x 9·5 m fehlt total.

1885. 5.5 sehr heiter, nicht nur von x sondern auch von y ist keine Spur zu sehn, selbst wenn α Bootis aus dem Felde gerückt ist.

5.6 wie gestern, aber leicht dunstig, α Bootis hat einen grossen hellen Hof,

5.12 *Txy* fehlen,

5.16 *Tx* fehlt, für y Himmel zu hell und matt. Vollmond, leicht dunstig,

5.19 *Txy* fehlt. Vollmond, sehr heiter,

5.22 *Tx* fehlt, von y vielleicht eine Spur. ☾ niedrig, ausserordentlich heiter,

5.22 *Tx* keine Spur, y deutlicher als gestern aufgeblickt. aoheiter,

5.25 x Spur, y nicht sicher erblickt,

6.1 y keine Spur, x deutlich gesehen 12^m.

Nach Mittheilung von Geh.-Rath Schönfeld sind beide Sterne in der BDM. beobachtet 1855. 3.16 Z. 637 und 1885. 5.9 Z. 674, völlig übereinstimmend, aber x später als fehlend bezeichnet: „Alles deutlich. In Zone 654. Kr. 1855. 4.18 kommt von beiden Sternen nichts vor, die Zone ist aber unvollkommen.“ An Veränderlichkeit ist kaum zu zweifeln.

$H =$ DM. $+ 2^0 \cdot 3473$ $(8^m \cdot 0)$ AR 17^h 56^m $7^s \cdot 5$ D $+ 2^0$ $30' \cdot 5$ } Ophiuchi.
$G =$ DM. $+ 2^0 \cdot 3474$ $(9^m \cdot 2)$ AR 17^h 56^m $14^s \cdot 0$ D $+ 2^0$ $20' \cdot 2$ }

Beim Aufsuchen eines von Herrn von Gothard gesehenen aber später nicht auffindbaren rothen Sternes zwischen 67 und 70 Ophiuchi (Public. d. Obs. zu Herény I. 53), der vielleicht Sj. 206 gewesen sein könnte, konnte ich zwar ebenfalls nichts rothes finden, legte aber die Helligkeit von zwei dort situirten DM. Sternen fest. Der schwächere G schien mir bald Lichtwechsel zu zeigen, der hellere H nicht; doch verfolgte ich beide seither. Erst vor wenigen Tagen berechnete ich die Beobachtungen, und fand zu meiner Genugthuung, dass beide schwach aber entschieden veränderlich sind, namentlich H.

Vergleichsterne

d	= DM. + $3^0 \cdot 3557$	$(9^m \cdot 0)$	Stufen	10·0
n	$3^0 \cdot 3558$	$(8^m \cdot 5)$		13·0

m = DM. + 3°.3564	($8^{m}.2$)	Stufen	16·7
l	3°.3572	($8^{m}.2$)	20·2
k	3°.3565	($8^{m}.2$)	22·2

Helligkeiten von *H*

1884.	8.6	○	15·3	1885.	11.2		15·7
	8.16		15·4	1886.	4.1		14·4
	9·12		13·6		4.26		17·9
	10·1	☽	14·3		5.3		17·4
	10.18		12·0		5.5		17·2
1885.	4.14		14·4		5.12	☽	16·6
	5.8		18·6		5.16	○	14·4
	5·20	☽	18·0		5.18	○	14·4
	6.4		15·4		5.19	○	14·4
	6.23	☽	17·2		5.20	○	14·1
	7.10		19·2		5.22	☾	14·1
	7.21	☽	15·4		5.25		15·3
	8.6		17·8		6.1		14·5

Aus diesen Werthen ergeben sich:

	Maxima	*C — O*	Minima	C — O
(0)	1885. 5.10 ±	0	6.8 ±	+1
(1)	7.6	—1	7.29 ±	+7
(6)	1886. 4.24	0		

von denen die ersteren durch die Formel

$$E\ Max = 1885.\ 5.10 + 58{\cdot}2\ E$$

mit den oben angeführten Differenzen dargestellt werden. Das (sehr unsicher bestimmte) Minimum folgt im Mittel 26 Tage nach dem Maximum. Der Lichtwechsel (7 Stufen zwischen $8^{m}.2$ und $8^{m}.8$) scheint ziemlich regelmässig zu sein; eine deutliche Färbung ist nicht erkennbar.

Dieser Stern vermehrt die wenig zahlreiche Classe von Veränderlichen mit Periode von mittlerer Dauer; zwischen 50 und 80 Tagen zählt Schönfeld's zweiter Katalog (1875) nur 3 Sterne:

R Scuti 71
S Vulpeculae 67
R Sagittae 70.

Der zweite Stern *G* zeigt ebenfalls entschiedenen Lichtwechsel von etwas über 7 Stufen, aber zur genaueren Erforschung desselben

sind die Beobachtungen nicht genügend; doch ergibt eine Curve ungefähre Minima:

1884. 8.2; 1885. 6.26; 1886. 4.24,

welche sich ungezwungen mit einer Periode von 105 Tagen vereinigen lassen ($C - O = +5, -8, +5$). Ich theile noch keine Beobachtungen mit, weil ich den Stern zu verfolgen beabsichtige, und später vollständigere Belege mitzutheilen hoffe. Auch *G* ist nicht erkennbar gefärbt, und interessant durch die Periodendauer (falls solche sich bestätigt), da Schönfeld's Katalog zwischen 80 und 110 Tagen keine Periode kennt, zwischen 110 und 140 eine einzige: *R* Vulpeculae 137 Tage.

M = Sj. 219 = Birm. 464 = DM. — 8°·4726 (7m·1)
AR 18h 42m 27s·8 D — 8° 4′·1 } *in* Scuto.

L = Sj. 222) c = Birm. 483 = DM. — 5°·4858 (7m·0)
AR 18h 56m 39s·6 D — 5° 53′·5 } *in* Aquila.

Diese beiden hellen intensiv rothen Sterne werden von Birmingham als variable? bezeichnet, ohne dass die mitgetheilten Grössenschätzungen zur Begründung dieser Bezeichnung ausreichen. Für *M* gibt Herschel im Cap-Katalog 9m, Birmingham 7m·2 bis 8m, Webb 9m·5, Dreyer 9m·5 (1mal und durch Wolken); für *L* Bessel (1823) 7m·5, Birmingham 7m·5, Dreyer 7m und 8m·5, Dunér 7m·3. Schönfeld hat *L* zwischen 1863 und 1872 einigemale mit einem Nachbarsterne verglichen, ohne Lichtwechsel zu bemerken (AN. 1905); dagegen Schmidt, der ihn 1872 Juli bis October fast allnächtlich verfolgte, fand sehr langsame Lichtabnahme, und meint die Periode scheine sehr lang zu sein (AN. 1912).

Ich habe beide Sterne seit August 1883 an 29 Abenden scharf verglichen. Die Vergleichsterne (für 1855 aus dem Bonner Sternverzeichnisse 4. Section) sind:

A	— 7°·4664	18h 34m 27s·7	— 7° 28′·3	7m·3
B	— 7°·4670	— 34m 47s·0	— 7° 12′·3	6m·2
C	— 6°·4859	— 36m 3s·1	— 6° 57′·1	6m·0
D	— 6°·4869	— 36m 52s·9	— 6° 40′·2	7m·0
γ	— 6°·4897	— 39m 23s·9	— 6° 2′·8	7m·0
β	— 6°·4913	— 40m 54s·2	— 6° 9′·6	7m·2
α	— 6°·4922	— 41m 55s·3	— 6° 4′·1	6m·8

Die Stufenwerthe sind (aus der ganzen Beobachtungsreihe):

γ	10·0	*A*	12·1
β	16·6	*B*	15·9
α	23·7	*C*	17·7
		D	20·8

Jene der zweiten Reihe beruhen auf weniger Vergleichungen und sind weniger sicher. *M* wurde während eines grossen Theiles der Beobachtungen mit Sternpaaren aus beiden Reihen verglichen, *L* nur gelegentlich; ausserdem verglich ich oft *M* direct mit *L*, was wegen der (für mein Auge) nahezu identischen Färbung beider sehr scharf geschehn konnte; ich halte daher meine Zahlen, die zum gr. Th. Mittel aus mehreren unabhängigen Vergleichungen sind, für etwas sicherer, als sonst im Durchschnitte bei so intensiv rothen Sternen. Die Vergleichung stark gefärbter Sterne mit wenig oder gar nicht gefärbten ist schwieriger und grösseren Fehlern unterworfen als jene ungefärbter: 1. weil disparate Eindrücke zu vergleichen sind; 2. weil gelbe und rothe Sterne nur langsam und nach wiederholtem Fixiren ihre Maximalhelligkeit annehmen, wobei das Auge angestrengt wird, ermüdet und sein sicheres Urtheil verliert. Zu Vergleichungen dieser Art ist ein gewisser Grad von Gewöhnung nöthig, und jedesmal wenn die Beobachtungen einige Zeit unterbrochen waren, fühlt man das erstemal nach der Unterbrechung eine Schwierigkeit des Urtheiles, wie sie bei ungefärbten Sternen nicht stattfindet.

Die beobachteten Helligkeiten (zusammengezogen in Monatmittel) sind:

	M	*L*	*L—M*
1883. 8.27	16·5		
9.3	16·5	18·5	+2·0
10·19	17·5 (3)	19·1 (3)	+1·6
11.29	16·4	21·6	+5·2
1884. 5.22	16·8	20·8	+4·0
6.26	18·1	19·6	+1·5
7.22	17·5	19·1	+1·6
8.9	18·7	18·9	+0·2
9.17	18·6 ±	18·1 ±	—0·5
1885. 4.17	14·4 (2)	18·1 (2)	+3·7
5.17	16·6 (3)	16·8 (2)	+0·2
6.11	17·3 (3)	18·4 (3)	+1·1
7.20	17·6 (2)	20·7 (2)	+3·1
8.4	16·0	19·1	+3·1
11.2	18.0	19·1	+1·1
1886. 5.3	16·4 (3)	22·2 (3)	+5·8
5.19	16·3 (3)	21·0 (3)	+4·7

Beide Sterne zeigen einen nicht unbedeutenden jedenfalls die Grenze der Beobachtungsfehler übersteigenden Lichtwechsel

M von 4 Stufen (etwa $7^{m}\cdot0$ bis $7^{m}\cdot3$)

L von 7 Stufen (etwa $6^{m}\cdot7$ bis $7^{m}\cdot2$)

auch zeigt sich ein deutlicher periodischer Gang, besonders auffällig in der Differenz der gleichzeitigen Helligkeiten, wobei noch zu bemerken, dass die aus unabhängigen Helligkeitsbestimmungen abgeleiteten *L*—*M* mit jenen aus directer Vergleichung meist innerhalb 1 Stufe stimmten. Wenn man jedoch obige Werthe graphisch construirt, so findet man sie zu lückenhaft um nähere Bestimmungen abzuleiten. Für *L* ist ein Maximum nach Anfang 1884 angedeutet, sowie ein Minimum ein Jahr später, also sehr langsamer Lichtwechsel; für *M* ist nicht einmal so viel auszumachen.

Die Helligkeiten von 1885 und 1886 zeigen viel grössere zufällige Fehler als jene von 1883—84. Dies kommt daher, dass ich 1883—84 einen Sucher von 8 cm verwendete, und erst als dieses sehr gute Instrument im December 1884 durch einen Unfall zerstört wurde, das Fernrohr von 12 cm. Letzteres gibt so hellen Sternen wie *M* und *L* zu viel Licht, und macht das Urtheil weniger sicher. Schon im Frühjahre 1883, als ich das Maximum von R Leonis durch drei Fernröhre verfolgte: den Reflector von 16 cm, den Sucher von 8 cm, und einen Sucher von 4 cm, fand ich, dass das kleinste Fernrohr die grössten Stufendifferenzen und die regelmässigste Lichtcurve gab. Es ist aus Versuchen von Aubert u. A. bekannt, dass die Empfindlichkeit des Auges für sehr kleine Helligkeitsdifferenzen jedesmal bei einer bestimmten absoluten Lichtstärke ihr Maximum erreicht, und von dieser aus nach beiden Seiten rasch abnimmt.

Die Färbung beider Sterne ist für mein Auge fast identisch

$$M = 7^{c}{\cdot}6 \ (13) \qquad\qquad L = 7^{c}{\cdot}7 \ (13)$$

Hr. Dunér macht *M* $8^{c}{\cdot}6$, *L* $9^{c}{\cdot}0$, also viel tiefer gefärbt, weshalb er wohl auch beide weniger hell sieht als ich: *M* $8^{m}{\cdot}0$, *L* $7^{m}{\cdot}3$; das Spectrum beider gehört nach D. zum Typus IV.

Birm. 442 = DM. $+38^{0}{\cdot}3164$ $(9^{m}{\cdot}5)$ *AR* $18^{h}\,19^{m}\,50^{s}{\cdot}8$ *D* $+38^{0}\,39'{\cdot}2$ Lyrae.

Von B. auf Grund einer Angabe des verstorbenen C. Burton „ruddy 8 m" eingereiht. Ich habe den Stern zwischen 1883. 6.30 und 1886. 4. 21 an 14 Abenden mit DM. $38^{0}{\cdot}3161$ $(9^{m}{\cdot}2)$ und $38^{0}{\cdot}3168$ $(9^{m}{\cdot}5)$ verglichen und unveränderlich $= 9{\cdot}4$ m gefunden; die grösste Schwankung war 1·4 Stufe. Von Färbung konnte ich nichts merken; sie muss unbedeutend sein, weil mir entschieden rothe Sterne dieser Helligkeit fixirt sichtbar bleiben, was bei B. 442 nicht der Fall ist. Vergl. unten B. 459. Nicht wenige Sterne des Birmingham'schen Kataloges sind ganz unbedeutend gefärbt, und verdanken ihre Ent-

stehung vielleicht nur den Eigenheiten des Farbensehns verschiedener Beobachter. Deshalb wäre es so wichtig, wenn sich die Beobachter von Sternfarben entschliessen wollten ihre Angaben wie J. F. Schmidt in Zahlen auszudrücken. Nicht einmal die Wortbedeutung der zur Beschreibung von Sternfarben verwendeten Ausdrücke ist immer unzweifelhaft,, indem einzelne Beobachter z. B. das Wort rothgelb für röthlichgelb, andere für gelblichroth gebrauchen.

s = *Birm. 448* = *DM. 36°·3168* ($8^m\cdot5$)	*AR* $18^h\,27^m\,19^s\cdot4$ *D* + $36°53'\cdot1$	Lyrae.
p = *DM. 36°·3178* ($9^m\cdot1$)	*AR* $18^h\,27^m\,56^s\cdot3$ *D* + $36°55'\cdot9$	

Nr. 448 zuerst 1876. 4.13 von B. gesehn und als tiefroth $8^m\cdot5$ bezeichnet (AN. 2092). Im Kataloge heisst es: „From several observations I conclude this star to be a Variable of short period between 8 and 9 mag.“ Ich habe den Stern seit Juni 1883 an 24 Abenden verglichen; 1884. 3.31 fand ich den ganz nahen p = DM. 36°·3178 ($9^m\cdot1$) ebenfalls tief roth gefärbt, und bezog ihn in die Vergleichungen mit ein. Endlich fand ich 1885. 4.19 auch m = DM. + 37°·3172 trüb roth und nahm ihn mit in die Vergleichungen auf. Es ist auffallend, dass Birmingham, Webb, Secchi und Dunér bei der Betrachtung von B. 448 die tiefe Röthe von 3178 nicht bemerkt haben.

Meine Vergleichsterne sind:

β	DM. 37°·3147	($9^m\cdot1$)	Stufen 10·0	*a*	DM. 37°·3156	($7^m\cdot8$)	Stufen 24·7
n	3188	($9^m\cdot0$)	13·0	*r*	3176	($7^m\cdot0$)	29·4
z	3155	($8^m\cdot5$)	14·5	*q*	36°·3202	($7^m\cdot2$)	33·9
α	3148	($8^m\cdot5$)	17·0	*k*	37°·3180	($7^m\cdot0$)	38·6
w	3173	($8^m\cdot0$)	20·5				

Beobachtete Helligkeiten:

		p	*s*	*m*	
1883. 6.30			34·4		
8.12			34·5		
1884. 3.31		13·2 ?	31·1		unsicher ob der rechte Stern
5.21		14·5 ?	35·0	13·0	
5.22		12·0	35·3		
7.3	☽		34·9		
7.4	☽	(8·3)	35·9		

		p	s	m	
1885.	4.19	12·0	32·9	15·7	
	4.20	11·9	32·7	16·0	
	4.21	11·9	32·3	15·7	
	5.12	11·6	28·5	(13·5)	möglicherweise Vergleich-
	6·7	10·9	28·7	(15·5)	sterne verwechselt
	6.14	11·1	32·9	16·4	
	7.22 ☽	11·9	35·3	14·2	
1886.	4.21 🌝	(7·5)	27·0		
	4.24	12·0	31·6		
	4.25	13·5	29·6		
	4·26	12·0	32·3		
	5.6	14	26·8	14·1	
	5.12 ☽	14·1	32·3	14	
	5.16 🌝		33·5		
	5.18 🌝		29·9		
	5.20 🌝		31·0		
	5.23		35·1		

Farbe von $s = 8^0{\cdot}1$ (9); nach Dunér $9^0{\cdot}0$ Spectrum III b.
$p = 9^0{\cdot}0$ (5)
$m = 8^0{\cdot}1$ (3)

Es hatten somit *m* und *p* während der Beobachtungsperiode constantes Licht innerhalb der Beobachtungsfehler: $p = 9{\cdot}0$ m, $m = 8{\cdot}8$ m, denn die abweichenden Werthe sind weniger sicher oder fallen mit starkem Mondlichte zusammen. Dagegen zeigte *s* unzweifelhaften Lichtwechsel von nahezu 9 Stufen, etwa zwischen 7·2 m und 7·8 m; doch ist für meine jetzige ungünstige Lage die jährliche Sichtbarkeitsperiode zu kurz, und aus obigen Beobachtungen lässt sich nichts Zusammenhängendes ableiten. Auch zeigt graphische Verzeichnung obiger Werthe grosse zufällige Fehler, wie bei der tiefen Färbung vorhinein zu erwarten war, und die Beobachtungen müssen sehr vervielfältigt werden, um zuverlässige Ergebnisse zu liefern. Die Beobachtungen von 1886 könnten für Birmingham's Annahme eines raschen Lichtwechsels zu sprechen scheinen, aber wenn man sie in Mittel zusammenzieht

1886.	4.24	30·1	(4)
	5.11	30·9	(3)
	5.20	32·0	(3)

so wird das Gegentheil offenbar. Minima zu Beginn 1884, im Juni 1885 und April 1886 erscheinen angedeutet. Ich hoffe in nicht all-

zuferner Zeit mein eigenes für diese Zwecke sehr günstig gelegenes Haus zu beziehn, und gedenke alsdann vorwiegend die für Prag circumpolaren Sterne unausgesetzt zu verfolgen.

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{c} A = DM.\ 36^{0}{\cdot}3240\ (9^{\cdot m}5) \\ AR\ 18^{h}\ 37^{m}\ 23^{s}{\cdot}7\ D + 36^{0}\ 48'{\cdot}2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{c} B = DM.\ 36^{0}{\cdot}3243\ (7^{m}{\cdot}5) \\ AR\ 18^{h}\ 37^{m}\ 48^{\cdot s}6\ D + 36^{0}\ 49'{\cdot}4 \\ = Birm.\ 458 \end{array}\right. \end{array}\right\}\ \text{Lyrae.}$$

Auch hier fand ich sofort knapp neben B. 458 einen zweiten tiefrothen Stern, dessen Farbe (wohl wegen seiner bedeutend geringeren Helligkeit) den Astronomen, welche die Röthe von B notirten (Webb, Birmingham, Dunér) entging.

Vergleichsterne:

r	36⁰·3256	$7^{m}{\cdot}5$	Stufen 28·5
l	36⁰·3239	$7^{m}{\cdot}0$	„ 21·1
p	36⁰·3261	$8^{m}{\cdot}3$	„ 13·9
q	37⁰·3228	$8^{m}{\cdot}1$	„ 10·0

Beobachtete Helligkeiten:

	A	*B*		*A*	*B*
1883. 6.30	—	25·5	1885. 7.22 ☽	—	23·8
8.12	11·3	—	11.17	11·9	23·5
1884. 3.31	13·2	19·5	1886. 4.21 🌕	12·6	21·7
5.20	—	24·6	4.24	11·5	23·7
5.21	11·7	24·1	4.25	12·5	24·6
7.3	12·7	24·2	4.26	12·5	23·7
1885. 4.19	10·0	17·3	5.6	13·0	24·1
4.20	11·2	17·7	5.12 ☽	—	24·2
4.21	10·9	18·9	5.16 🌕	—	26·0
5.12	11·9	18·3	5.18 🌕	—	23·7
6.7	12·2	23·7	5.20 🌕	—	24·0
6.14	11·9	20·0	5.23	(14·4)	24·2

Farbe von *A* = 7⁰·9 (13)
B = 7⁰·9 (16); Dunér 8⁰·5, Spectrum III b.

A zeigte während der Beobachtungsperiode nur regellose Lichtschwankungen von 3 Stufen, ist demnach mit Rücksicht auf Beob-

achtungsfehler als constant anzusehn. Dagegen zeigte *B* Lichtschwankungen von 8 Stufen (etwa 7·2 m bis 7·6 m) mit offenbarem Gange von langer Periode; der Stern ist demnach schwach veränderlich. Auch hier lässt sich über die Periode nichts sagen, als dass eine solche, falls vorhanden, lang sein wird; Minima zwischen 1883—84 und 1884—85 sind angedeutet; ihr Intervall würde etwas über ein Jahr sein, aber die Beobachtungen von 1886 bestätigen diese Annahme nicht, und nur fortgesetzte häufige Beobachtungen können uns mehr lehren.

Birm. 459 = DM. + 39°·3505 ($6^m·5$)
AR $18^h\ 38^m\ 27^s·0$ D + 39° 9′·5 } Lyrae.

Ist nach Webb und Birmingham orangenröthlich, nach Burton sehr roth; ich finde ihn nur hellgelb 5°·2 (14 Beobb.). Wurde zwischen 1883. 8.12 und 1886. 4.21 an 14 Abenden verglichen mit

DM.	+ 38°·3276	(7·0 m)	Stufen	10·0
„	+ 39°·3476	(6·5 m)	„	14·3

Die grösste Schwankung war nur 2 Stufen, der Stern ist als unveränderlich = 6·9 m anzusehn.

P Cygni = 34 Fl. Cygni.

Die Nova Cygni anni 1600, nach Baudet's Mittheilung (Comptes Rendus 81, 335) zuerst am 18. August 1600 gesehen als 3^m von Willem Janszon Blaeu; im 17. Jhdt. stark veränderlich und zweimal für mehrere Jahre dem blossen Auge verschwunden, seit etwa 1680 unverändert 5 m. Ich habe den Stern zwischen 1884. 7.22 und 1886. 5.22 an 19 Abenden (anfangs durch ein Opernglas von 25 mm später durch einen Sucher von 40 mm Öffnung) mit folgenden Sternen verglichen:

e = 35	Cygni	$(5·6)^m$	U. N. =	Stufen	14·3
c = 29	„	5^m	„	„	17·2
b = 28	„	5^m	„	„	19·1
λ	„	$(5·4)^m$	„	„	24·6

In den ersten Beobachtungen kommen Schwankungen von 5 Stufen vor, höchst wahrscheinlich in Folge von Verwechslungen der Vergleichsterne (wegen der stark wechselnden Lage der Constellation gegen den Horizont); seither ist der Stern so gut wie constant (grösste

Schwankung 19·2 bis 20·2, etwa 0·1 m). Die Farbe ist blassgelb 4°·4. Es ist mir fraglich, ob 34 Cygni Blaeu's Nova ist, oder ob nicht vielmehr die letztere nur **nahe** bei *P* aufleuchtete, und nunmehr längst verschwunden ist.

Sj. 251 = *Birm. 592* in Cygno.

Wurde von mir zwischen 1885. 4.14 und 1886. 5.22 an 15 Abenden verglichen mit

DM.	+ 37°·4404	$8^m{\cdot}0$	*b* = Stufen	10
„	+ 37°·4410	$7^m{\cdot}2$	*a*	14·4
	+ 37°·4427	$6^m{\cdot}3$	*d*	20·4
	+ 38°·4621	$6^m{\cdot}5$	*c*	21·9
	+ 37°·4407	$7^m{\cdot}8$	*M*	rubida

In Monatmittel zusammengefasst ergeben meine Vergleichungen:

1885. 4.17	*M* = 13·3	2 Beobb.		1885. 8.7	*M* = 13·9	1 Beobb.
5.27	16·3	2		12.31	16·1	1
6.12	14·6	4		1886. 5.13	14·4	3
7.16	13·5	2				

Die Einzelbeobachtungen stimmen durchaus über Erwarten, und wiewohl die Extreme nur 3 Stufen ($0^m{\cdot}4$) differiren, so ist doch ein regelmässiger Gang ersichtlich, und Lichtwechsel trotz der geringen Amplitude ziemlich wahrscheinlich; nur anhaltende häufige Beobachtungen können uns weiter führen. Der Stern ist etwas zu hell für das grosse Fernrohr, wie schon der grosse Stufenwerth ($7^0 = 1^m$) zeigt. Die Anwendung des Zöllnerschen Photometers würde vielleicht gestatten schärfere Vergleichungen zu machen, wenn man dem Photometersterne durch die colorimetrische Vorrichtung die mittlere Färbung des zu beobachtenden Sternes ertheilte. Diese finde ich für *M* (aus 20 Schätzungen) = 8°·0; Hr. Dunér macht sie 9°·5, Grösse $7^m{\cdot}8$, Spectrum III b. So intensiv kann ich die Färbung von *M* nicht ansetzen, weil mir dann für meine röthesten Sterne keine Scala mehr übrig bliebe; auch finde ich aus Farbenschätzungen im Jahre 1882 und früher, dass sich meine Farbenauffassung seither nicht geändert hat.

Für die in dieser Mittheilung aufgezählten Sterne scheint eine Bezeichnung durch Buchstaben noch nicht an der Zeit, mit Ausnahme von DM. + 2°·3473, welcher nach der üblichen Bezeichnungsweise *W* **Ophiuchi** zu nennen wäre. Dagegen möchte ich mir erlauben

über die Bezeichnung der Veränderlichen überhaupt einen Vorschlag zu machen.

Argelander hat 1855 (Über die Periode von *R* Virginis AN. Bd. 40 Nr. 959) zur Bezeichnung der veränderlichen Sterne die lateinischen Initialen von *R* an vorgeschlagen, und in Anwendung gebracht. Von den Buchstaben *A*—*Q* sah er ab, weil Bayer in seiner Uranometrie die cursiven Buchstaben *a*—*p* schon für kleinere Sterne verwendet hatte, von Initialen allerdings nur *A*. Damals konnte die Befürchtung nicht entstehn, dass die Buchstaben *R* bis *Z* nicht ausreichen würden; denn noch 1850 zählte Argelander (im III. Bde von Humboldt's Kosmos) nur 24 veränderliche Sterne auf; aber Hind's ekliptische Karten, noch mehr die Bonner Durchmusterung und die auf diese folgenden Arbeiten, haben die Sachlage rasch geändert.

Die Anzahl Veränderlicher betrug:		Zuwachs per Jahr:
1850 nach Argelander	24	5·9
1866 „ Schönfeld (1. Catalog)	119	
1875 „ „ (2. „) 143 sichere + 22 zweifelhafte =	165	5·1
1885 „ Pickering 190 sichere + 105 zweifelhafte =	295	13·0

und es ist zu erwarten, dass der fernere Zuwachs nicht langsamer vor sich gehn wird.

Hier reicht Argelander's Nomenclaturprincip nicht mehr aus, und früher oder später wird man über das an seine Stelle zu setzende einen Entschluss fassen müssen. Hr. Dr. Hartwig hat auf der Strassburger Versammlung der Astronomischen Gesellschaft 1881 vorgeschlagen (VJS. 16, 286), nach Erschöpfung der Buchstaben *R* bis *Z* (ein Fall, der in Virgo schon eingetreten ist) Combinationen derselben zu verwenden: *RR*, *RS*, *RT* . . . . *SS*, *ST*, *SU* . . . *TT*, *TU*, *TV* . . ., was im Ganzen 55 Bezeichnungen für jedes Sternbild gibt. Aber auch dieses Mittel ist nur ein beschränktes, und ich erlaube mir eine Bezeichnungsweise vorzuschlagen, die keiner Beschränkung unterliegt.

Es ist kein zwingender Grund vorhanden die Initialen *A* bis *Q* verloren zu geben. Dass Bayer in einigen Sternbilden die Initiale *A* und die Cursiven *a* bis *p* verwendet hat, ist kein solcher, denn: 1. sind diese Buchstaben niemals allgemein worden, und seit Flamsteed's Katalog so gut wie obsolet; 2. ist es leicht jede Verwechslung mit Bayer's Buchstaben zu vermeiden. Ich schlage vor die

Veränderlichen mit den Initialen *A* bis *Z* zu bezeichnen, jedesmal mit angehängten cursivem *v* (variabilis), also *Av*, *Bv*, *Cv* ... *Zv*, und nach Erchöpfung dieser Reihe von vorne anzufangen mit Zusatz einer Ordnungszahl: *A2v*, *B3v*, *C4v* ..... *Z20v*. Da das lateinische Alphabet (*I* und *J* als einen Buchstaben betrachtet, was sich aus naheliegenden Gründen empfiehlt) 25 Buchstaben hat, so gibt diese Bezeichnung sofort auch die Zahl der in jedem Bilde bereits bekannten Variablen an. Da es ferner keinen Grund gibt nicht bis *Z100v* zu gehn, ebenso wenig als bei kleinen Planeten eine Bezeichnung wie (254) als unpassend erachtet wird, so bietet sich die Möglichkeit dar in jedem Sternbilde durch fünf Zeichen 2500 Variable zu bezeichnen, was wohl für Jahrhunderte ausreichen dürfte. Man könnte einwerfen, eine blosse Zahl z. B. V (213) genüge auch, aber obige Bezeichnung scheint mir anschaulicher zu sein und für das Gedächtniss mehr Anhalt zu bieten.

Erst, wenn dieser Vorschlag überhaupt irgend Anklang findet, wird es an der Zeit sein zu erörtern, ob auch die schon benannten Variabeln neu zu bezeichnen wären, oder aber ihre alte Bezeichnung zu behalten hätten.

22.

Zur geologischen Geschichte der europäischen Fischfauna.

Vorgetragen von Prof. Dr. **J. Palacký** am 4. Juni 1886.

Der Vortragende skizzirte kurz die heutige Fischverbreitung in Europa nach den Breitenzonen (Salmoniden, Cypriniden und Cyprinodonten d. h. Mittelmeergegend) als Regionen des Festlandes, nordische, britische, lusitanische und Mittelmeerregion des Meeres (Forbes) und Längszonen — atlantische, mitteleuropäische und mediterrane, und östliche (pontokaspische).

Er kam hiebei auf die Tiefseeforschungen der Neuzeit, die fast alle europäischen Grossstaaten, ja selbst Norwegen und Italien unternommen, und ihr bedauerliches Fehlen im südöstlichen Mittelmeer zu sprechen und drückte den Wunsch aus, dass eine österreichische Staatsexpedizion das Meer zwischen Italien, Griechenland und Egypten dem modernen wissenschaftlichen Standpunkt gemäss untersuche, wozu ja die österreichische Marine und die österreichischen Forscher voll-

kommen sich eignen und dass dies von den Wiener gelehrten Gesellschaften unterstützt werden möge — wie es bei den Expedizionen im Adriatischen Meere so oft geschehen.

Zur Begründung dieses Wunsches skizzirte er kurz, wie man sich nach Günther und Sauvage die bisherige geologische Geschichte der europäischen Ichthys vorstellt. Er erwähnte die zahlreichen Lücken unserer Kenntniss von den Conodonten angefangen. Doch scheine es, dass die in der ältesten Zeit best erhaltensten, wenn nicht zahlreichsten Fische, Küsten- und Schlammfische waren, wie es die heutigen Nachkommen der alten Ganoiden noch sind (Polypterus im Nilschlamm, Amia heisst in Nordamerika gerade zu Mudfish) — während doch noch auch andere Schlammfische (Mugil, Gobius — bei uns Cobitis) vorkommen. Die mesozoischen Selachier dürften die ersten (erhaltenen) Hochseefische gewesen sein, was ihre ungeheure Verbreitung erklärt, wo noch jetzt so viele Kosmopoliten vorkommen. So wie die süssen Gewässer überhaupt meist geologisch jünger sind, so sind auch die ausgesprochenen Süsswasserfische meist erst tertiär, dann aber gleichmässiger verbreitet als jetzt (Cobitiden in Nordamerika — Characinen im Londoner Thon (Agassiz), Cottiden in Aix und am Libanon, Pimelodus in Wyoming).

Er erwähnte nun der Ansichten über die geologische Geschichte des Mittelmeeres, und speziell die hier einschlägigen von Lartet und Sauvage. Schon Günther hatte auf die merkwürdige Ähnlichkeit des Mittelmeeres mit Japan einerseits*), Tasmanien und Neuseeland andererseits hingewiesen, die nur durch einen alten Zusammenhang der Meere erklärt werden kann. Als Beispiel wurde das genus Tripterygium gewählt, das zuerst nur im westlichen Mittelmeere bekannt war, bei Günther (Catalog) auch in Madeira, Neuseeland und bei Biliton aufgeführt wird, während es jetzt auch vom Rothen Meer (Klunzinger), Mauritius, Filipinen (Peters), Australien (2 bei M' Leay) bekannt ist.

Sauvage hatte (1873) zu diesem Behufe die Verbreitung von c. 1000 spec. studirt und beklagte sich über die Mangelhaftigkeit unserer Kenntnisse. Allerdings waren seine Studien eben auch ungenügend. So hätte er z. B. 1873 schon von dem durch Steindachner 1867 in

---

*) Bei ihm sind 22 spec. aufgezählt gegen nur 18 im westlich Atlantischen Meer (Antillen und US.), doch sind diese Ziffern jetzt sehr geändert; aus dem letzten hat Jordan et Gilbert (1882) schon mindestens 36 (je nach der Ansicht über die Identität der amerikanischen und europäischen Formen, z. B. bei Amodytes tobianus, Coryfaena equisetis).

der Wiener Akademie angekündigten Vorkommen von beiden in Madeira vorkommenden Beryxarten im Meere westlich von der iberischen Halbinsel (B. decadactylus bei Cuba (Day)) oder durch Nilson vom Beryx borealis Düben und Koren im Bergener Museum wissen können und sollen.

Allerdings konnte er die Daten nicht wissen, die z. B. Studer über die Ähnlichkeit der Fische Westafrikas und Ostamerikas (von 277 (der ersteren) 55 gemein), oder der Challenger über die Tiefseefische bei Japan bringt, wo von 19 sp. 4 mediterran sind.

Sauvage weist nun auf Typen des indischen Meeres im Mittelmeere hin, während z. B. Milne Edwards das Mittelmeer als eine Colonie des atlantischen Oceans annimmt. Sauvage führt nachstehende spec. zu seiner Unterstützung an: 1. Serranus cabrilla (S. 43) (Cuv. Val.) ein sehr alter Typus — schon vom Monte Bolca bekannt, sei bloss in der indischen westlichen Hochsee, im Mittelmeer und Schwarzen Meer, im Atlantischen Meere bloss an den Küsten von England und Frankreich — nicht in Westafrika. Es scheint ihm, dass diese spec. vom Mittelmeer nach dem Atlantischen Meere gedrungen sei. Nun hat schon Steindachner S. cabrilla an der ganzen iberischen Küste und in Tenerifa (schon bei Valenciennes) sogar sehr häufig gefangen und er (= novemcinctus Heer) kommt nach ihm in den Antillen und am Cap der guten Hoffnung vor, ja noch bei St. Paul.

Da ihn schon Günther (Catalog) von S. Cruz, Madeira, Antillen etc. und in England als gemein kannte, scheint dies Beispiel etwas unsicher, obwohl er im Schwarzen Meer nur an der Südküste vorkommt, und dort wohl eingewandert sein könnte — und Irland fehlt (Day), sowie den Us (Jordan).

Es fällt hiebei sehr ins Gewicht, dass Klunzinger den Fisch nicht im Rothen Meere kennt.

Noch unglücklicher ist das zweite Beispiel — Anthias oculatus Val. (bei Günther Martinique und Madeira), der zwar auch vom Monte Bolca (Sauvage id.) bekannt ist, aber weder bei Klunzinger noch bei Canestrini vorkommt (der nur den A. sacer aufführt — wie auch z. B. Guichenot (Algier Explor.) oder Betta (Heldreich) in Griechenland, noch bei Day (A. multidens Andamanen), Klunzinger etc. Es scheinen da spec. von ihm kontrahirt worden zu sein, die es sonst nicht wurden.

Besser gewählt sind die andern 5 spec. Caranx punctata, Seriola dumerilii, Auxis rochei, Coryphaena hippurus, Thynnus thunnina, wobei er allerdings S. 47 den pelagischen Charakter der wandernden Fami-

lien der Scomberiden und Carangiden erwähnt. Leider helfen auch diese sp. nicht viel.

3. Caranx punctata (Agasiz) (im Cataloge Günthers von N.-York und den Antillen, bei Troschel von den Capverden) scheint mit der C. dentex Val. = Vuna Geoffroy St. Hilaire, die vom Mittelmeer über Lanzarote, Madeira, St. Helena bis Neu-Orleans und Brasilien reicht, zusammengestellt zu sein. Nun hat Day keine dieser spec. im Indischen Meere unter seinen 26 sp. Caranx angeführt, noch Klunzinger im Rothen Meere unter seinen 21, noch Betta in Griechenland und Canestrini gibt bei C. dentex an: Nizza, Genua, Adriatisches Meer, selten.

Bei Seriola Dumerilii (Senegal, Sandwichsinseln) wurde auf Lütkens Spolia atlantica verwiesen (wie bei Coryphaena und Thynnus.)

Auxis rochei führt Günther eben so gut von Jamaika, wie von Amboina an (fehlt bei Day — aber in England, US, Zanzibar, Westaustralien.

Coryphaena hippurus, die allerdings im Indischen, Rothen und Mittelmeer vorkommt, ist wohl kosmopolitisch (wie es Sauvage selbst bei Exocoetus evolans zugibt), Mauritius, Cap, Japan, Cuba, Brasilien.

Thynnus thunnina ist allerdings ebenso indomalayisch als mediterran — auch bei den Seyschellen, US, Societätsinseln, Japan, Cuba, Brasilien.

Man sieht, dass die an und für sich geologisch ganz plausible Theorie Sauvages bessere Unterstützung bedürfte, die vielleicht durch eine bessere Kenntniss des südöstlichen Mittelmeeres geliefert würde.

Hingegen wurde darauf hingewiesen, dass die Familien der Libanonkreide noch heute im Mittelmeere leben, Clupeiden, Beryciden (durch Hoplostethus), Platax, Siluriden, Scopeliden, Spariden, Gobioiden etc. dass aber eigentlich die Fische von Mte Bolca es seien, auf die sich die Theorie Sauvages stützen müsse, sowie dass selbst die korallenliebenden Pomacentriden im Mittelmeere nicht ganz ausstarben (durch Heliases). Nun ist eine Gleichmässigkeit der Flora um das Nummulitenmeer schon von Saporta behauptet worden, die im Pliocen ihr Ende fand, es ist daher nicht auffällig, wenn z. B. mit den Korallen hier auch die Acanthuriden verschwanden und sich im korallenreichen Rothen Meer erhielten, wenn die brakwasserliebenden Syngnathiden (auch einst im Sarmatischen Meere) sich in Algier erhielten, wie die Gobiiden, Blenniiden, Atheriniden in einzelnen Flüssen und Seen Italiens etc.

Für Europa sei eine dreifache Ichthys wohl von der Kreide ab anzunehmen.

1. Die circumpolare — mit Nord-Amerika (und dadurch mit Nordostasien gemeinsame — die Heimath der Gadiden (Lota v. ist heute noch in Europa und Amerika), der Esociden, Gasterosteiden (die bis Centralafrika, China herabgingen), Salmoniden (die in die zweite Gegend hinabstiegen), Petromyzontiden — sowie der Discobolen, Lycodiden, theilweise Cottiden.

2. Die caspische Brakwasserfauna, die ins Schwarze Meer hineinreichte, aber von Centralasien stets geschieden war, die Heimath der Gobioiden, Acipenseriden, vor allem der europäischen Cypriniden, die im Westen von Europa stets abnehmen und sich im Westen und Süden (Spanien und Illyrien) in eigene Arten differenziren. Da Öningen bereits die meisten Formen unserer Cypriniden (Cobitis, Gobio, Tinca, Leuciscus, Chondrostoma, Aspius, Rhodeus) besitzt — neben dem nordischen Hecht und Cottus, dem südlichen Aal und Cyprinodonten, so muss die Vermengung beider Formen alt sein, wie ja schon in Aix Cottus und Aal neben Cyprinodonten vorkommen — und dürfte dies bereits in die Kreide hineinreichen, in die die Differenzirung der Teleostees fällt. Osmerus lewesiensis ist z. B. auch in Böhmen, Turkestan (Romanovski), O. eperlanus noch heut im Seligersee etc. Der Durchbruch des Schwarzen Meeres nach Südwest ist bekanntlich nach Kessler später.

3. Die stets tropische Ichthys des Mittelmeeres und westatlantischen Oceans, die schon in der Kreidezeit (wie Zittel (Sahara) darauf hinweist, z. B. Lamna texensis) mit der nordamerikanischen ebenso zusammenhing, wie jetzt und für die die Cyprinodonten die typische Familie bleiben, die nördlich der Alpen (z. B. in Öningen) mit der Eiszeit verschwand, im Südwesten sich erhielt.

Bezüglich des Zusammenhanges mit dem Atlantischen Meer wird — trotz der Ähnlichkeit der westafrikanischen Ichthys — auf die einstige Meerenge zwischen den Pyrenäen und der Auvergne darum hingewiesen, weil die Tiefseeforschungen im Golf von Biscaya, z. B. Mora mediterranea (in 1500 m Tiefe), Phycis mediterraneus (in 450 m — Travailleur), Gadiculus argenteus nachgewiesen haben, während die Strasse von Gibraltar wohl erst spät geöffnet wurde. Moreau giebt 32 sp. südfranzösischer Meeresfische an, die auch noch im Golf von Gascogne (Araechon) vorkommen, aber nicht nördlicher (Pagellus moimyrus, Pagrus orfus, Crenilabrus pavo, Julis Giofredi, Xyrichthys

novacula, Mugil cefalus, Atherina hepsatus, Belone acus, Myrus vulgaris, Homiasboa (Travailleur) etc.).

Es hat sich noch keine so scharfe Scheidung zwischen Meeres- und Süsswasserfischen in dieser Zone gebildet, wie anderswo, darum sind z. B. Syngnathus im Süsswasser von Algier, Blennius in Italien, Frankreich, Spanien, Atherina in Corsica, Italien, Gobius in Italien — eine Erscheinung, die auch in den Tropen oft wiederkehrt und z. B. auf Borneo schon von Martens beobachtet wurde.

Diese Scheidung ist wohl eine späte und klimatische und darum in den Ländern weniger entwickelt, wo die Temperaturdifferenzen zwischen Land und See weniger scharf auftreten.

23.

Die konische Loxodrome als Osculatrix.

Von Prof. **Josef Tesař** in Brünn, vorgelegt von Prof. Šolín am 4. Juni 1886.

Mit 1 Tafel.

Das immer mehr in den Vordergrund tretende Studium der Accelerationen höherer Ordnung bei der Bewegung eines Punktes im Raume lässt die Aufstellung geeigneter Curventypen als Osculatrices von Raumcurven höchst wünschenswert erscheinen.

Die Bedeutung einer sich innigst an die primitive Raumcurve anschmiegenden Osculatrix wurde bereits von Lagrange, Comte (Cours de philosophie positive), Padeletti („Sulle relazioni tra cinematica e meccanica", Bataglini, Giornale di Matematica, Vol. XIV. p. 203), Schell und anderen Autoritäten hinlänglich gewürdigt.

Bisher begnügte man sich diesfalls mit der auf einem Kreiscylinder liegenden Schmiegunghelix,*) die mit der primitiven Raumcurve an der Berührungsstelle drei auf einander folgende Punkte und die rectificirende Gerade, somit daselbst den Krümmungshalbmesser und den Schmiegungshalbmesser, — nicht aber den Schmiegungskegel, die Schmiegungskugel, kein Element der Strictionslinien der Flächen der Krümmungshalbmesser beider Curven u. s. f. gemein hat.

---

*) Man vergleiche Dr. Wilhelm Schell: „Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung", (Leipzig, Teubner, 1859) pag. 82 bis 86.

Es soll die Aufgabe der folgenden Abhandlung sein, auf die „conische Loxodrome“, auch „conische Spirale“ genannt, als eine Curve hinzuweisen, welche mit einer Raumcurve in einem (nicht singulären) Punkte eine Berührung dritter Ordnung einzugehen vermag, so dass beide Curven vier auf einander folgende Punkte, somit daselbst auch den Schmiegungskegel, die Schmiegungskugel, ein Element der Strictionslinien der Flächen ihrer Krümmungshalbmesser u. s. w. gemein haben, — zugleich auf eine Raumcurve, deren eigene Krümmungsverhältnisse die primitivsten und anschaulichsten sind, und die nächst der Helix vor allen anderen Raumcurven zu der Rolle einer Schmiegungscurve oder Osculatrix prädestinirt erscheint.

Ich werde unter Zugrundelegung einer meines Wissens bis jetzt unbeachtet gebliebenen Eigenschaft der orthogonalen Meridian-Projection der Loxodrome die constructive Bestimmung der die Krümmung characterisirenden Stücke lehren und schliesslich auf rein geometrischem Wege entwickeln, wie man an einer beliebigen Stelle einer Raumcurve eine „conische Schmiegungs-Loxodrome“ einzuschreiben vermag.

Bei Plan-Curven ist schon im Jahre 1841 von Abel Transon auf die Unzulänglichkeit des Krümmungskreises als einer Osculatrix für eine intimere Berührung in einer „Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces“ (Liouville, Tome VI, pg. 191.), überschriebenen Studie hingewiesen worden.

Daselbst entwickelt Transon den Begriff der Déviation, der Déviationsaxe, der Schmiegungsparabel,*) welche eine Berührung dritter Ordnung und des osculierenden Kegelschnittes, der eine Berührung vierter Ordnung mit einer Plancurve einzugehen vermag.

Die Déviationsaxe ist der der gemeinschaftlichen Tangente conjugirte Diameter der Schmiegungsparabel und die Déviation wird gemessen durch den Winkel δ, den die Déviations-Axe mit der Normalen im Berührungspunkt einschliesst.

Weil die gegebene Plan-Curve mit der Schmiegungsparabel vier

*) Man vergleiche: Schell „Über die Berührung ebener Curven mit einer Parabel“. (Schlömilch, B. II, pg. 58).

auf einander folgende Punkte gemein hat, so haben die Evoluten beider Curven drei auf einander folgende Punkte gemein.

Beiden Curven kommt im Berührungspunkt nicht nur derselbe Krümmungsradius ϱ zu, sondern die Evoluten beider Curven besitzen dem entsprechend einen gemeinschaftlichen Krümmungsradius ϱ_1, welche Radien mit dem Déviations-Winkel δ in dem von A. Transon aufgefundenen, merkwürdigen Zusammenhang stehen:

$$tg\,\delta = \frac{1}{3}\frac{\varrho_1}{\varrho}.$$

Hiebei lenkt A. Transon die Aufmerksamkeit auf die logarithmische Spirale.

Er schreibt: „. . . ., on peut considérer la spirale logarithmique, qui se distingue de toutes les autres courbes en ce que sa déviation est constante, son axe de déviation étant représenté par le rayon réfléchi lorsqu' on regarde le rayon vecteur comme un rayon lumineaux incident.*) Cette courbe joue, par rapport à la seconde affection de courbure, un rôle analogue à celui du cercle pour la premiére.“

Beachten wir, dass die logarithmische Spirale als Orthogonal-Projection einer conischen Loxodrome aufgefasst werden kann, sowie dass die conische Loxodrome zu einer logarithmischen Spirale degenerirt, wenn ihr Träger, die Kegelfläche, in ein ebenes Strahlenbüschel übergeht; so sind wir berechtigt, die Einführung der Loxodrome als Osculatrix als die Erweiterung, Verallgemeinerung einer bereits von Transon niedergelegten Idee zu bezeichnen.

Vor allem thut es noth, die Loxodrome und ihre wichtigsten Projectionen zu betrachten und auf deren Eigentümlichkeiten zu verweisen, wobei wir längst Bekanntes nicht ausscheiden zu können glauben.

---

*) Fasst man die Normale als Einfallsloth auf, so ist diese Bemerkung nur so zu verstehen, dass der vom Pol der Spirale ausgehende Leitstrahl und die Déviationsaxe zu verschiedenen Seiten der Normale liegen, nicht aber, dass der Einfallswinkel α gleich ist dem Reflexionswinkel δ; denn für ersteren gilt bekanntlich $tg\,\alpha = \frac{\varrho_1}{\varrho}$, während für letzteren, weil die log. Spirale sowie die Parabel mit der Plan-Curve vier benachbarte Punkte gemein hat, die obige Relation $tg\,\delta = \frac{1}{3}\frac{\varrho_1}{\varrho}$ Geltung hat.

Die Rotationskegelfläche (K), auf der die conische Loxodrome L ruht, habe den Scheitel s, und ihre Rotationsaxe $\overline{sy}$ schliesse mit den Erzeugenden derselben den constanten Winkel γ ein.

Der Steigungswinkel, den jede Tangente der Loxodrome mit der durch den Berührungspnnkt gehenden Erzeugenden von (K) einschliesst, werde mit λ bezeichnet und durch s eine mit (K) coaxiale Kegelfläche $(\mathfrak{K})$, „der Richtungskegel", gelegt, so dass die Erzeugenden des letzteren parallel sind den Tangenten von L und mit $\overline{sy}$ den constanten Winkel μ einschliessen, für den die Relation $\cos \mu = \cos \gamma \,.\, \cos \lambda \ldots 1.$ Geltung hat.

Jede an den „Basiskegel" (K) gelegte Berührungsebene berührt (K) in einer Erzeugenden, auf der eine unendliche Anzahl von Punkten der Loxodrome liegt, für welche sämmtliche Tangenten parallel sind zu einer der beiden Erzeugenden, in denen $(\mathfrak{K})$ von der angezogenen Berührungsebene geschnitten erscheint.

Die orthogonale Projection von L auf eine zur Rotationsaxe $\overline{sy}$ gefällte Normalebene ist eine logarithmische Spirale, deren Pol mit der Projection s' des Scheitels s zusammenfällt und deren radii vectores mit den entsprechenden Tangenten den Winkel λ' einschliessen, für den die Relation

$$\cos \lambda' = \frac{tg\, \gamma}{tg\, \mu} \ldots 2.)$$ Geltung hat.

Uebergehen wir nun zur Betrachtung der Meridianprojection der Loxodrome, die uns zu wichtiger Folgerung führen wird.

Eine beliebige durch die Rotationsaxe sy gelegte Meridianebene tritt als Projectionsebene auf, sie schneidet (K) in den Erzeugenden m und n und $(\mathfrak{K})$ in den Erzeugenden $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$, wovon die ersteren mit $\overline{sy}$ den Winkel γ, die letzteren den Winkel μ einschliessen. — Projicirt man (K) und $(\mathfrak{K})$ auf die Meridianebene, so treten m und n sowie $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ als Contourkanten der beiden Kegel auf.

Es sind demnach $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ jene Erzeugenden von $(\mathfrak{K})$, deren Projectionen mit sy den grössten spitzen Winkel einschliessen. Verfolgen wir den Tangentenzug der Loxodrome L im Raume, berücksichtigen hiebei die characteristische Eigenschaft des „Richtungskegels" $(\mathfrak{K})$, — verfolgen wir ferner den Tangentenzug der Meridianprojection L'' der Loxodrome L, — so finden wir, dass jeder Windung von L'' zwei Flexionspunkte zukommen, eine Flexionstangente parallel zu $\mathfrak{m}$, die andere zu $\mathfrak{n}$.

Legt man durch $\mathfrak{m}$ an (K) die beiden Berührungsebenen, so projiciren sich beide Berührungskanten in Einer Geraden $\mathfrak{m}_1$; nach dem Erörterten müssen auf $\mathfrak{m}_1$ alle jene Flexionspunkte von $\mathfrak{L}''$ liegen, deren Flexionstangenten parallel sind zu $\mathfrak{m}$. Bedenken wir ferner, dass die durch die beiden Berührungskanten, die sich in $\mathfrak{m}_1$ projiciren, gelegte Ebene die Polare ist zum Stral $\mathfrak{m}$ in Bezug auf (K) als Ordnungskegelfläche, so folgt:

1. Die Stralen $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}_1$ sind durch die Stralen m und n harmonisch getrennt.

Schliesst $\mathfrak{m}_1$ mit sy den Winkel φ ein, so ist demnach

$$tg\,\varphi\,.\,tg\,\mu = tg^2\,\gamma\,\ldots\,3.$$

2. Jede zu $\mathfrak{m}$ parallele Flexionstangente hat eine solche Lage, dass die von den Stralen m und n begrenzte Strecke derselben vom Flexionspunkte halbirt wird.

Genau dasselbe lässt sich von den zu $\mathfrak{n}$ parallelen Flexionstangenten beweisen und wir erhalten den für die folgenden Untersuchungen Grund legenden Satz:

„Die von den Contourkanten m und n des Basiskegels (K) begrenzten, auf den Flexionstangenten der Meridianprojection der conischen Loxodrome L liegenden Strecken werden durch die Flexionspunkte halbirt."

Ist a ein beliebiger Punkt von L, so kann immer Eine Meridianebene gefunden werden, auf der sich a als Flexionspunkt projicirt, es ist dies immer jene durch $\overline{sy}$ gehende Meridianebene, welche parallel ist zu der durch a an die Loxodrome gezogene Tangente.

Sei a ein Punkt von L, die zu seiner Tangente parallele Meridianebene unsere Projectionsebene, a'' und L'' die Projectionen von a und L.

Alle anderen Buchstaben haben die frühere Bedeutung.

Die in a'' an L'' errichtete Tangente wird zur Flexionstangente und werde in e'' von m in d'' von n geschnitten, so dass $e''a'' = a''d''$.

Legen wir durch $e''d''$ eine projicirende Ebene, so ist dieselbe die in a errichtete Schmiegungsebene von L, denn sie enthält drei auf einander folgende Punkte a, a_1, a_2 von L, weil die Flexionstangente mit L'' drei auf einander folgende Punkte a'', a_1'', a_2'' gemein hat.

Die Schmiegungsebene schliesst mit sy den Winkel μ ein und schneidet den Basiskegel (K) in einer Ellipse E, deren grosse Axe $c''d''$ ist und deren kleine Axe von a und dessen Symmetriepunkt in Bezug auf die Projections- als Symmetrieebene begrenzt wird. Ist o der Krümmungsmittelpunkt der Ellipse in a, somit $\overline{r} = \overline{ao}$ der leicht zu bestimmende Krümmungsradius für den Punkt a der Ellipse, so ist auch o Krümmungsmittelpunkt der conischen Loxodrome für den Punkt a, denn die Punkte a, a_1, a_2 gehören der Loxodrome und der Schnittellipse E gemeinschaftlich an.

Wir ersehen hieraus:

1. die Krümmungsradien von L stehen senkrecht zu den einzelnen Meridianebenen, somit auch zur Rotationsaxe ohne letztere zu schneiden.

2. Sie berühren einen mit dem Basiskegel (K) coaxialen und concentrischen Rotationskegel, dessen Erzeugende mit der Rotationsaxe sy den in der Relation 3. angezogenen Winkel φ einschliessen.

3. Die Fläche der Krümmungsradien ist ein windschiefes Conoid, dessen Richtebene normal ist zur Rotationsaxe.

4. Die rectificirenden Geraden von L sind demnach parallel zur Rotationsaxe, die rectificirende Fläche ist ein Cylinder, dessen Normalschnitt die abgehandelte logarithmische Spirale wird, auf dem sich die Loxodrome als eine Helix ausbreitet, die mit den Erzeugenden des Cylinders den Winkel μ einschliesst.

5. Bezeichnet $\overline{l}$ den Abstand des Punktes a von s, so ergiebt sich aus der trigonometrischen Behandlung der Meridianprojections-Figur

$$r = \frac{l \sin \gamma}{\sin \mu \cos \mu \sqrt{tg^2 \mu - tg^2 \gamma}} \, . — \ldots 4.$$

Das in o zur Schmiegungsebene errichtete Perpendikel ist die Krümmungsaxe, das in a zur Schmiegungsebene errichtete Perpendikel die Binormale von L in a.

Ebenso einfach gestaltet sich die Verzeichnung des Schmiegungskegels und der Schmiegungskugel im Punkte a der Loxodrome. — Wir schliessen: Der Krümmungskreis hat in a mit der Schnittellipse E somit auch mit dem Basiskegel nicht nur die drei benachbarten Punkte a, a_1, a_2, sondern noch einen vierten benachbarten Punkt a_3 gemein, denn a ist der Endpunkt einer Axe der Ellipse. — Der Punkt a_3 liegt aber nicht mehr auf der conischen Loxodrome L, sondern es ist dem Punkte a_2 auf L ein anderer Punkt

(a_3) benachbart. — Nun ist der Krümmungskreis somit auch a_3 einerseits, — andererseits auch (a_3) auf der Krümmungskugel und dem Krümmungskegel gelegen, somit das unendlich schmale Flächenelement $a_2 a_3 (a_3)$ der Krümmungskugel und dem Krümmungskegel gemeinsam, zudem aber auf der durch a_2 an den Basiskegel (K) gelegten Berührungsebene gelegen, welche wegen der unendlich kleinen Entfernung der Punkte a_2 und a mit der durch a an (K) gelegte Berührungsebene zusammenfallend angesehen werden muss.

Die Krümmungskugel und der Krümmungskegel sind somit bestimmt durch den Krümmungskreis und durch die in a an den Basiskegel (K) gelegte Berührungsebene, welche als solche auch die Krümmungskugel und den Krümmungskegel berühren soll.

Der Schnittpunkt der Krümmungsaxe mit dieser Berührungsebene giebt uns den Scheitel des Krümmungskegels, der längst des Krümmungskreises die Krümmungskugel berührt.

Aus der trigonometrischen Behandlung der Meridianprojections-Figur gelangt man zu den Werten:

Der Abstand des Scheitels des Krümmungskegels von der Schmiegungsebene

$$k = \frac{l\,(\cos^2\gamma - \cos^2\mu)}{\sin\mu \cos^2\mu \cos\gamma\,(tg^2\mu - tg^2\nu)} \ldots \qquad 5)$$

Der Radius der Krümmungskugel $R = \frac{l\,tg\,\gamma}{\sin^2\lambda} \ldots$ 6)

Selbstverständlich bilden die aufeinander folgenden Krümmungsmittelpunkte, Scheitel der Krümmungskegel, Mittelpunkte der Krümmungskugeln drei neue conische Loxodromen.

Nachdem bewiesen wurde, dass die conische Loxodrome eine Helix ist, entfällt die Untersuchung der zweiten Krümmung (Torsion) und der totalen Krümmung als selbstverständlich und es erübrigt nur, die Strictionslinie des Conoids der Krümmungsradien zu streifen.

Projicirt man die primitive Loxodrome L sammt ihren Krümmungsradien auf eine Ebene, senkrecht zur Axe sy, — die Richtebene des Conoids, so projicirt sich L als die besprochene logarithmische Spirale L', die Krümmungsradien aber als deren Normalen, welche die Evolute $L^{+\prime}$ von L' einhüllen, bekanntlich eine mit L' concentrisch liegende, mit L' congruente aber gegen dieselbe verdreht liegende

Curve, welche als Projection der Strictionslinie des Conoids der Krümmungslinien auftritt.

Diese Strictionslinie ist eine neue conische Loxodrome, die Strictions-Loxodrome, concentrisch und coaxial mit L, gelegen auf einem neuen Basiskegel, dessen Erzeugende, wie aus der Construction leicht nachweisbar, mit der Axe einen Winkel γ^+ einschliessen, für den die Relation

$$tg\,\gamma^+ = \frac{tg\,\gamma}{tg\,\lambda'} = \frac{tg^2\gamma}{\sqrt{tg^2\mu - tg^2\gamma}} \ldots \qquad 8)$$

Geltung hat.

Die bisher über die Krümmungsverhältnisse der conischen Loxodrome zu Tage geförderten Resultate sind bekanntlich auf analytischem Wege längst abgeleitet worden. Wenn wir auf die Wiedergabe derselben nicht verzichteten, so geschah es einerseits, um die Methode zu illustriren, die es auch dem Zeichner ermöglichen soll, die Krümmungsverhältnisse von Raumcurven nach der Verzeichnung einer Schmiegungs-Loxodrome in den Bereich seiner Untersuchungen zu ziehen, andererseits um vollständig zu sein und analytischen Untersuchungen aus dem Wege zu gehen.

Uebergehen wir nun zu der eigentlichen Fundamentalaufgabe unserer Abhandlung, indem wir die Frage beantworten: „Auf welche Art kann man in einem Punkte a einer Raumcurve C eine conische Schmiegungs-Loxodrome einschreiben, das ist eine Loxodrome, die nicht nur den Punkt a, sondern noch drei weitere benachbarte Punkte a_1, a_2, a_3 mit C gemein hat, — mit C somit eine Berührung dritter Ordnung einzugehen vermag?"

Unter einem werden wir finden, dass durch vier benachbarte Punkte eine conische Loxodrome vollkommen bestimmt ist.

Wir schliessen:

Nehmen wir vorläufig an, die Punkte a, a_1, a_2, a_3 wären nicht einander unendlich nahe, sondern sie lägen auf C in endlichen aber gleichen Entfernungen, so dass der Sehnenzug $aa_1a_2a_3$ aus drei gleichen Sehnen $\overline{aa_1}$, $\overline{a_1a_2}$, $\overline{a_2a_3}$ besteht.

Durch einen Punkt o, ausserhalb C, denke man sich drei Strecken gezogen, gleich und gleichgerichtet mit je einer Sehne des Sehnenzugs, und zwar die Strecke $\overline{0I} \# aa_1$,

die Strecke $\overline{0}2 \# a_1 a_2$,
„ „ $\overline{0}3 \# a_2 a_3$.

Die Endpunkte 1, 2, 3 der verzeichneten drei Strecken bestimmen eine Ebene und zugleich einen Kreis mit dem Mittelpunkte o', so zwar dass o' die Projection von o auf der Ebene 1, 2, 3 bedeutet. Mit anderen Worten 01, 02, 03 sind Erzeugende eine Rotationskegelfläche, deren Axe oo' ist. — Selbstverständlich sind auch die Projectionen der Strecken, d. i. $0'1$, $0'2$, $0'3$ als Radien eines Kreises unter einander gleich.

Projicire man ferner die Curve C auf eine zur Ebene 123 parallele Ebene (G), wobei die Richtung der projicirenden Stralen durch oo' bestimmt ist. — Sei C' die Projection von C, $a'a'_1a'_2a'_3$ die Projection des Sehnenzugs $aa_1a_2a_3$, so dass wegen

$$a'a'_1 \# 0'1, \quad a_1'a'_2 \# 0'2, \quad a'_2a'_3 \# 0'3$$

$a'a'_1a'_2a'_3$ einen aus gleichen Sehnen bestehenden Sehnenzug von C' bildet.

Legen wir vier Kreise K, K_1, K', K_1' und zwar den ersten durch die Punkte a, a_1, a_2, den zweiten durch a_1, a_2, a_3, den dritten durch a', a_1', a_2', den vierten durch a_1', a_2', a_3'.

Dann ist der durch a_1 gehende Halbmesser von K parallel dem durch a_1' gehenden Halbmesser von K' sowie der durch a_2 gehende Halbmesser von K_1 parallel dem durch a'_2 gehenden Halbmesser von K_1', beide somit parallel zu (G), normal zu oo'.

Nur wenn die Winkel $a'a_1'a_2'$ und $a_1'a_2'a_3'$ gleich sind, sind es auch die Winkel aa_1a_2 und $a_1a_2a_3$.

Dann fallen K' und K_1', die über beiden errichteten projicirenden Cylinder sowie die beiden auf letzteren sich ausbreitenden Helixe zusammen, von denen die erste durch a und a_1, somit auch durch a_2, — die andere durch a_1 und a_2, somit auch durch a_3 hindurchgeht.

K und K_1 sind congruent, ohne zusammen zu fallen. Die bisher gezogenen Schlüsse sind allgemein giltig, sie bleiben es auch dann, wenn wir von nun an annehmen wollen, dass die Sehnen aa_1, a_1a_2, a_2a_3 unendlich klein werden.

Hiebeî hindert uns nichts, dieselben auch fernerhin als einander gleich anzusehen.

Dann sind K und K_1 zwei benachbarte Krümmungskreise von C, — K' und K_1' zwei benachbarte Krümmungskreise von C'.

Die durch a_1, bezüglich durch a_2 gezogenen Radien der Kreise K und K_1 übergehen in zwei benachbarte Krümmungsradien, die

durch a zu oo' gezogene Parallele übergeht endlich in die im Punkte a in C zu errichtende Rectificirende.

Die Punkte a', a_1', a_2', a_3' bestimmen eine logarithmische Spirale L', die mit C' diese Punkte gemein hat, somit in a' mit C' eine Berührung dritter Ordnung eingeht.

In Folge dessen sind K' und K_1' zwei benachbarte Krümmungskreise von L'.

Deshalb haben die Evoluten von C' und L' drei auf einander folgende Punkte b', b_1', b_2' gemein, sie besitzen somit einen gemeinschaftlichen Krümmungskreis mit dem Mittelpunkte c'.

In dem rechtwinkligen Dreiecke $a'b'c'$ bedeutet die Kathete $\overline{a'b'} = \varrho'$ den (ersten) Krümmungsradius von C' in a', — die Kathete $\overline{b'c'} = \varrho_1'$ den zweiten Krümmungsradius beider Curven, d. i. den gemeinschaftlichen Krümmungsradius der Evoluten derselben in b'.

Das von b' auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel $b's'$ bestimmt in seinem Fusspunkte s' den Pol der logarithmischen Spirale, sowie den Winkel $a'c'b' = \lambda'$, (wobei $tg\,\lambda' = \frac{\varrho'}{\varrho_1'} \ldots 9)$ den in 2) berührten constanten Winkel repräsentirt, den jeder radius vector von L' mit der entsprechenden Tangente einschliesst. — Die Spirale L' ist aber durch den Pol s' und den Winkel λ' fixirt.

Errichten wir über L' einen projicirenden Cylinder, dessen Erzeugende somit parallel sind zur Rectificirenden aa', so liegen die Punkte a, a_1, a_2, a_3 der primitiven Curve C auf diesem Cylinder und zwar derart, dass die unendlich kleinen aber gleichen Sehnen aa_1, a_1a_2, a_2a_3 mit den Erzeugenden denselben Winkel μ einschliessen.

Wird also auf diesem Cylinder eine Helix verzeichnet, die durch die Punkte a und a_1 hindurchgeht, so muss sie auch durch die Punkte a_2 und a_3 hindurchgehen, sie hat mit der primitiven Curve C die vier benachbarten Punkte a, a_1, a_2, a_3 gemein, die Helix — sie heisse L — geht somit mit der primitiven Curve C eine Berührung dritter Ordnung ein. —

Nun ist bewiesen worden, dass eine conische Loxodrome eine Helix ist, gelegen auf einem Cylinder, dessen Orthogonalschnitt eine logarithmische Spirale sein muss, so dass der Pol der letztern und die Spitze des Basiskegels auf einer Parallelen zu den Cylindererzeugenden liegt. —

Umgekehrt muss eine Helix, gelegen auf einem Cylinder, dessen Orthogonalschnitt eine logarithmische Spirale ist, eine conische Loxodrome sein. Die durch

den Pol der Spirale zu der Cylinder-Erzeugenden errichtete Parallele ist dann die Rotationsaxe des Basiskegels (K). —

Diese Bedingungen aber treffen bei der betrachteten Helix L vollkommen zu. Sie ist mithin zugleich eine conische Loxodrome und zwar die gesuchte Schmiegungsloxodrome an C, die in a mit C eine Berührung dritter Ordnung eingeht und von der wir noch den Basiskegel (K) durch dessen Scheitel s und Axe sy zu bestimmen haben werden. —

Denken wir uns zu diesem Ende (man sehe die Figur) C orthogonal auf zwei zu einander normale Projectionsebenen bezogen, so dass die erste normal zu der Rectificirenden in dem angezogenen Punkte a liegt, während die zweite parallel hiezu und zugleich parallel zu der in a an C errichteten Tangente at sein soll (Tangente und Rectificirende den Winkel einschliessend). —

Weil die Axe des Basiskegels parallel ist der Rectificirenden von C und L im Punkte a, so folgt vorerst, dass die erste Projection der conischen Schmiegungsloxodrome, die logarithmische Spirale L' durch die erste Projection der primitiven Curve C, — C' — bestimmt wird, indem man in a' zu C' den ersten und zweiten Krümmungsradius ϱ' und ϱ_1', $\varrho' = a'b'$, $\varrho_1' = b'c'$ bestimmt, in dem rechtwinkligen Dreiecke $a'b'c'$ von b' auf die Hypotenuse $a'c'$ das Höhenperpendikel $b's'$ fällt, dessen Fusspunkt s' die erste Projection vom Scheitel, von der Rotationsaxe sy, — zugleich den Pol von L' und im Verein mit dem Winkel $a'c'b' = \lambda'$ die Spirale L' als erste Projection von L bestimmt. —

Die zweiten Projectionen von L und C, — L'' und C_1'' — müssen nach dem, was eingangs über die Meridianprojection der conischen Loxodrome vorgetragen wurde und nach der besonderen Annahme, die wir bezüglich der zweiten Projectionsebene gemacht haben, in a'', — der zweiten Projection von a, — eine gemeinschaftliche Flexionstangente $a''t''$ haben, die mit der zweiten Projection der Axe sy den als bekannt vorausgesetzten Winkel μ einschliessen muss, wo μ den Winkel zwischen Tangente und Rectificirenden in a an C bedeutet. — Zugleich muss das von der zweiten Contour des Basiskegels (K) begrenzte Stück $e''d''$ der Tangentenprojection $a''t''$ in a'' halbirt erscheinen. —

Hiedurch ist nunmehr der Basiskegel und hiemit L'' vollkommen bestimmt. —

Denn:

Von dem Basiskegel (K) kennen wir vorläufig die Rotationsaxe und den durch a gehenden Parallelkreis, dessen Radius gleich ist $s'a'$ und der sich auf der zweiten Projectionsebene als die durch a'' lothrecht zur Rectificirenden gehende Strecke $1''2''$ projicirt. Sucht man auf dieser Geraden $1''2''$ jenen Punkt f'', der durch die Punkte $1''$ und $2''$ von a'' harmonisch getrennt ist, — verzeichnet durch f'' zu $a''t''$ die Parallele $f''s''$, so ist deren Schnittpunkt s'' mit der zweiten Projection der Rotationsaxe die zweite Projection des Scheitels von (K). —

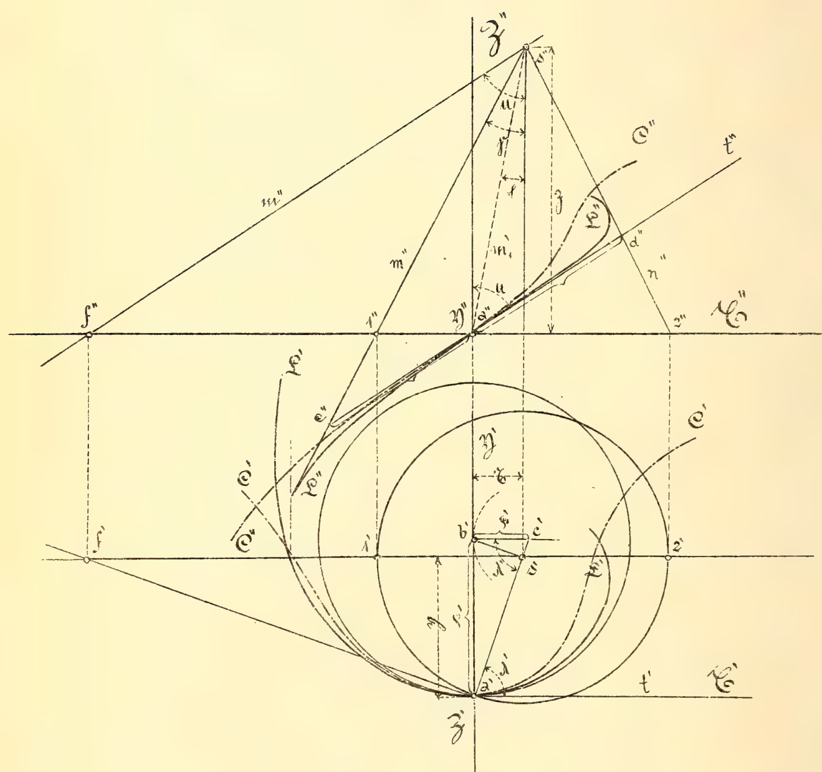
Die Geraden $s''1''$ und $s''2''$ sind nun die Contourkanten des Basiskegels, sie schneiden $\overline{a''t''}$ in den Punkten e'' und d'' und die Strecke $e''d''$ wird in Folge der Annahme des Punktes f'' durch a'' halbirt, woraus die Richtigkeit der Construction erhellt. —

Der Winkel $1''s''y''$ ist dann gleich dem gesuchten Winkel γ. — Durch den hiemit vollkommen bestimmten Basiskegel und die Tangente at an C und L ist unsere gesuchte Schmiegungsloxodrome gegeben, — unsere Aufgabe somit graphisch gelöst. —

Sowie bei Plancurven jedem Punkte derselben ein Krümmungsmittelpunkt entspricht und die Aufeinanderfolge der Krümmungsmittelpunkte eine für die Untersuchung der Krümmungsverhältnisse der primitiven Curve hochwichtige abgeleitete Curve, die Evolute giebt: ebenso entspricht jedem Punkte einer Raumcurve ein Scheitel des Basiskegels der Schmiegungsloxodrome, zugleich ein asymptotischer Punkt der letzteren. Es leuchtet ein, dass die Aufeinanderfolge dieser asymptotischen Punkte eine neue aus der primitiven Curve abgeleitete Curve geben wird, welche für die Untersuchung der Krümmungsverhältnisse der ersteren Bedeutung haben dürfte. —

Beziehen wir den Scheitel s auf ein von Punkt zu Punkt veränderliches, räumliches, rechtwinkliges Coordinatensystem mit dem Anfangspunkt a und den Axen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, — wobei die Axe $\mathfrak{Y}$ mit dem Krümmungsradius der Curve C im Punkte a, die Axe $\mathfrak{Z}$ mit der Rectificirenden daselbst zusammenfallen soll, und lassen wir die bereits eingeführten Bezeichnungen weiter gelten, so folgt aus der Figur für die Ordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ des Scheitels s:

$$\mathfrak{x} = \frac{\varrho'^2 \varrho'_1}{\varrho'^2 + \varrho'^2_1}, \quad \mathfrak{y} = \frac{\varrho'^3}{\varrho'^2 + \varrho'^2_1}, \quad \mathfrak{z} = \frac{\varrho'^2 \operatorname{cotg} \mu}{\varrho'_1}. —$$



Wir haben bis jetzt die Richtung der Rectificirenden und die Grösse des Winkels μ, den dieselbe mit der Tangente einschliesst, immer als bekannt vorausgesetzt. — Um diese Werte auch für den Fall zu bestimmen, in welchem die primitive Curve C kein bestimmtes Bildungsgesetz zeigt, kann man folgendermassen vorgehen.

Durch einen beliebigen Punkt O im Raume ziehe man zu jeder Tangente $\overline{t_a}$ in einem Punkte a der Curve C eine Parallele $\overline{\mathfrak{a}}$, so beschreiben sämmtliche $\overline{\mathfrak{a}}$ eine Kegel $(\mathfrak{K}_\mathfrak{a})$, den „Tangentenrichtungskegel" von C. —

Wird an $(\mathfrak{K}_\mathfrak{a})$ längs $\overline{\mathfrak{a}}$ eine tangirende Ebene gelegt und durch O hierin ein Stral $\overline{\mathfrak{b}}$ gezogen, der mit $\overline{\mathfrak{a}}$ einen rechten Winkel einschliesst, so bestimmt $\overline{\mathfrak{b}}$ die Richtung des Krümmungsradius von C in a und die Gesammtheit aller $\overline{\mathfrak{b}}$ bildet einen zweiten Kegel $(\mathfrak{K}_\mathfrak{b})$, den „Richtungskegel der Krümmungsradien" von C. —

Wird endlich an $(\mathfrak{K}_\mathfrak{b})$ längs $\overline{\mathfrak{b}}$ eine tangirende Ebene gelegt, so bestimmt sie vor allem die Richtung unserer ersten Projectionsebene und die durch O hiezu gefällte Normale $\mathfrak{c}$ die Richtung der Rectificirenden. —

Der Winkel, den $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{c}$ einschliesst, ist hiemit gleich μ und die durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ gelegte Ebene bestimmt die Richtung unserer zweiten Projectionsebene. —

Die Gesammtheit aller Stralen $\mathfrak{c}$ bildet in ihrer Aufeinanderfolge einen dritten Kegel $(\mathfrak{K}_c)$ den „Richtungskegel der Rectificirenden" der primitiven Curve C. —

Résumé: Um in einem Punkte a einer Raumcurve C eine Schmiegungs-Loxodrome zu verzeichnen, bestimme man in a die Rectificirende, welche daselbst mit der Tangente einen Winkel μ einschliesst. —

Hierauf projicire man C auf eine zu dieser Rectificirenden normale (erste) Projectionsebene nach C', a nach a' und bestimme im Punkte a' der Curve C' die beiden ersten Krümmungsradien ϱ' und ϱ'_1 der Lage und Grösse nach und mit Hilfe derer die logarithmische Spirale L', welche C' in a' in der dritten Ordnung berührt und als erste Projection der Schmiegungs-Loxodrome aufzufassen ist. — Die im Pol c' der Spirale errichtete projicirende Gerade ist die Rotationsaxe des Basiskegels (K), auf dem sich die Schmiegungsloxodrome L ausbreitet. —

Eine zur Rectificirenden und Tangente parallele Ebene trete als zweite Projectionsebene auf. Die zweite Projection von L und C

hat in der zweiten Projection a'' von a einen Flexionspunkt, der die auf der hindurchgehenden Flexionstangente liegende von den Contourkanten von (K) begrenzte Strecke halbirt, — eine Bedingung, woraus (K) und L resultirt.

24.

Untersuchung der Wirkungen perspectivischer Darstellungen.

Vorgetragen von **Miloslav Pelíšek** am 4. Juni 1886.

Es ist ein der Menschheit angeborener Trieb, die Gegenstände der Aussenwelt nachzubilden, d. i. stellvertretende Objekte zu schaffen, deren Anblick die nämlichen Vorstellungen in uns erweckt, wie jene selbst, obzwar sie sich von ihnen im allgemeinen an Gestalt, Grösse und sonstiger Qualität unterscheiden. Die Nachbildung kann eine so wohlgelungene sein, dass jeder unwillkührlich versucht ist, dieselbe für den Gegenstand selbst zu halten, oder aber, dieselbe beschränkt sich darauf, nur in gewissen hervorragenden Merkmalen mit dem Original übereinzustimmen, deren Vorhandensein unserem Urtheil genügt, ihren Zweck zu begreifen und unserer Phantasie Spielraum genug bietet, sich die Ähnlichkeit noch weiter zu vervollständigen; wir sagen im ersten Falle, dass die Nachbildung eine objektive Täuschung in uns hervorruft, weil diese nur von dem Objekte selbst und nicht von unserer Individualität abhängt, im zweiten Falle sprechen wir von einer subjektiven Täuschung, weil dieselbe von unserer Empfänglichkeit abhängt, weil wir uns gleichsam freiwillig in die Täuschung begeben und das Streben entgegenbringen, Verhältnisse, welche in der Zeichnung nicht existiren, aber nach unserem Urtheile existiren sollten, in dieselbe gleichsam hineinzusehen. Haben wir darin einen besonderen Grad von Fertigkeit erlangt, so kann diese subjektive Täuschung der objektiven beliebig nahe kommen. Um einzusehen, wie wenig Merkmale mitunter unserer Phantasie genügen, um in uns bestimmte Vorstellungen wachzurufen, wie grob also die subjektive Täuschung werden kann, brauchen wir nur an die bizarren Gestalten zu denken, welche wir manchmal in lodernden Flammen oder in Wolken zu erblicken glauben, andererseits an die Skizzen, ja sogar

Karrikaturen grosser Künstler oder an die bildlichen Darstellungen der Völker in ihrem Kindesalter und an die Erzeugnisse jugendlicher Talente überhaupt.

In den ältesten Zeiten verfuhr man bei solchem Nachbilden ausschliesslich empirisch, man versuchte verschiedene Eindrücke auf eine Bildfläche zu fixiren und durch fortwährende Vergleiche zu verbessern; auf diese Weise entstand eine gewisse Summe von Erfahrungen und praktischen Regeln, welche von Geschlecht zu Geschlecht erblich übergiengen. So wussten z. B. bereits die Griechen, dass parallele Gerade und Ebenen durch convergente dargestellt werden müssen, dass die Helligkeit und Detaillirung der Abbildung einer Fläche mit der Entfernung abnimmt etc. Wie unverlässlich diese empirischen Versuche waren, und wie viel, wie sich Lessing treffend ausdrückt, vom Auge zur Hand verloren gieng, davon geben die Zeichnungen der Alten, so weit sie sich erhalten haben, ein beredtes Zeugnis. So weisen die in Pompeji ausgegrabenen Gemälde mehrere Horizonte und Augepunkte gleichzeitig auf, ferner ist die drollige Wirkung der perspectivischen Zeichnungen der Chinesen bekannt u. s. w.

Pietro de la Francesca (1450) war der erste, welcher ein System in diese Erfahrungen zu bringen suchte. Er kam auf die glückliche Idee, beim Durchsehen durch eine Glastafel die betrachteten Gegenstände zu fixiren, daher der Name der neuen Wissenschaft (perspicere, perspectum = durchsehen). Dürer vervollkommnete dieses Verfahren, indem er statt einer Glastafel ein in einem Rahmen ausgespanntes dichtes Fadennetz benutzte, und so die Natur gleichsam kraticulirte; die später verwendeten Kamera obscura und lucida sowie der Diagraphe von Gavard sind nur als Vervollkommnungen dieses Princips anzusehen.

Die Resultate waren überraschend und es ist in der That das einzige rationelle Mittel, bereits vorhandene Gegenstände abzubilden.

Damals lebte man noch stark unter dem Einflusse der platonischen Auffassung des Sehprocesses, nach welcher aus dem Auge ein Strahlenkegel herausströmt, so dass durch die Berührung eines solchen Lichtstrahles mit dem Gegenstande die Empfindung desselben entsteht. Eine perspectivische Darstellung wurde also als der Schnitt dieses Strahlenkegels aufgefasst. Auf Grund dieser Auffassung war man in der Folge im Stande auch die Perspective von noch nicht vorhandenen, gedachten Gegenständen systematisch auszuführen, also die Natur gleichsam vorzubilden, indem man zunächst die einfachsten

geometrischen Gebilde, Punkte, Gerade und Ebenen und dann bei zweckmässiger Verwendung der damaligen geometrischen Kenntnisse daraus zusammengesetzte Gebilde aus einem Centrum dem Auge durch ein System von homocentrischen Strahlen, den Sehstrahlen, auf eine beliebige Fläche, die Bildfläche, projicirte.

Leonardo de Vinci (1500), der gleich tüchtige Maler, Geometer und Naturforscher veröffentlichte bereits eine ansehnliche Sammlung der aus diesem Verfahren sich ergebenden Regeln für Maler. Die grössten Meister der nun nachfolgenden Blüthezeit der Malerkunst waren auch eifrige Verfechter dieser jungen Wissenschaft und zahlreiche Lehrbücher bahnten ihre Verbreitung an, bis das Werk Lamberts: Perspective affranchie du Géométral (1759) einen Stand der Perspectivwissenschaft bezeichnete, nach welchem nichts Wesentliches mehr in constructivem Theile nachkommen konnte; man beschränkte sich vielmehr darauf, einzelne Constructionen zu vereinfachen.

Von da an begann die kritische Periode der Perspectivwissenschaft. Die Fortschritte der Optik mussten auch eine Rückwirkung auf die Perspective ausüben, ausserdem zeigte sich immer deutlicher, dass die theoretische Zeichnung und Copie der Natur in vielen Beziehungen auseinandergiengen. Grosse Meister, denen ein wunderbares Beobachtungstalent nicht abzusprechen war, erklärten aufs Bestimmteste, gewisse Dinge nach ihrem Gefühle anders zeichnen zu müssen, als es die Centralprojection vorschreibt; es sind auch im Laufe der Zeit die Umstände constatirt worden, unter welchen diese Abweichungen sich besonders fühlbar machen und gewisse praktische Regeln angegeben worden, wie diese Abweichungen bis auf ein Minimum beschränkt werden können. Das ausgezeichnete Buch De la Gournerie's (Traité de la Perspective linéaire 1859) enthält noch ein ganzes Kapitel von solchen Abweichungen der Maler von den Gesetzen der Perspektive und versucht dieselben durch die Beweglichkeit des Auges zu erklären, ohne dass jedoch seine Ausführungen bedeutend mehr befriedigen als wie die seiner Vorgänger.

Wir sehen also, das Bedürfnis, den Sehprocess und dessen Verhältnis zur Linearperspective einer gründlichen Revision zu unterziehen, machte sich immer mehr geltend. Unseres Wissens war Gennerich der erste, welcher diesem Bedürfnisse in seinem Lehrbuche der Perspective für bildende Künstler 1865 Rechnung trug, indem er an die Spitze desselben den Licht- und Sehprocess stellte und zwar, wie er in der Vorrede erwähnt, unter Mitwirkung des Naturforschers

Dr. Plettners. Aber gleich auf den ersten Seiten der Anwendungen wird es dem Leser klar, dass der Verfasser die Wechselbeziehung zwischen dem Sehprocess und der perspectivischen Darstellung nicht klar erfasste, daher nicht im Stande war, die in Rede stehenden Erscheinungen richtig zu erklären.

Von ganz anderer Bedeutung ist das treffliche Werk Tilschers: Ein System malerischer Perspective 1867, in welchem alle Umstände aus dem Sehprocesse ihre Erklärung finden sollen, und zwar wird daselbst das menschliche Auge als ein sogenanntes reduciertes Auge angenommen, bei welchem alle Sehstrahlen durch ein festes Centrum, den Kreuzungspunkt, gehen. Thut man dies aber und legt ausserdem kein besonderes Gewicht den Accomodationserscheinungen bei, so muss man durch eine Reihe von Schlussfolgerungen zu den Consequenzen kommen, welche Tilscher in seinem Werke scharfsinnig begründet.

Allein es drängt sich in diesem Falle auch die Consequenz auf, dass das Auge, wenn man den richtigen Standpunkt einnimmt, von einer centralprojectivischen Zeichnung auf einer Ebene, wie gross auch dieselbe sein mag, denselben Eindruck empfangen müsste, wie von dem Original selbst, auch in dem Falle, wenn man das so beschaffene Auge aus der ursprünglichen Lage beliebig herausdreht, weil dabei bekanntlich der Kreuzungspunkt seine Lage fast gar nicht ändert; denn es würde fortwährend ein jeder Sehstrahl die entsprechenden Punkte des Bildes und des Originals verbinden, das Netzhautbild der perspectivischen Zeichnung und des Originals wären daher stets identisch und daher müssten auch die in beiden Fällen erweckten Vorstellungen dieselben sein. Würde man ferner mit einem solchen Auge eine perspectivische Zeichnung, wie gross auch dieselbe sein mag, von einem unrichtigen Standpunkte betrachten, so könnten nur Verzerrungen auftreten, wie wir sie in der Abhandlung „Über perspectivische Restitution etc. geschildert haben und welche für den ganzen Raum gleich sind.

In Wirklichkeit tritt aber etwas anderes ein. Ausser den perspectivischen Verzerrungen, welche von unrichtigem Standpunkte des Beobachters herrühren, und welche sich, wie wir gesehen haben, geometrisch verfolgen lassen, gibt es noch eine andere Gattung derselben, welche an der Peripherie von Gemälden auftreten und unter dem Namen perspectivische Ränder bekannt sind und zwar sind dieselben desto störender, je kleinere Distanz wir beim Anfertigen der perspectivischen Zeichnung gewählt haben. Dieser Umstand und, wie

wir später sehen werden, noch andere, zwingen uns die Überzeugung auf, dass die Annahme des reducierten Auges nur eine ziemlich grobe Annäherung an die Wirklichkeit ist und dass die Nichtübereinstimmung malerischer Darstellungen und der theoretischen Perspective nur auf der Nichtübereinstimmung des Sehprocesses und der Centralprojection beruht. Wenn wir die Sache von dem Standpunkte eines Naturforschers auffassen, so müssen wir die construirte perspectivische Zeichnung als ein Experiment betrachten, durch welches die Berechtigung der vereinfachten Auffassung des Sehprocesses erhärtet wäre, wenn die Eindrücke, die wir von der Aussenwelt und von den Stellvertretern, die nach dieser Annahme verfertigt wurden, empfiengen, in jeder Beziehung identisch wären; da dies aber notorisch nicht der Fall ist, so ist es unsere Aufgabe diese beobachteten Mängel der construirten Zeichnung aus dem allgemeiner gedachten Sehprocesse zu erklären, anstatt das Vorhandensein solcher Mängel nicht zuzugeben. Ausserdem scheint mir dieser Weg der einzige zur richtigen Beurtheilung und Erklärung der oft überraschenden Wirkungen der Kunstwerke guter Meister zu sein; endlich halten wir dafür, dass auch der umgekehrte Vorgang, aus zweckmässig arrangierten Zeichnungen auf verschiedene Eigenthümlichkeiten des Sehorganes zu schliessen, ein fruchtbarer sein müsste. Aus diesem Grunde haben wir es unternommen in der Abhandlung „Über eine durch dioptrisches System bestimmte Raumcollineation“ die Resultate der Gauss-Listing'schen Theorie des menschlichen Auges anschaulich vorzuführen. Wegen Deutlichkeit haben wir aber in der Tafel nicht die absoluten oder proportionalen Dimensionen angenommen, welche für das sogenannte Gauss'sche schematische Auge nach genauen Messungen Geltung haben:

Die Entfernung des ersten Brennpunktes vor d. Scheitel der Cornea 12 *mm*,
„ „ „ zweiten „ hinter „ „ „ „ 14·6 „
„ „ „ ersten Hauptpunktes „ „ „ „ „ 2 „
„ „ „ „ Knotenpunktes „ „ „ „ „ 6·4 „
„ „ der beiden Hauptpunkte oder Knotenpunkte 0·4 „;
also im Verhältnis zu den übrigen Grössen jedenfalls nicht verschwindend klein.

Die Entfernung der Netzhaut hinter dem Scheitel der Cornea 22·7 *mm*,
oder hinter dem zweiten Brennpunkte . . . . 7·6 *mm*.

Auf Grund dieser Angaben wären wir im Stande mit den in der citirten Arbeit angegebenen Mitteln die reellen Bilder aller in der

Nähe der Gesichtsaxe gelegenen Gegenstände zu construiren, freilich nur mit einem gewissen Grade von Annäherung, wie überall, wo es sich darum handelt die Natur vor- oder nachzubilden.

Schon auf Grund dieser Annäherung an die Wirklichkeit können wir auf Grund der früheren Auseinandersetzungen behaupten, dass die reellen Linsenbilder der Gegenstände der Aussenwelt und daher auch die Netzhautbilder keine einheitliche Centralcollineation bilden, sondern dass desto grössere Abweichungen von ihr stattfinden, je näher die Gegenstände dem Auge sind, dass also bereits bei dieser Annäherung keine Identität zwischen dem Sehprocess und dem centralen Projiciren herrscht. Wir begreifen daher schon bei dieser Annäherung, dass die Stellvertreter der wirklichen Gegenstände, deren Anfertigungen ein ganz anderer Vorgang zu Grunde liegt, als er beim Sehen stattfindet, im Allgemeinen andere Eindrücke in uns erwecken müssen, als die Gegenstände selbst, mit anderen Worten, dass uns diese Stellvertreter mehr oder weniger verzerrt erscheinen müssen.

Diese Überzeugung steigert sich, wenn wir uns die Voraussetzungen näher ansehen, auf welche die angeführte Theorie aufgebaut wurde. Da ist zunächst die Voraussetzung der Centralstrahlen, welche die Giltigkeit der untersuchten Collineation ungeheuer beschränkt, strenge genommen gilt diese Beziehung nur für Strahlen, welche mit der Axe unendlich kleine Winkel einschliessen; je weiter also die Gegenstände der Aussenwelt von dieser Axe entfernt sind, je grösser also die Winkel sind, welche die von ihnen ins Auge gelangenden Strahlen mit der Axe einschliessen, desto mehr weicht die Beziehung, in welcher die Gegenstände und ihre optischen Bilder stehen, von jener Raumcollineation ab, noch mehr aber von einer einheitlich centralen. Die allgemein stattfindende Beziehung ist im geometrischen Sinne eine höhere als einfache Collineation. Alle bisherigen Versuche, diese allgemeinere Beziehung mathematisch zu verfolgen und ein anschauliches Bild von ihr zu geben, scheiterten an der Unzulänglichkeit unserer Darstellungsmittel. Den bedeutendsten Schritt in dieser Richtung hat wohl Lippich in der Abhandlung Über Brechung und Reflexion unendlich dünner Strahlensysteme an Kugelflächen (Denkschr. der kais. Akad. d. Wissenschaften in Wien, 7. Mai 1877) und Über den Gang der Lichtstrahlen in einer homogenen Kugel (Sitzungsber. der kais. Akad. d. W. in Wien, 20. März 1879) gethan; es wird hier aber nur auf unendlich dünne

homocentrische Lichtstrahlenbüschel, welche jedoch endliche Winkel mit der Axe einschliessen, Rücksicht genommen und für solche werden Constructionen angegeben, welche sich den Gauss-Listing'schen anschliessen. Es will uns scheinen, dass der Grund, warum bei der allgemeinen Lösung des Problems bisher noch nicht die gehofften Fortschritte gemacht wurden, in der der Emanationstheorie entsprechenden Auffassung des Lichtprocesses liegt; sicher ist aber, dass wenn auch diese Auffassung in jeder Beziehung ausreichend wäre, die Strahlengeometrie, also insbesondere die Geometrie der Congruenzen und Complexe noch nicht genügend entwickelt ist, um ohne Schwierigkeiten auf dieses Problem angewendet werden zu können.

Für unsere Zwecke haben wir eine ganz genaue mathematische Theorie nicht unbedingt nothwendig; es scheint uns daher angezeigt, so lange eine strenge Theorie den an sie gestellten Forderungen nicht nachkommen kann, sich provisorisch mit den Ergebnissen feinerer Experimente zufriedenzustellen und auf Grund derselben unsere Vorstellungen über die in Rede stehende Beziehung zu bilden, wobei auch passend die Resultate der bisherigen Theorie als Näherung benützt werden können.

In dieser Beziehung scheint mir der photographische Apparat geradezu ein Modell des menschlichen Auges zu sein, an welchem wir alle wichtigeren Vorgänge studieren können. Das Wesen desselben ist:

Jeder leuchtende Punkt im Raume ist der Ausgangspunkt einer Wellenbewegung des Äthers; treffen diese schwingenden Äthertheilchen einen Gegenstand, z. B. eine mit Silberjodid überzogene Platte, so verwandelt sich die Lichtenergie in chemische Energie, welche eine Zersetzung dieser Verbindung bewirkt — wir sagen, die Platte absorbiert die Lichtstrahlen und wird dadurch nach Massgabe ihrer Entfernung von dem leuchtenden Punkte geschwärzt. Betrachten wir mehrere oder unendlich viele lichtaussendenden Punkte, welche die Oberfläche eines Körpers bilden, so sind sie gleichzeitig Ausgangspunkte von Wellenbewegungen; nach dem Princip der Unabhängigkeit solcher Bewegungen wird dann irgendein Theilchen Schwingungen ausführen, welche die Resultierende der von den einzelnen Anregungen herrührenden Componenten sind, das heisst die Schwärzung wird in diesem Falle dieselbe sein, als hätten wir die einzelnen Theilchen nach einander wirken lassen. Wir sagen, dass sich die Einwirkungen superponieren. Die Schwärzung der Tafel wird in den angeführten

Fällen ziemlich gleichförmig sein. Die Verhältnisse werden aber ganz anders, wenn wir zwischen den leuchtenden Punkt und die Silberodid-Platte eine Sammellinse oder ein System derselben einschalten. Theorie und Erfahrung lehren uns, dass ein Bündel von Lichtstrahlen, welche grössere Winkel mit der Axe einschliessen, selbst wenn der Scheitel auf der Axe liegt, umso weniger aber, wenn derselbe von ihr entfernt ist, von der Linse nicht mehr in einem Punkte vereinigt werden kann; mit anderen Worten, die Linse hat die Facultät einen Lichtstrahlenkegel in eine Lichtstrahlenregelfläche mit einem minimalen Querschnitt zu deformieren; oder im Sinne der Undulationstheorie, die Linse hat die Fakultät die innerhalb eines solchen Kegels stattfindende Wellenbewegung des Äthers in eine solche innerhalb einer Regelfläche mit einem minimalen Querschnitt umzusetzen; oder endlich, den Theil der Ätherenergie, welche von dem lichtaussendenden Punkte abgegeben und von dem Äther innerhalb der Linse aufgenommen wird, auf die innerhalb jenes Minimalquerschnittes schwingenden Theilchen zu übertragen, sie hier gleichsam zu concertrieren. Da aber die Energiesumme der in einem beliebigen Querschnitt dieser Regelfläche schwingenden Äthertheilchen offenbar constant sein muss (ähnlich wie die Menge einer incompressiblen Flüssigkeit im Rohre von wechselndem Querschnitt), so ist die Energie der einzelnen Theilchen eines solchen Querschnittes desto grösser, je kleiner der Querschnitt ist (ähnlich wie die Geschwindigkeit in dem erwähnten Falle). Diese Energie ist also am grössten in jenem Minimalquerschnitt; in der That ist dieselbe hier meist so gross, dass sie unser Gesichtsorgan in ähnlicher Weise wie der lichtaussendende Punkt selbst zu affizieren vermag, weshalb man diese Stelle das reelle Bild oder das optische Bild nennt. Hinter dem Minimalquerschnitt erweitert sich die Fläche wieder symmetrisch und die Energie der schwingenden Theilchen nimmt entsprechend ab; der Einfachheit wegen, und um unsere Vorstellungen zu fixieren, können wir uns eine solche Lichtregelfläche als ein Rotationshyperboloid denken, welches einen sehr eingezogenen Kehlkreis hat. Nun sehen wir leicht ein, dass die lichtaussendenden Punkte und die ihnen entsprechenden Querschnitte in erster Annäherung in der früher untersuchten Collineation stehen, namentlich ist dies für Punkte in der Nähe der optischen Axe der Fall.

Schon auf Grund dieser anschaulichen Auffassung können wir eine wichtige Folgerung ziehen. Es ist bekannt, dass jede Grösse in der Nähe ihres Minimums oder Maximums stationär bleibt; daher sind auch die Querschnitte und daher auch die Energie der einzelnen Äthertheilchen in der Nähe des Minimalquerschnittes stationär.

Wir können uns von diesen Umständen überzeugen, wenn wir die Silberjodidplatte in solche Lage bringen, dass ihre Ebene mit dem Minimalquerschnitt zusammenfällt, nachdem wir für Abhaltung fremden Lichtes gesorgt haben. In diesem Falle, wenn wir als den leuchtenden Punkt etwa einen sehr kleinen continuierlichen electrischen Funken, oder den Glanzpunkt eines kleinen Kügelchens gewählt haben, entsteht auf der Tafel ein schwarzer Fleck von der Grösse des Minimalquerschnittes, welcher dem leuchtenden Punkte entspricht; rücken wir aber die Tafel äusserst wenig gegen oder von der Linse (etwa mit Hilfe einer feinen Schraube) und sorgen gleichzeitig dafür, dass die Lichtregelfläche eine andere Stelle der Tafel trifft wie zuvor, so wird das neue Bild von dem alten in Bezug auf Grösse und Intensität kaum unterscheidbar; erst wenn die Verrückung der Platte verhältnismässig wächst, sodass die Platte von der Regelfläche einen grösseren Querschnitt herausschneidet, erhalten wir statt eines schwazen Punktes einen diesem Querschnitt congruenten Fleck von schwächerer Färbung — einen Zerstreuungskreis.

Sind die lichtaussendenden Punkte wieder auf der Oberfläche eines Körpers, so ist in erster Annäherung der Ort der entsprechenden Minimalquerschnitte eine in der bekannten Raumcollineation der gegebenen entsprechende Oberfläche; wären wir daher im Stande genau so geformte, mit Silberjodid überzogene Oberfläche herzustellen und dieselbe in die richtige Lage zu bringen, so wären wir wieder im Stande alle lichtaussendenden Punkte der Originalfläche scharf, punktweise abzubilden, die Abbildung würde also in diesem Falle in einer mehr oder weniger gleichmässigen Schwärzung bestehen und es würde ihr demnach jede Bildlichkeit abgehen. Die Bildlichkeit besteht also hauptsächlich nur auf dem Gegensatze der scharfen und verschwommenen Abbildung. Der hier gedachte Fall tritt aber in Wirklichkeit nicht ein, denn da ist die Fixierungsfläche entweder eine Ebene oder eine Kugelschale.

Bringen wir dieselbe in solche Lage, dass sie das räumliche optische Bild der gegebenen Gegenstände schneidet, mit anderen

Worten, dass ein Theil der Minimalquerschnitte in die Fixierungsfläche fällt, dann werden diese Stellen zu besonders scharfer Abbildung gelangen, dagegen entsprechen den übrigen Punkten des Gegenstandes nur Zerstreuungskreise, die desto grösser und daher desto unscheinbarer sind, je weiter sie von ihren zugehörigen Minimalquerschnitten liegen; sie superponieren sich, weil wir uns nach dem Voranstehenden die Lichtregelflächen als einander ungehindert durchdringend vorzustellen haben, sodass auch an einer und derselben Stelle mehrere Originalpunkte gleichzeitig aber unvollständig abgebildet erscheinen, wir nennen deshalb solche Stellen verschwommene Bilder.

Wir stellen deshalb die Tafel so, dass uns die am meisten interessierenden Punkte (gewöhnlich nahe Punkte, deren reelle Bilder am meisten von der Linse entfernt sind), scharf abgebildet werden; die reellen Bilder der entfernteren Punkte fallen dann vor die Fixierungsfläche und liefern desto mehr verschwommene Bilder, je weiter sie und daher die Originalpunkte von der Fixierungsfläche entfernt sind.

Diese Verschwommenheit, oder genauer, der Umstand, dass wir die Einzelnheiten nicht scharf abgebildet erhalten, ist also für uns ein wichtiger Anhaltspunkt für die Beurtheilung der Entfernung der abgebildeten Gegenstände.

Aus dem bisherigen geht nun hervor, dass es in unserer Macht liegt, lichtaussendende Punkte von beliebiger Entfernung — natürlich dürfen ihnen keine nahen vorgelagert sein — scharf zu fixieren; wir brauchen nur zu diesem Behufe die Platte mit derjenigen Ebene zusammenfallen zu lassen, welche der Ebene der scharf abzubildenden in der bekannten Collineation entspricht; wir erreichen dies aber auch, wenn wir die Linse in eine entsprechende Lage bringen, oder endlich, indem wir die gegenseitige Lage der Linse und Gegenstände und Fixierungsfläche unverändert lassen, dagegen die Lage der Fundamentalpunkte des Systems der Sammellinsen zweckmässig verändern, was beim photographischen Apparat mittelst feiner Verschiebung einer Partiallinse, die zum Einstellen dient, mittelst einer Schraube geschieht, beim Auge dagegen durch die Änderung der Krümmung der einzelnen Fibrillen der Augenlinse durch die Thätigkeit des Musculus ciliaris und der Zonnula Zinii, welche Facultät des Auges bekanntlich Accomodation genannt wird.

So kann man beispielsweise eine Landschaft von einem Zimmer aus photographisch durchs Fenster entweder so aufnehmen, dass die

näheren Theile der Landschaft schärfer, der Fensterrahmen dagegen verschwommen ausfällt und umgekehrt, dass der Rahmen schärfer als irgend welcher Theil der Landschaft abgebildet wird.

Wenn wir die in der vorhergehenden Abhandlung aufgestellte Formel

$$(1) \qquad xy = \alpha(\beta - \gamma) = const$$

in erster Näherung nicht nur für den Raum in der Umgebung der Axe, sondern allgemein gelten lassen, so sind wir in der Lage den Abstand x der Platte von dem hinteren Brennpunkte vorauszubestimmen, für welchen die Punkte der Ebene von dem Abstande y von dem anderen Brennpunkte scharf abgebildet werden, da wir bei jedem Linsensystem die Constanten α, β und γ durch Messungen bestimmen können. (Beim Auge sind dieselben für die Accomodation auf die Unendlichkeit gemessen worden.)

Die differentierte Gleichung

$$(2) \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha(\gamma - \beta)}{x^2} = -\frac{y}{x} = -\frac{y^2}{\alpha(\gamma - \beta)}$$

zeigt uns das Verhältnis an, in welchem die Verrückungen des Gegenstandes und des Bildes aus einer Lage scharfer Abbildung in die benachbarte stehen und zwar sagt dieselbe aus, dass das Verhältnis der Verschiebungen des Originals und des Bildes dem Quadrat der Entfernung der Originale proportional ist.

Betrachten wir dabei y als die unabhängig veränderliche also $dy = \delta = const$, dann ist:

$$dx = -\frac{\alpha(\gamma - \beta)\delta}{y^2} \qquad \text{d. h.}$$

die Verschiebungen des Bildes sind den Quadraten der Entfernungen der Gegenstände von dem ersten Brennpunkte des Linsensystems umgekehrt proportional.

Wir gelangen auf diese Weise zu präciseren Resultaten, als die wir früher durch den blossen Anblick der Figur gewonnen haben.

Wegen der Continuität des optischen Bildes liegt die Annahme nahe, dass mit starken Verschiebungen der Bilder in die Tiefe auch

stärkere seitliche Verschiebungen verbunden sind, sodass auch die Abweichungen von einer Collineation überhaupt für Gegenstände, die näher an der Linse liegen, viel stärker sind als für entferntere; daraus müssen wir aber unter anderem schliessen, dass die optischen Bilder und wie wir vorgreifend bemerken, daher auch die Netzhautbilder der Gegenstände der Aussenwelt und ihrer construierten perspectivischen Zeichnungen von einander umsomehr abweichen müssen, je kleiner die Distanz bei der Herstellung der letzteren gewählt wurde und dass hiebei noch die Abweichungen desto stärker werden, je grösser die Winkel der von der Zeichnung ausgesendeten Lichtstrahlen mit der Gesichtsaxe sind; das Vorhandensein perspectivischer Ränder bestätigt die Richtigkeit obiger Annahme.

Aus den angeführten Gleichungen können wir noch eine sehr bemerkenswerthe Folgerung ziehen, welche auf der bereits gemachten Bemerkung beruht, dass die Energie der Aetherschwingungen in der Nähe des Minimalquerschnittes stationär bleibt. Machen wir die Annahme, die freilich willkürlich ist, die aber auch nur wegen Einfachheit gemacht wird, dass das Intervall dieses stationären Zustandes für alle Regelflächen constant und zwar gleich ist $2dx$, so heisst dies, dass sich die Punkte einer Ebene von dem Abstande y auf allen Ebenen zwischen $x - dx$ und $x + dx$ fast gleich scharf abbilden; aber auch umgekehrt, dass auf einer im Abstande x befindlichen festen Ebene, sowol die Punkte der Ebene von dem Abstande $y - dy$ als auch $y + dy$ und aller dazwischenliegenden zu gleich scharfer Abbildung gelangen, wobei dy mit dx in dem durch die Gleichung (2) gegebenen Zusammenhang stehen.

Daraus müssen wir schliessen, dass bei einer bestimmten Lage der Fixierungsfläche nicht nur die Punkte einer gewissen Fläche, sondern einer ganzen Raumschichte zur schärfsten, beziehungsweise gleich scharfen Abbildung gelangen. Die letzte Gleichung lehrt uns, wie die Dicke dieser Raumschicht mit der Entfernung der Gegenstände wächst, es ist nämlich für $dx = \delta = const$

$$dy = -\frac{\delta}{\alpha(\beta-\gamma)} \cdot y^2 \qquad (3)$$

d. h.

die Dicke der Schicht des gleich scharf abgebildeten Raumes ist (bei unserer Annahme) dem Quadrat der Entfer-

nung dieses Raumes von dem einen Brennpunkte proportional.

Wenn wir eine wolgelungene Photographie einer Landschaft ansehen, so finden wir unsere Ausführungen bestätigt; es ist nämlich zunächst der vorderste Raum von kleiner Dicke ganz scharf abgebildet, dann folgen Schichtentöne von immer geringerer Schärfe, die immer grössere Räume umfassen, bis endlich alle sehr weit gelegenen Gegenstände durch einen grauen gleichmässigen Ton dargestellt sind. Diese Thatsache wird immer ausschliesslich der Wirkung der Luft — der sogenannten Luftperspective zugeschrieben, nach unseren Ausführungen wäre aber die Lichtabsorption durch die Luft nicht der alleinige Grund derselben.

Unsere Annahme $dx = \delta = const$ ist, wie gesagt, willkürlich; wir vermuthen eher, dass das Intervall des stationären Zustandes selbst eine Function von x ist, die durch zweckmässige Versuche zu ermitteln wäre, etwa ähnliche, wie die Scheiner'schen über die Accomodationsstrecken.

Das Ergebnis des Voranstehenden ist demnach, dass die Beschaffenheit des reellen Linsenbildes massgebend ist dafür, dass die photographische Platte durch das von den Gegenständen der Aussenwelt ausgesendete Licht derart absorbiert wird, oder dass sie von diesem Licht so angegriffen wird, dass wir beim blossen Anblick der fertigen Photographie, sofort räumliche Vorstellungen erhalten; kurz, die räumliche Beschaffenheit des reellen Linsenbildes ist der massgebende Grund, dass die photographische Platte, wenn der Ausdruck gestattet ist, gleichsam räumlich empfindet. So wie wir also die Einstellung der Linse des photographischen Apparates mit der Accomodation des Auges vergleichen konnten, so sehen wir in den letzten Umständen eine Analogie mit dem räumlichen Sehen.

Wenden wir Linsen von grosser Dicke an, so werden die Verhältnisse noch auffallender, die Linsen werden überhaupt nicht mehr im Stande sein, Punkte wieder als Punkte abzubilden, die Minimalquerschnitte werden hier nie so klein sein, dass sie als Punkte angesehen werden könnten, wovon man sich am besten beim Betrachten einer nicht retouchierten grossen Photographie, z. B. eines Porträts in Lebensgrösse überzeugt; bei genauer Betrachtung sieht man gleichsam ein System von Zerstreuungskreisen und es ist die Aufgabe des Retoucheurs, Uebergänge zwichen ihnen zu schaffen, es ist eine Mosaik, die erst in der Entfernung den Eindruck eines Bildes macht.

Die bisherigen Betrachtungen waren so geführt, dass sie ebenso für einen photographischen Apparat, wie für das Auge Geltung hatten. Um die Aehnlichkeit beider noch mehr darzuthun, müssen wir hier an einige bekannte Thatsachen aus der Theorie des menschlichen Auges erinnern.

Das Licht, welches die brechenden Medien des Auges durchdrang, trifft die Netzhaut, eine Ausbreitung des Sehnerven, hinter welcher sich die Aderhaut befindet, welche mit Blutgefässen und einer Mosaik von sechseckigen Zellen, die mit schwarzem Farbstoff angefüllt sind und den Zweck haben, das die Retina verlassende Licht zu absorbieren; die Retina selbst besteht aus einer ganzen Reihe von Schichten von Nervenzäpfchen, Stäbchen, Fasern, Kernen, Zellen etc. Durch anatomische Untersuchungen ist sichergestellt worden, dass die äusserste Zäpfchen- und Stäbchenschicht eine Art Mosaik bildet, deren Theilchen nach genauen Messungen am kleinsten, ungefähr 0·002 *mm* auf dem sog. gelben Fleck und der Netzhautgrube sind, wo auch diese Theilchen am zahlreichsten vorkommen.

Boll hat nun im Jahre 1876 die sehr wichtige Entdeckung gemacht, dass die Netzhaut im Normalzustand purpurroth gefärbt ist, welche Färbung, das sogenannte Sehpurpur, nach dem Tode verblasst, und Kühne hat sogar gezeigt, dass diese Färbung noch einige Stunden nach dem Tode dauert, wenn sie nicht vom Licht getroffen wird. Dieser Farbstoff spielt beim Sehen dieselbe Rolle, wie das Silberjodid bei der Photographie und Kühne ist es sogar gelungen, die in den Augen frisch getödteter Thiere zuletzt entstandenen Bilder zu fixieren, die er Optogramme nennt. Im lebenden Auge hat man die sofortige Erneuerung des verblassten Sehpurpurs bemerkt, die durch gewisse Zellen bewirkt wird, wenn das Auge einen Moment im Dunkeln bleibt, so dass das Auge thatsächlich ein photographischer Apparat ist, bei welchem sich die lichtempfindende Platte selbstthätig erneuert.

Beim Auge tritt aber noch ein neuer Umstand auf; nur wenn ein lichtaussendender Punkt sein Bild auf einem Theilchen der Zäpfchen- und Stäbchenmosaik entwirft, wird er als ein Punkt empfunden und so auch, wenn mehrere Punkte, ja sogar ganze Flächen sich auf einem solchen Theilchen abbilden; werden dagegen mehrere Mosaiktheilchen von einem Zerstreuungskreise getroffen, so empfinden wir ein verschwommenes Bild. Ueberraschend ist nun die Uebereinstimmung der Grösse und Anzahl der verschiedenen Linsenbilder (Minimalquerschnitte) der Lichtregelflächen und der Mosaiktheilchen, mit

welchen sie zusammenfallen müssen. Den schärfsten Bildern der Centralstrahlen entspricht auch die feinste Mosaik des gelben Flecks und der Netzhautgrube; dagegen entspricht den Punkten, die weiter von der Linsenaxe liegen und deren Licht bekanntlich durch die Linse nur in grösseren Minimalquerschnitten vereinigt zu werden vermag, auch eine gröbere Mosaik.

Den Inbegriff aller Punkte, deren Bilder auf die Retina gleichzeitig fallen können, nennen wir bekanntlich das Gesichtsfeld, welches, wie Helmholtz treffend bemerkt, einer Zeichnung gleicht, deren mittlerer Theil sauber ausgeführt, die Umgebung aber bloss skizziert ist.

Fällt ein Minimalquerschnitt mit einem Mosaiktheilchen der Stäbchen- und Zäpfchenschicht zusammen und übertrifft er dieselbe nicht an Grösse, so erregt die Summe der in ihm schwingenden Aethertheilchen die Nervenzäpfchen und Stäbchen und die Folge ist die Empfindung eines Punktes — es findet scharfe Abbildung statt; schneidet jedoch die Lichtregelfläche einen grösseren Theil der Netzhaut aus — einen Zerstreuungskreis —, so wird dieselbe Energiesumme eine grössere Partie von Mosaiktheilchen zu erregen haben, die Erregung jedes einzelnen wird daher schwächer sein, ausserdem werden sich die verschiedenen Zerstreuungskreise superponieren, so dass irgend ein Zäpfchen und Stäbchen von verschiedenen lichtaussendenden Punkten gleichzeitig erregt wird, so dass die resultierende Empfindung verschwommen sein muss. Ebenso wie beim photographischen Apparat müssen wir auch hier hervorheben, dass im Netzhautbilde nicht nur eine Fläche sondern ganze Raumschichten und zwar wieder annähernd nach dem oben angegebenen Gesetze, gleich scharf abgebildet werden.

Wie wir schon früher bemerkt haben, können wir durch die Thätigkeit des Musculus ciliaris die Cardinalpunkte des dioptrischen Systems im Auge so ändern, dass innerhalb gewisser Grenzen Gegenstände beliebiger Entfernung auf der Netzhaut scharf abgebildet werden. Diesen Umstand nennen wir die Accomodation des Auges, während die Dicke der Raumschichte, welche sich bei der jeweiligen Accomodation scharf abbildet, die Accomodationsstrecke heisst, und für welche wir nach dem Früheren in erster Annäherung, den Ausdruck verwenden können:

$$S = -\frac{\delta}{\alpha(\beta-\gamma)} \cdot y^2 \tag{4}$$

oder bei noch gröberer Annäherung

$$(5) \qquad S = const \, . \, y^2$$

d. h. Die Accomodationsstrecke ist (bei der oben gemachten Annahme über das stationäre Intervall) dem Quadrat der Entfernung, auf welche wir das Auge accomodieren, proportional.

Diese Formel harmoniert thatsächlich ganz gut mit den Ergebnissen der bekannten Versuche des Paters Scheiner und es erklären sich auf Grund dieser Betrachtung folgende Umstände in sehr ungezwungener Weise.

Bei der Accomodation auf sehr nahe Gegenstände werden Punkte, deren Tiefen-Differenzen nicht beträchtlich gross sind, zu einer scharfen, detaillierten Abbildung auf der Netzhaut gelangen, aber bereits die Bilder von mässig entfernten Gegenständen verschwommen sein, der Grad der Schärfe der Abbildung variiert hier sehr rasch, und dies halten wir, wie wir vorgreifend erwähnen, für den Grund dafür, dass wir kleine Entfernungen mit ziemlicher Präcision abschätzen; bei der Accomodation auf entfernte Gegenstände werden diese Tiefendifferenzen, für welche die Netzhautbilder noch gleich scharf sind, sich sehr rasch vergrössern, daher wir auch nicht mehr im Stande sind, dieselben so gut wie im früheren Falle zu beurtheilen; ja es kann hier noch etwas anderes eintreten. Weil die Bilder von sehr grossen Räumen auf immer kleinere Räume angewiesen sind, so muss es geschehen, dass die Minimalquerschnitte von sehr vielen lichtaussendenden Punkten auf ein einziges Mosaiktheilchen fallen und daher nur eine Empfindung hervorbringen, welcher noch übrigens aus nahe liegenden Gründen desto kleinere Intensität zukommt, je entfernter jene Punkte sind; ja diese Intensität kann so gering werden, dass sie von uns gar nicht empfunden wird. Solche Bilder könnten passend überscharfe genannt werden; so können die Netzhautbilder der Doppelsterne, einzelner Partieen des Laubwerkes entfernter Bäume, der Bäume eines entfernten Waldes, des Fensterkreuzes oder selbst der Fenster eines entfernten Hauses etc. so klein werden, dass wir sie als Punkte, beziehungsweise gleichförmige Flächen empfinden. Andererseits muss auch zugegeben werden, dass, wenn wir Stellvertreter solcher Gegenstände so herstellen, dass ihre Netzhautbilder diese Beschaffenheit haben, dass wir dann bei dem Anblicke derselben, wenn auch unsere Accomodationsempfindungen auf etwas anderes schlies-

sen lassen, auf Grund unseres sonstigen Erinnerungsvermögens die Gegenstände selbst in die entsprechende Entfernung in unseren Vorstellungen versetzen. Schliesslich sei noch erwähnt, dass im Ruhezustande eines normalen Auges eine Accomodation auf die Unendlichkeit stattfindet.

Auf Grund dieser Betrachtung glauben wir der Ansicht entgegentreten zu dürfen, von deren Richtigkeit wir uns durch eigene Versuche nie überzeugen konnten, nämlich, dass wir es gar nicht wahrnehmen können, wenn ein lichtaussendender Punkt seine Lage in dem ihm entsprechenden Sehstrahl ändert. Es können hiebei offenbar nur zwei Fälle eintreten. Entweder bleibt das Auge unverändert und dann wird, wenn etwa in der Anfangsposition ein scharfes Bild auf der Netzhaut entstand, desto grösserer Zerstreuungskreis entstehen, je weiter die zweite Lage von der ersten entfernt ist, und die Abbildung wird daher desto undeutlicher, diese Aenderung der Deutlichkeit ist für uns aber ein Kriterium für die Entfernungen; oder, wir fixieren den Gegenstand, dass heisst, wir accomodieren unser Auge fortwährend auf denselben, dann wird uns aber die Erinnerung an die Aenderung der dazu nöthigen Muskelanstrengung die Lagenänderung des Gegenstandes zu unserem Bewusstsein bringen.

Man kann dies durch einfache Formeln wieder genauer präcisieren. Machen wir der Einfachheit wegen die an sich willkührliche Annahme, dass gleiche Muskelanstrengungen nöthig sind, um das reelle Bild um gleiche Strecken durch die Aenderung der Cardinalpunkte unseres dioptrischen Systems zu verschieben. Dann muss in der Formel

$$dx = -a(\gamma - \beta)\frac{dy}{y^2}$$

die Verschiebung dx durch Muskelanstrengungen rückgängig gemacht werden, damit der Minimalquerschnitt wieder auf die Netzhaut fällt. Unserer Annahme zufolge soll

$$dx = \pi d\varepsilon$$

sein, wobei π ein Proportionalitätsfactor, $d\varepsilon$ die Aenderung der entsprechenden Muskelanstrengung bedeutet. Setzen wir noch

$$\frac{d\varepsilon}{dy} = E,$$

so dass also E die Aenderung der Muskelanstrengung für die Einheit der Verschiebung bedeutet, so wird diese Grösse massgebend sein für unsere Empfindlichkeit der Entfernungsänderung, weshalb wir sie auch mit dem Namen Empfindlichkeit der Entfernungsänderung oder kurz Raumempfindlichkeit belegen können, dann erhalten wir aber:

$$E = -\frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\pi} \cdot \frac{1}{y^2}$$

oder bei noch gröberer Annäherung:

$$(4) \qquad E = \frac{const}{y^2} \qquad \text{d. h.}$$

Die Raumempfindlichkeit ist dem Quadrate (fortwährend auf Grund der obigen Annahme über das stationäre Intervall) der Entfernung umgekehrt proportional.

Die Formel sagt also aus, dass wir es sehr leicht wahrnehmen können, wenn ein naher Gegenstand seine Entfernung ändert, dass dagegen ein entfernter Gegenstand seine Entfernung sehr stark ändern müsse, wenn wir dies wahrnehmen sollen und diese Resultate stimmen sehr wohl mit unseren Erfahrungen überein. Nebenbei bemerken wir, dass nach dieser Darstellung die in Rede stehende Empfindlichkeit der reciproke Werth der Accomodationsstrecke ist, was uns bei einiger Ueberlegung sehr annehmbar erscheinen muss. Endlich müssen wir bemerken, dass unsere Annahme über die Wahrnehmung der Aenderung der Muskelanstrengung nicht dem psychophysischen Gesetz von Fechner entspricht; wir wollten nur eben deutlich machen, dass, welches immer die richtige Annahme ist, die Beziehung gilt

$$E = F(y) \qquad \text{d. h.}$$

dass die erwähnte Empfindlichkeit der Aenderung der Entfernungen eine gewisse Function dieser Entfernungen selbst ist, deren Form freilich durch zweckmässige Versuche bestimmt werden müsste.

Die unmittelbare Consequenz dieses Ergebnisses ist die, dass wir auch mit einem Auge die Aussenwelt körperlich und nicht flächenhaft sehen; denn die Beurtheilung der Grösse und Lage eines Gegenstandes beruht beim monocularen Sehen hienach auf denselben Umständen wie beim bi-

nocularen, nur gesellt sich bei dem letzteren zu den übrigen ein neuer bestimmender Umstand. Fixieren wir nämlich einen Punkt mit beiden Augen, so bilden die in diesem Punkte sich schneidenden Gesichtsaxen einen bestimmten Winkel, den Gesichtswinkel. Die Erinnerung nun an jene Energie, welche nothwendig war diesen Gesichtswinkel zu bilden, oder allgemeiner, die gegenseitige Lage und Form der beiden Augen zu Stande zu bringen, ist ein neuer Factor zur Beurtheilung jener Entfernung; er ist ausschlaggebend beim Vergleiche relativ kleiner Entfernungen naher Gegenstände, weil sich hier der Gesichtswinkel stark ändert, dagegen irrelevant bei der Beurtheilung sehr entfernter Gegenstände, weil in diesem Falle die Aenderungen dieses Winkels sehr klein sind. Dass also beim binocularen Sehen die Helligkeit und somit die Deutlichkeit, dass ferner durch Mitwirkung des Gesichtswinkels die Sicherheit der Abschätzung namentlich kleiner Entfernungen vergrössert wird, kann nicht geleugnet werden; es wirken eben mehrere Faktoren zur Erreichung desselben Zweckes, der aber auch bei genügender Uebung ohne Intervention des letzten Factors annähernd erreicht wird.

Aus diesen Sätzen ergibt sich aber eine Schlussfolgerung, welche auf den Umstand, dass uns perspectivische Darstellungen über Entfernungen bedeutend zu täuschen vermögen so wie auf die Grenzen dieser Täuschung ein helles Licht wirft, sie enthält die Beantwortung der Frage:

I. Inwiefern vermögen uns malerische Darstellungen zu täuschen?

Die Abbildung eines Gegenstandes wird nur dann eine objective Täuschung bewirken, wenn alle Empfindungen, die sie hervorruft, also die sich auf Energie und Deutlichkeit der Erregung der Netzhaut als auch auf den Akt der Accomodationen beziehen, mit denen, welche der Gegenstand selbst erweckt, übereinstimmen; die Täuschung hört auf vollkommen zu sein, wenn sich eine oder mehrere dieser Empfindungen von den entsprechenden des Originals unterscheiden, dies gilt namentlich von den Empfindungen der Accomodation; daher können wir den Satz aussprechen, dass eine malerische Darstellung nur dann eine objective Täuschung bewirken kann, wenn die darauf abgebildeten Gegenstände innerhalb des Raumes liegen, für welche sich die oben angeführte Empfindlichkeit nicht ändert, oder, wenn sie innerhalb der Accomodations-

strecke liegen, welche zu der Hauptdistanz des Gemäldes gehört, oder ganz populär gesagt, wenn sie beiläufig dort abgebildet sind, wo man sie in Wirklichkeit vermuthet; denn nur in diesem Falle werden nebst den Empfindungen des Netzhautbildes auch die Empfindungen über die Lage und Form des dioptrischen Systems des Auges, welche Empfindungen den übrigen ebenbürtig sind, sodass erst alle zusammen die Bildung der richtigen Vorstellung veranlassen, für Wirklichkeit und Bild dieselben sein.

Daraus schliessen wir, dass der Spielraum für unmittelbare Täuschung mit der Entfernung der Bildfläche nach obigem Gesetz wächst. Einige Beispiele werden die Richtigkeit dieser Behauptung bestätigen. Es ist bekannt, dass man z. B. eine Fliege auf irgend einer Fläche z. B. auf dem Zifferblatt einer Uhr, oder eine Wespe auf einer gemalten Traube etc. so virtuos darstellen kann, dass jeder versucht wäre, sie zu verscheuchen. Wir erinnern an den berühmten Wettstreit zweier antiken Maler, von denen einer Trauben so schön gemalt hat, dass Vogel herbeikamen, sie zu picken, während der andere einen Vorhang so virtuos darstellte, dass ihn sein Gegner zurückschlagen wollte. Wenn wir dies vielleicht als eine liebenswürdige Uebertreibung ansehen mögen, so sehen wir doch die Umstände, auf welche es allein ankommt, aus solchen Beispielen deutlich heraus. Weiter können wir täglich im Theater die Wahrnehmung machen, dass wir mitunter in ernste Zweifel kommen, ob dieser oder jener Gegenstand z. B. ein Möbelstück oder Gesims etc. gemalt ist oder wirklich existiert; dieses wird aber nicht so sehr der Fall sein, wenn wir die Darstellung einer langen Säulenhalle oder Allee vor uns haben, wiewohl auch da, namentlich bei grossen Hauptdistanzen grosse Erfolge erzielt werden können. Dies ist auch der Grund, warum die Landschaftsmaler nur in beschränktem Masse vollständige Täuschung bewirken können.

Betrachten wir nämlich eine gemalte Landschaft oder die Photographie einer Landschaft oder einer langen Gasse oder des Inneren einer Kirche, so erscheinen uns dieselben im ersten Moment flächenhaft; das Bewusstsein, dass wir eine nahe Fläche fixieren, ist eben im ersten Momente ausschlaggebend; höchstens die Bilder derjenigen Gegenstände, welche in Wirklichkeit unmittelbar hinter der Bildfläche sein sollen, verursachen gewisse Täuschung. Betrachtet man aber das Gemälde längere Zeit mit ruhendem Auge, womöglich von dem richtigen Standpunkte, so nimmt man wahr, dass

im Netzhautbilde dieser Darstellung die geometrischen Gesetze, also Abnehmen gleicher Strecken, Convergenz paralleler Geraden und Ebenen etc., ferner die Energieverhältnisse der Erregung der Netzhaut, also Helligkeit naher Flächen und detaillierte Abbildung derselben, dagegen Mangel an Licht und Verschwommenheit oder summarische Abbildung weit entfernter Flächen etc. ebenso zum Ausdrucke kommen wie im Netzhautbild des Originals; diese letzteren Erinnerungsgattungen gerathen nun in Widerstreit mit den Accomodationserinnerungen und werden gewöhnlich siegreich, mit anderen Worten, wir suchen unter dem Eindruck der letzten Einwirkungen die Accomodationsempfindungen zu unterdrücken und je mehr uns dies gelingt, desto mehr sehen wir die dargestellten Gegenstände, nach und nach aus der Bildfläche heraustreten — die Künstler sagen, dass sich die Gegenstände trennen — und vor unseren Augen gleichsam körperliche Formen annehmen, wir sehen also die Täuschung gleichsam hinein und es ist ausser Zweifel, dass dies dem geübten Künstler und Amateur in weit höherem Grad gelingt als dem ungeübten Laien.

Ist die Hauptdistanz des Bildes und also auch des Beobachters sehr gross, wie dies bei den Dekorationen grosser Theater der Fall ist, so ist die zu dieser Hauptdistanz gehörige Accomodationsstrecke ungeheuer gross, daher auch der Raum, für welchen sich die Empfindlichkeit des Beobachters nicht merklich ändert; dies ist der Grund, warum man bei Theaterdekorationen so überraschende Täuschungen erreichen kann, welche noch durch verständige und zweckmässige Beleuchtung erhöht werden können. Noch verblüffender sind aber die Täuschungen, welche aus denselben Gründen von den Panoramen erzielt werden, auf welche wir noch später zurückkommen werden.

Bevor wir zur Beantwortung weiterer Streitfragen der Perspective übergehen, müssen wir noch folgende Bemerkung machen. Wir haben in dem Vorhergehenden versucht, den Verlauf des von der Aussenwelt ins Auge gedrungenen Lichtes in unserem Sehorgan gleichsam zu verfolgen und eine genaue Beschreibung — soweit dies im Rahmen einer Abhandlung möglich ist — der im Auge stattfindenden Wellenbewegung des Äthers angestrebt, um möglichst klar die näheren Umstände bei der Erregung der Nerven des Sehorgans zu erkennen. Wohin sich diese Erregung, die Empfindungen, fortpflanzen, und wie aus ihnen durch psychischen Akt die Vorstellungen gebildet werden, dies zu untersuchen, war nicht unsere Sache; wenn

wir dennoch auf verschiedenen Stellen von Vorstellungen sprachen, so war dies unter der stillschweigend gemachten Voraussetzung, dass jedesmal dieselben Vorstellungen wiederkehren müssen, wenn die nämlichen Erregungen unserer Sinnesorgane stattfinden, dass aber diese Vorstellungen durch mannigfaltige vorhergehende Erfahrungen bedingt sind. Wenn wir also im Vorhergehenden nahe gelegt haben, dass in den Modificationen, welche das Licht in unserem dioptrischen Apparat erleidet, alle Vorbedingungen für das räumliche Sehen enthalten sind, so behaupten wir nicht, dass man schon deshalb räumlich sieht, weil man diesen Apparat besitzt, dass man aber in den Eigenthümlichkeiten der Einwirkung desselben auf die diesbezüglichen Nerven das Material besitzt, aus welchem man sich auf uns unbekannte Art, auf psychischen Wege, die jeweilige Aussenwelt aufbaut, wobei die sämmtlichen vorhergehenden Erfahrungen unserer übrigen Sinne gleichsam als Arbeiter und Werkzeuge verwendet werden; fehlen diese ganz, oder sind dieselben dürftig vorhanden, wie bei operierten Blinden oder kleinen Kindern, dann wird freilich jenes Material unverwerthet bleiben.

Wir wollen nun zur Beantwortung folgender Fragen übergehen, wobei sich aber einige Wiederholungen des bereits Gesagten des Zusammenhanges wegen nicht gut vermeiden lassen.

II. Ist eine Photographie eine genaue ebene Perspective?

Aus dem Vorhergehenden ergibt sich die Antwort, dass dies angenähert der Fall ist in der Umgebung des Schnittpunktes der Linsenaxe mit der Bildebene, dass aber desto grössere Abweichung stattfindet, je mehr man sich der Peripherie der Photographie nähert. Die Abweichung könnte man am besten ermitteln, indem man einfache Gegenstände z. B. geometrische Gestalten, einmal perspectivisch für ein bestimmtes Centrum construiert und dann für denselben Punkt photographiert. Es ist nahe liegend, dass diese Abweichungen bei jedem Apparat anders ausfallen und ferner, dass derjenige Apparat die natürlichsten Bilder liefern wird, bei welchen die Fundamentalpunkte dasselbe Verhältnis befolgen, wie beim menschlichen Auge und dass Photographien desto grössere Zerrbilder geben, je weniger diese Verhältnisse eingehalten sind.

III. Kann eine construierte ebene Perspective von beliebiger Grösse natürliche Vorstellungen erwecken?

Dieses könnte nur der Fall sein, wenn das optische Bild und daher auch das Netzhautbild desselben identisch wäre mit dem des Originals und dieses könnte wieder nur sein, wenigstens in geometrischer Hinsicht, wenn der Sehprocess so stattfände wie er durch reduziertes Auge veranschaulicht wird. Nun haben wir aber im Sinne der Undulationstheorie erkannt, dass von den lichtaussendenden Punkten Ätherschwingungen nach allen Richtungen sich geradlinig fortpflanzen, dass ein Theil derselben die Pupille trifft und dass der durch den leuchtenden Punkt als Scheitel und die Pupille als Basis bestimmte Kegel in eine Regelfläche mit minimalem Querschnitt verwandelt wird, deren jeweiliger Schnitt mit der Retina das Netzhautbild jenes Punktes ist, in dem die in diesem Querschnitte schwingenden Äthertheilchen ihre Energiesumme an die Molecule der Nervenperipetie übertragen. Diese der Wirklichkeit näher kommende Auffassung ist insoferne unbequem, als man gewohnt ist Punkte durch Punkte und nicht durch Flächen abzubilden, ausserdem bietet sie grosse Schwerigkeiten bei der Nachbildung; man war also immer bemüht, statt des wirklichen einen einfacheren Process anzunehmen und stellte sich zufrieden, wenn die Ergebnisse der einfacheren Annahme mit der Wirklichkeit bis zu einem gewissen Grad übereinstimmten. Als diese nicht zutreffenden Annahmen könnten wir anführen:

α) Dass bei einem Linsensystem die von einem Punkte ausgehenden Lichtstrahlen wieder in einem Punkte vereinigt werden. *β*) Die stillschweigende Annahme, dass diese Punkte sämmtlich auf die Retina fallen. *γ*) Dass die lichtaussendenden Punkte und ihre Bilder sämmtlich auf Geraden liegen, die durch einen festen Punkt, den Kreuzungspunkt gehen und welche man Sehstrahlen nennt. Setzt man sich über diese Unrichtigkeiten hinweg, begnügt man sich mit dem reducierten Auge, so kann man allerdings sagen, dass der Sehprocess eine Centralprojection ist; man muss dann aber darauf gefasst sein, dass die Nachahmungen oder Vorbildungen, denen das Princip der Centralprojection zu Grunde liegt, nicht unter allen Umständen genaue Stellvertreter der Wirklichkeit sein werden, sondern gleichsam Zeugen, die die Unrichtigkeit jener Annahmen verrathen. Für die Beurtheilung dieser

Abweichungen ist erstens eine genaue Betrachtung der Gauss-Listingschen Raumcollineation, ferner die Bemerkung, dass dieselbe nur für die nächste Umgebung der Axe gilt. Die Verwandtschaft aber, welche allgemein gilt, ist höherer Gattung und weicht von jener umsomehr ab, je weiter man sich von der Axe entfernt. Daraus ergibt sich aber, dass, wenn Objekte, welche Stellvertreter gegebener Gegenstände sein sollen, unter Zugrundelegung der Centralprojection geschaffen werden, die optischen Bilder und die Netzhautbilder derselben von denen der Originale abweichen werden, umsomehr, je näher sie der Peripherie des Gesichtsfeldes gelegen sind; solche Theile der stellvertretenden Objekte — der Bilder — können daher auf uns nicht mehr denselben Eindruck machen, wie die Originale. Wir sagen, dass solche construierte Zeichnungen am Rande verzerrt erscheinen und nennen diese Verzerrungen perspectivische Ränder. Die oben gemachten Erwägungen lehren uns, dass dieselben desto auffallender sein werden, je kleiner die Hauptdistanz ist.

Wir behaupten also mehr als wir beweisen können, wenn wir sagen, dass unsere construierten perspectivischen Zeichnungen genaue Stellvertreter der Wirklichkeit sind und machen auf die darstellenden Künstler unberechtigte Ansprüche, wenn wir verlangen, dass sie unter keinen Umständen von den Resultaten der Construction abweichen. Wir billigen in dieser Hinsicht den Ausspruch Gourneries (pag. 176): „Le problème de la perspective n'étant pas susceptible d'une solution rigoureuse, c'est l'expérience qui doit indiquer les altérations que l'oeil accepte et qu'il répousse." Dabei sind wir weit entfernt seiner Ansicht beizupflichten (§. 249 und 261), dass z. B. jede krumme Fläche von einem besonderen Augepunkte, welcher vor ihr liegt, perspectivisch abgebildet werden müsse und dann in ihre entsprechende Lage auf dem Bilde zu bringen sei, wobei dann die einzelnen Resultate des Ensembles wegen modifiziert werden müssen, welchen Vorgang man tricherie nennt. Denn dieses Verfahren steht auch mit dem allgemeiner aufgefassten Sehprocess in grobem Widerspruche. Unser Standpunkt ist also der:

Wenn wir eine Perspective constructiv verfertigen, so werden wir unter allen Umständen an der Einheit des Centrums festhalten, wir werden uns aber bewusst sein, dass wir statt eines complizierteren Vorgangs einen einfacheren setzen, dass unser Verfahren also

eine erste Annäherung ist, und werden daher keinen Anstand nehmen, wenn die aus dieser Annäherung hervorgegangenen Unterschiede zwischen der Wirkung der Wirklichkeit und der construierten Zeichnung dem Auge fühlbar werden (und dies wird natürlich bei einem geübten Künstler in ungleich höheren Masse der Fall sein als bei einem Laien) die letztere zu corrigieren. Unter dieser Einschränkung kann man den Sehprocess als einen centralen auffassen.

Ausser den perspectivischen Verzerrungen, welche mit unrichtigem Standpunkte des Beobachters zusammenhängen, und welche sich, wie wir gesehen haben, geometrisch verfolgen lassen, gibt es also noch perspectivische Ränder, welche durch den ganzen Bau des Auges bedingt sind und auf welche wir jetzt näher eingehen werden.

Nimmt das Auge genau die Lage an, für welche eine perspectivische Zeichnung auf constructivem Wege hergestellt wurde, sodass also die Augenaxe mit der Normale zur Bildebene zusammenfällt und ebenso der sogenannte Sehpunkt mit dem Hauptpunkt, so wird man die Wahrnehmung machen, dass die Zeichnung, die wir mit ruhendem Auge betrachten, den günstigsten Eindruck um diesen Hauptpunkt herum macht, indem diese Stellen Vorstellungen erwecken, welche in geometrischer Hinsicht sehr präcise und dann sehr detailliert sind. Die Maler wissen dies sehr wohl und wählen daher diese Stelle zur Darstellung des wichtigsten Momentes und arbeiten diese Stelle mit der grössten Sorgfalt aus. Wir begreifen nach unseren Auseinandersetzungen den Grund dieser Erscheinung. Die von der besagten Stelle ausgehenden Strahlen können noch als centrale angesehen werden, somit gilt für sie die erste Annäherung an die Centralcollineation und somit liegen noch die entsprechenden Punkte des Gegenstandes, der Perspective und der Netzhautbilder beider in einer Geraden; ausserdem fällt dieser Theil des Netzhautbildes auf den gelben Fleck mit der Netzhautgrube, also die Orte der feinsten Unterscheidbarkeit. Je weiter aber irgend eine Partie einer construierten Zeichnung von dem Hauptpunkte entfernt ist, desto verschiedener ist der geometrische Character des Eindruckes, welchen die constructiv dargestellten Gegenstände und die wirklichen hervorrufen, ausserdem ist aber weder der vom dargestellten noch der vom wirklichen Gegenstande herrührende Eindruck so intensiv und detailliert wie der oben besprochene; denn die von den in Rede stehenden Stellen ausgehenden Lichtstrahlen bilden mit der optischen Axe viel zu grosse Winkel, um als centrale

aufgefasst werden zu können und daher haben die über letztere aufgestellten Sätze für jene keine Giltigkeit mehr, namentlich der Satz, dass ein Punkt des Originals, des construierten Bildes und die Netzhautbilder beider in einer durch den „Kreuzungspunkt gehenden Geraden liegen; wir müssen im Gegentheil daran festhalten, und die Wirklichkeit bestätigt es, dass so gelegene Gegenstände und ihre construierten Perspectiven verschiedene Netzhautbilder haben und daher letztere verzerrt erscheinen müssen. Ausserdem wissen wir aus der Topographie der Retina, dass solche Netzhautbilder auf Stellen fallen, welche an Nervenzäpfchen und Stäbchen nicht so reich sind wie der gelbe Fleck, daher die kleinere Helligkeit und minder feine Detaillirung des Eindruckes. Diese Umstände sind den Malern aus Erfahrung sehr wohl bekannt, daher arbeiten sie diese Partien nicht mit solcher Liebe aus, skizzieren dieselben auch nicht so, wie dies fürs ruhende Auge nach einer früher gemachten Bemerkung übers Gesichtfeld hinreichend wäre, damit man auch befriedigende Eindrücke erhält, wenn man das Auge aus der ursprünglichen Lage herausdreht, um andere Partieen zu fixieren, oder, wie man sich ausdrückt, um Details zu suchen.

Bei dieser Gelegenheit müssen wir eine besondere Schwierigkeit hervorheben. Wenn ein Maler ein grosses Bild nach der Natur verfertigt, so muss er jeden Gegenstand, welchen er zeichnet, genau fixieren d. h. so ansehen, dass derselbe nur Centralstrahlen ins Auge sendet. Liegt ein Gegenstand A so, dass sein Bild in die Nähe des Hauptpunktes fällt, so darf er den Gegenstand so zeichnen, dass die Eindrücke des fixierten Bildes und des fixierten Gegenstandes identisch sind, oder kurz, wie er ihn sieht, weil beide beim ruhenden Auge mit Centralstrahlen wirken. Liegt aber ein Gegenstand B so, dass sein Bild weit vom Hauptpunkte fällt, so sollte der Maler, weil das fertige Bild bekanntlich mit ruhendem Auge betrachtet werden soll, wobei also A fixiert wird, auch beim Zeichnen des Gegenstandes B den Gegenstand A fixieren. Dies geht natürlich nicht an, er fixiert daher B, darf aber nicht so zeichnen wie er sieht, sondern wie B erscheinen würde, wenn er A fixierte; denn im ersten Falle wirkt B mit Centralstrahlen, im zweiten nicht, daher die Verschiedenheit der Eindrücke. Das Richtige zu treffen ist die Sache des echten Talentes, aber auch der Controlle, welche der Maler übt, indem er von dem richtigen Standpunkte den Gegenstand A fixierend den Eindruck des dargestellten Gegenstandes B sondiert und wenn derselbe nicht befriedigt, corri-

giert; es passt hier der bekannte Ausspruch Schreibers: „Richtig sehen und perspectivisch richtig zeichnen, sind zwei wesentlich verschiedene Dinge."

Nach diesen Erwägungen wird es nicht schwer sein, den Unterschied zwischen einem Gemälde und einer construierten Perspective anzugeben. Das erste hat die Bestimmung mit ruhendem Auge betrachtet zu werden, also bei Fixierung eines bestimmten Gegenstandes denselben Eindruck (abgesehen von Accomodationsempfindungen) wie das Original zu machen und muss daher von einer Centralprojection um somehr abweichen, je mehr man sich der Peripherie nähert; es wird daher desto mehr verzerrt erscheinen, je mehr wir das Auge aus jener Lage herausdrehen, um diese Stellen zu fixieren, weil diese dann mit Centralstrahlen wirken, während sie in richtiger Augenstellung mit Randstrahlen wirken. Eine construierte Perspective wird dagegen immer, so gross sie auch sein mag, an jener Stelle unverzerrt erscheinen, die wir gerade fixieren und verzerrt an jenen, die mit Randstrahlen wirken, vorausgesetzt, dass wir richtigen Standpunkt einnehmen und dass die Bedingungen des deutlichen Sehens überhaupt nicht verletzt sind.

Nachdem wir das Bild bei ruhendem Auge in seiner Totalität anf uns einwirken liessen, in welchem Falle wir von allen seinen Theilen, wenn es meisterhaft ausgeführt ist, denselben Eindruck erhielten, wie vom Original selbst, fühlen wir uns versucht, andere Stellen als den Hauptpunkt zu fixieren, von welchem wir früher weniger deutliche Eindrücke erhielten, wir „untersuchen die Details" und da nehmen wir aus dem oben angeführten Grunde freilich wahr, dass dieselben um so mehr verzerrt erscheinen, je weiter sie vom Hauptpunkte entfernt sind, und zwar wird dies beim Künstler und Kenner, der seine Eindrücke besser zu analysieren trifft, in höherem Grade sein wie beim Laien. Dieses beeinträchtigt den Kunstgenuss und deshalb suchte man stets diesen Übelstand auf ein Minimum zu reducieren, indem man dem Bilde bei bestimmter Hauptdistanz nur eine solche Grösse gab, dass diese Verzerrungen nicht so auffallend sind und da hat es sich aus Erfahrung ergeben, dass die Bilder im allgemeinen innerhalb eines gewissen Gesichtskegels liegen müssen, dessen Öffnungswinkel unter einer bestimmten Grenze sein muss. Dies führt uns aber zur Beantwortung der Frage von fundamentaler Wichtigkeit:

IV. Wie hat man bei ebenen Perspectiven die Hauptdistanz zu wählen?

Diese Grösse zu bestimmen ist die Sache der Erfahrung und diese hat ergeben, dass die Öffnung des Gesichtskegels abhängig ist von der Augendistanz, dann von der Grösse und Form der darzustellenden Objekte selbst. Verschiedene Meister haben ihre Erfahrungsregeln angegeben: Leonardo de Vinci einmal, dass die Distanz dreimal so gross sei wie der dargestellte Gegenstand, ein ander Mal doppelt so gross, wie die Breite des Bildes; Desargues und Bosse adoptierten die letztere Regel; Peruzzi und Serlio nehmen die Distanz gleich $1^1/_2$fachen Breite des Bildes; Chambray wählt als Augendistanz die Höhe des über der Breite des Bildes construierten gleichseitigen Dreieckes; Montabert nimmt die Distanz grösser als den Radius des dem grössten Gegenstand umschriebenen Kreises; Valencienne nimmt die dreifache Breite des Bildes als Distanz; Tilscher ist der Ansicht, dass keine Verzerrungen auftreten können, wenn der Gesichtskegel mit dem Kegel des deutlichen Sehens zusammenfällt, der bekanntlich ein Rotationskegel ist, dessen Erzeugende mit der Axe einen Winkel von beiläufig 20^0 einschliessen.

Wie man sieht, variiren diese Angaben; dazu kommt aber noch, dass diese Regeln selbst von ihren Autoren nicht immer befolgt werden; so berichtet Gournerie, dass Leonardo de Vinci in einem seiner Bilder nur die einfache Breite als Distanz verwendete, und dass so auch Raphael in einigen seiner grossen, berühmten Gemälde that; diese Regeln erscheinen daher alle als zu absolut, wie die letzten Beispiele beweisen, um so mehr aber, wenn wir an panoramatische Darstellungen denken, bei denen der beschränkende Gesichtskegel ganz die Bedeutung verliert.

Über alle diese Erscheinungen gibt nun wieder die oben angeführte Raumcollineation genügenden Aufschluss. Wie wir dort erkannt haben, ändern sich die Linsenbilder und somit auch die Netzhautbilder am stärksten, wenn die Originale ihre Lage in der Nähe der Brennebene ändern, also wenn sie überhaupt dem Auge nahe sind und hier verschiedene Entfernungen annehmen, dass sich dagegen die reellen Bilder und somit auch die Netzhautbilder äusserst wenig ändern, wenn sehr entfernte Originale ihre Position ändern. Nun können wir aber einen Gegenstand und sein perspectivisches Bild als zwei Positionen des Originals auffassen und

ferner haben wir unter Voraussetzung der Centralstrahlen die Formel $x \cdot y = \alpha (\beta - \gamma)$ kennen gelernt, für die nicht centralen müssen wir aber wegen der Continuität der Bilder auch eine entsprechende seitliche Ausweichung annehmen, welche sich gleichfalls für nahe Gegenstände sehr stark, für entferntere sehr wenig ändert. Dann erkennen wir aber klar, dass die reellen Bilder und somit auch die Netzhautbilder des Originals und der Perspective desto verschiedener ausfallen, je kleiner die Hauptdistanz ist. Die Verzerrungen hängen also nicht vom Gesichtskegel allein ab, sondern hauptsächlich von der Hauptdistanz, mit anderen Worten, die Öffnung des fraglichen Gesichtskegels ist eine Function der Hauptdistanz; je grösser also die Hauptdistanz, je grösser also das Verhältnis der Entfernungen des centralconstruierten Stellvertreters und des Originals ist, desto weniger Unterschiede können die reellen und somit auch die Netzhautbilder beider aufweisen und desto richtigere Vorstellungen werden die so erhaltenen Stellvertreter erwecken, bis bei einer gewissen Grösse der Hauptdistanz gar keine Verzerrungen mehr merkbar sind und wäre der Gesichtskegel noch so gross und ob wir mit ruhendem oder bewegtem Auge die Darstellung betrachten. Dagegen können bei sehr kleiner Distanz die reellen Bilder so auseinander liegen, dass die Netzhautbilder jede Schärfe verlieren und wir überhaupt aufhören, deutlich zu sehen.

Die wichtigste Regel wäre also die, die Augendistanz möglichst gross zu wählen; denn es vereinigt dies folgende Vortheile: kleine Verzerrungen, grosser Spielraum für objektive Täuschung über Entfernungen und endlich, dass bei solchen Bildern der schädliche Einfluss des binocularen Sehens sich sehr stark vermindert und dass daher solche Bilder, selbst wenn sie mit beiden Augen angesehen werden, natürlichen Eindruck machen, während Bilder mit kleiner Hauptdistanz nur beim monocularen Sehen den gewünschten Effekt haben. Andererseits ist man freilich durch gegebene Verhältnisse z. B. durch die Grösse der Lokalitäten, für welche die Bilder bestimmt sind, ferner durch die Bedingungen des deutlichen Sehens an eine obere Grenze gebunden. Einen glänzenden Beweis der Richtigkeit aller unserer Behauptungen erblicken wir aber in den Wirkungen der Panoramen, weshalb wir auch noch die Frage speciell beantworten wollen:

V. Welches sind die Ursachen der grossen Wirksamkeit der Panoramen?

Dieselben sind von dem Engländer Barker 1787 erfunden worden und zwar sind sie perspectivische Darstellungen der Gegenstände der Aussenwelt auf einem Cylinder von sehr grossem Durchmesser für einen Punkt der Cylinderaxe als Centrum und dienen bekanntlich dazu, eine grosse Scenerie z. B. eine Landschaft oder eine grosse Stadt oder ein Schlachtbild etc. von der Mitte aus einheitlich mit grosser Naturtreue darzustellen. Da eine Illusion offenbar nur dann stattfinden kann, wenn sich das Auge des Beobachters in dem angenommenen Centrum auf der Axe befindet, weil nur dann eine Gerade etc. als solche erscheint, so wird der Beschauer auf einem Pavillon zurückgehalten. Die Wirkung ist eine grossartige, Enthusiasten behaupten, vollkommen getäuscht zu sein, in keiner Beziehung Abweichungen von der Natur wahrzunehmen, was freilich mit grosser Reserve aufzunehmen ist. Untersuchen wir, ob diese Wirkungen mit unseren Auseinandersetzungen nicht collidieren. Vor allem müssen wir an dem oben ausgesprochenen Grundsatze festhalten, dass eine objektive Täuschung nur dann vorhanden sein kann, wenn sowohl der dargestellte Gegenstand als auch dessen Darstellung innerhalb des Raumes liegen, für welchen sich die Accomodationsempfindungen nicht merklich ändern. Aus unseren Erfahrungen über die Accomodationsstrecken können wir den Panoramen in dieser Beziehung das beste Prognosticon machen. Ohne sich vielleicht des Grundes so recht bewusst zu sein, nur von praktischen Erfolgen angespornt, baute man in der That immer grössere Panoramen, so dass das berühmte von Langlois einen Durchmesser von 40 *m* hatte. Ein so beschaffenes Gemälde muss aber zweitens den Vortheil haben, dass die Netzhautbilder, selbst wenn die Darstellung genau central ist, sich von denen der Originale nicht merklich unterscheiden. Der Grund hievon ist nicht etwa die Darstellung am Cylinder, welche nur den Vortheil bietet, dass wir nach allen Richtungen gleiche Entfernungen und somit überall Deutlichkeit haben, sondern die Grösse der Entfernung; der beschränkende Gesichtskegel hat hier seine Bedeutung ganz und gar verloren. Der dritte Vortheil so grosser Entfernungen ist, wie bereits erwähnt wurde, dass das binoculare Sehen keine Störung mehr verursacht; wir können vielmehr umgekehrt schliessen, weil wir selbst beim binocularen Sehen solcher Darstellungen so sehr getäuscht werden, so ist dies ein Beweis, dass dasselbe nicht massgebend ist für die

Beurtheilung der Entfernungen überhaupt, sondern nur beim Beurtheilen sehr kleiner Entfernungen.

Zum Schlusse wollen wir noch folgende Frage beantworten:

VI. Wie hat man eine Perspective zu beleuchten?

So dankbar es auch wäre, die Farben-, Licht- und Schatteneffekte bei perspectivischen Zeichnungen einer genaueren Betrachtung zu unterziehen; wir müssen hier darauf verzichten, weil sich uns in dieser Schrift vorwiegend um geometrische Gesichtspunkte handelte.

Wir wollen uns daher auf folgende allgemeine Bemerkung beschränken:

Bei der Herstellung des geometrischen Entwurfes wird eine bestimmte Lichtquelle angenommen, dann Trennungslinien zwischen Licht und Schatten, Intensitätscurven, Glanzpunkte etc. entweder construiert oder nach der Natur oder nach der Abschätzung gezeichnet; die Stellen, welche im Schatten liegen sollen, alle Abstufungen inbegriffen, werden entsprechend mit Farbstoffen überzogen, welche mehr oder weniger alles Licht absorbieren; diejenigen Flächen jedoch, welche im Licht sind, werden mit Farbstoffen bedeckt, welche entweder gar kein Licht absorbieren, wenn wir den Effect des Weiss oder des Glanzes erzielen wollen, oder welche nur gewisse Lichtsorten absorbieren, sodass die Complementären nach unserem Auge reflectiert werden. Auf diese Weise ist ein Gemälde der Träger aller Licht- und Farbentöne, der Schatten und Glanzpunkte etc.; daraus folgt aber nicht, dass es fremden Lichtes zu seiner Wirkung nicht bedürfte. Dieses ist gleichsam das Rohmaterial, welches, sobald es mit dem Bilde in Berührung kommt, so modificiert wird, dass das von der Bildfläche reflectierte Licht in unserem Sehorgan dieselbe Sensation hervorruft, wie das von dem Original ausstrahlende Licht; deshalb verwenden wir ungern directes Licht zur Beleuchtung von Gemälden, weil in diesem Falle aus leicht angebbaren Gründen besonders bei Gemälden auf Leinwand zahlreiche Glanzpunkte sich bilden würden, wenn wir von gewissen Stellen das Gemälde betrachten, sondern vorzugsweise diffuses Licht.

25.

Příspěvky k theorii funkcí elliptických.

Přednášel **M. J. Lerch** dne 4. června 1886.

1.

Ve svých přednáškách o funkcích elliptických vycházel *Jacobi* z vlastností nekonečných řad tvaru

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{av^2+2bv+c} = e^c \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{av^2+2bv},$$

které konvergují bezpodmínečně pro všechny konečné hodnoty veličiny b, jeli jen realná část veličiny a zápornou. Abychom dokázali právě učiněný výrok o konvergenci řady

$$\sum e^{av^2+2bv},$$

rozdělme ji v součet dvou sčítanců

$$\sum_{v=0}^{\infty} e^{av^2+2bv} \quad \text{a} \quad \sum_{v=-1}^{-\infty} e^{av^2+2bv} = \sum_{v=1}^{\infty} e^{av^2-2bv},$$

jež jsou téhož tvaru, a jichž konvergenci dokážeme.

Obecný člen prvé z těchto obou řad jest $u_v = e^{av^2+2bv}$, a hodnota $\frac{u_{v+1}}{u_v}$ je tu patrně rovna veličině $e^{2av+(a+2b)}$; jeli tedy část realná veličiny a zápornou, je absolutní hodnota veličiny e^{2a} menší než 1 a její v-tá mocnosť klesá s rostoucím v pod každou mez, takže máme

$$lim \left| \frac{u_{v+1}}{u_v} \right| = 0,$$

a řada $\Sigma \mid u_v \mid$ je konvergentní, jakž tvrzeno.

Tím zároveň podán důkaz o druhé z obou řad.

Poněvadž řada naše konverguje pro všecky hodnoty b, nikoli však pro všechna a, považuje se obyčejně a za parameter a značí

se se $a = \pi i\ \tau$, b pak za vlastní proměnnou, psanou ve tvaru $b = \pi i\ u$, a hodnota řady

$$(I) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(\tau\nu^2 + 2u\nu)} = \vartheta(u, \tau)$$

znamená se obyčejně $\vartheta_3(u, \tau)$. Dovolíme si však označení pohodlnější, vynechajíce příponu 3. Veličina $\tau\pi i$ má svou realnou část zápornou, jeli druhá souřadnice veličiny τ kladnou, a naopak. Jen pro takováto τ má naše řada (I) smysl.

Poněvadž ν je číslo celistvé, nemění se členové řady (I), přejdeli u v $(u + 1)$, t. j. bude

$$\vartheta(u + 1) = \vartheta(u),$$

čímž řečeno, že $\vartheta(u)$ připouští periodu 1.

Klademeli v řadě (I) $\nu = \mu + 1$, probíhá μ zároveň s ν všecka celistvá čísla od $-\infty$ do ∞ a každé pouze jednou.

Proto bude

$$\vartheta(u, \tau) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[\tau(\mu+1)^2 + 2u(\mu+1)]}$$

$$= e^{(2u+\tau)\pi i} \sum_{\mu} e^{\pi i[\tau\mu^2 + 2(u+\tau)\mu]},$$

tedy

$$\vartheta(u, \tau) = e^{(2u+\tau)\pi i}\vartheta(u + \tau, \tau).$$

Naše řada (I) tedy má důležitou vlastnost obsaženou ve vzorcích

$$(1) \qquad \begin{cases} \vartheta(u + 1, \tau) = \vartheta(u, \tau) \\ \vartheta(u + \tau, \tau) = e^{-\pi i(2u+\tau)}\,\vartheta(u, \tau). \end{cases}$$

Poněvadž veličina τ nemůže býti realná, musí býti komplexní, a pak lze každou hodnotu u vyjádřiti tvarem $\alpha + \beta\tau$, kde α, β jsou veličiny realné.

Pak lze vždy určiti dvě celistvá čísla m a n tak, aby $\alpha = m + \alpha'$, $\beta = n + \beta'$, kde α' a β' jsou pravé kladné zlomky. Pak bude $\vartheta(u) = \vartheta(\alpha' + \beta'\tau + n\tau) = e^{-\pi i(2u' + 2n\tau - \tau)}\,\vartheta(u' + \overline{n-1}\tau) =$ atd., kde $u' = \alpha' + \beta'\tau$; opětovaným užitím vzorce (1) převedeme tento výraz

na tvar součinu jisté funkce exponencialné s funkcí $\vartheta(u)$. Můžeme tedy hodnoty funkce $\vartheta(u)$ považovati za známé pro všecka u, známe-li je pro všecka u obsažená ve tvaru $\alpha' + \beta'\tau$, kde α', β' jsou pravé kladné zlomky. Tyto hodnoty u jsou znázorněny body uvnitř a na obvodě rovnoběžníka, jehož strany jsou úsečka $(0 \dots 1)$ a průvodič bodu τ, kterýž nazveme rovnoběžníkem základním. Vedeme-li body $-1, \pm 2, \pm 3, \dots \pm \nu, \dots; -\tau, \pm 2\tau, \pm 3\tau, \dots \pm \nu\tau, \dots$ rovnoběžky se stranami tohoto rovnoběžníka, rozdělíme tím celou rovinu v rovnoběžníky shodné se základním. Známeli ϑ uvnitř jednoho z těchto rovnoběžníků, známe ji v celé rovině.

Místo funkce $\vartheta(u, \tau)$ můžeme též uvažovati funkci, která vznikne z ní, kladeli se $e^{u\pi i} = \xi$, $e^{\tau\pi i} = q$, a kterou znamenejme

$$(\mathrm{I}') \qquad T(\xi, q) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} q^{\nu^2} \xi^{2\nu}.$$

Poněvadž realná část veličiny $\tau\pi i$ je zápornou, je nutně absolutní hodnota veličiny q menší než 1. Řada (I′) obsahuje záporné mocnosti proměnné ξ v nekonečném počtu, a proto nemá řada pro $\xi = 0$ smyslu, a funkce nemá v místě $\xi = 0$ žádné určité hodnoty, a $\xi = 0$ je podstatně zvláštním místem funkce $T(\xi, q)$.

Druhé takové místo je $\xi = \infty$, všecka ostatní místa jsou pravidelna, a funkce má v nich hodnotu konečnou a určitou, která se od místa k místu spojitě mění. Zároveň patrno, že (I′) je sudou funkcí ξ.

Druhá z rovnic (1) poskytne nám vztah

$$(1') \qquad T(q\xi, q) = \frac{1}{q\xi^2} T(\xi, q).$$

Jeli $\xi = \alpha$ hodnota, pro niž $T(\xi, q)$ zmizí, t. j. jeli $T(\alpha, q) = 0$, bude též $T(-\alpha, q) = 0$, takže též $-\alpha$ je místo nullové naší funkce. Podlé (1′) bude pak také $T(\pm q\alpha, q) = 0$, a tedy funkce zmizí také pro $\pm q\alpha$. Odtud plyne bezprostředně, že funkce $T(\xi, q)$ zmizí na místech $\xi = \pm q^n \alpha$, kde n je kladné neb záporné číslo celistvé.

Utvořme nyní sudou funkci $P(\xi, q)$, která zmizí na všech těchto místech $\xi = \pm q^n \alpha$ a na žádných jiných. Takovou nám poskytne nekonečný součin

$$P(\xi, q) = \left(1 - \frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - q^2\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - q^4\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - q^6\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\cdots$$

$$\left(1 - q^2\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\left(1 - q^4\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\left(1 - q^6\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - q^{2m}\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - q^{2m}\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)$$

Pro tuto funkci hledejme vztah analogický rovnici (1′), t. j. stanovme hodnotu $P(\xi q, q)$; i bude tu patrně

$$P(q\xi, q) = \left(1 - q^2\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - q^{2m+2}\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - q^{2m-2}\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^{2n}\frac{\xi^2}{\alpha^2}\right)\left(1 - q^{2n}\frac{\alpha^2}{\xi^2}\right)$$

$$= \frac{1 - \dfrac{\alpha^2}{\xi^2}}{1 - \dfrac{\xi^2}{\alpha^2}}\, P(\xi, q),$$

tedy

$$P(q\xi, q) = -\frac{\alpha^2}{\xi^2}\, P(\xi, q.$$

Vztah tento bude téhož tvaru jako (1′), jeli $-\alpha^2 = \frac{1}{q}$, tedy $\alpha = \pm\frac{i}{\sqrt{q}}$. Nyní přesvědčíme se přímo dosazením, že funkce $T(\xi, q)$ zmizí pro tuto hodnotu α. Neboť řada (I′) poskytne nám pro $\xi = \alpha$ výraz

$$T(\alpha, q) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(-1)^{\nu} q^{\nu^2-\nu},$$

a v tomto výrazu ruší se členové podvojně, a sice vždy oni dva, kteří odpovídají hodnotám $\nu = m$, $1 - m$.

Dosadímeli tuto hodnotu za α do $P(\xi, q)$, obdržíme funkci

$$P(\xi, q) = \prod_{m=0}^{\infty}(1 + q^{2m+1}\xi^2)(1 + q^{2m+1}\xi^{-2}),$$

která zmizí pouze na oněch místech, na nichž mizí $T(\xi, q)$. Tudíž bude podíl

$$\frac{T(\xi, q)}{P(\xi, q)} = Q(\xi, q)$$

funkce, která se chová v okolí všech míst pravidelně, vyjímaje hodnoty $\xi = 0, \infty$, kde může míti místa zvláštní, a která se nemění, přejdeli ξ v $q\xi$, neboť dělením rovnic

$$T(q\xi, q) = \frac{1}{q\xi^2} T(\xi, q)$$

$$P(q\xi, q) = \frac{1}{q\xi^2} P(\xi, q)$$

obdržíme

$$\frac{T(q\xi, q)}{P(q\xi, q)} = \frac{T(\xi, q)}{P(\xi, p)},$$

to jest

$$Q(q\xi, q) = Q(\xi, q).$$

Dosadímeli sem za ξ a q hodnoty původní, shledáme, že

$$Q(e^{u\pi i}, e^{\tau\pi i})$$

je funkce jednoznačná proměnné u, která se chová v konečnu naskrze pravidelně a připouští periody 1, τ, takže má ve všech stejnolehlých bodech výše sestrojených rovnoběžníků hodnotu stejnou, a následovně nepřevyší v celé rovině určitou hodnotu M, která je větší než všechny hodnoty funkce Q uvnitř rovnoběžníka základního. Podle známé věty nauky o funkcích nemůže existovati jednoznačná analytická funkce komplexní proměnné u, která by pro všechna konečná u byla menší než jistá daná veličina M, leč neníli uvažovaná funkce stálou.

Podle této věty musí tedy býti $Q(e^{u\pi i}, e^{\tau\pi i})$ veličinou nezávislou na u, t. j. podíl $Q(\xi, q)$ nezávisí na ξ, nýbrž pouze na q, pročež jej znamenejme $\varphi(q)$. Máme pak rovnici

$$(\dagger) \qquad T(\xi, q) = \varphi(q) \prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^{2n+1}\xi^2)(1 + q^{2n+1}\xi^{-2}),$$

z níž plyne, že funkce $T(\xi, q)$ nezmizí na žádných dalších místech mimo $\xi = \pm iq^{m+\frac{1}{2}}$, kde m značí nullu neb záporné číslo celistvé.

Jsou tedy místa nullová u funkce $\vartheta(u, \tau)$ dána rovnicí

$$e^{u\pi i} = e^{\tau\pi i(m+\frac{1}{2}) + \pi i(n+\frac{1}{2})},$$

takže funkce $\vartheta(u, \tau)$ zmizí na všech místech tvaru

$$u = \frac{1+\tau}{2} + m\tau + n,$$

kde m a n jsou celistvá čísla libovolného označení i nullu včítaje, a na žádných dalších.

Jeli u tvaru $\alpha + m\tau + n$, pravíme, že jest u shodno s α podle soustavy modulů $(1, \tau)$, píšíce

$$u \equiv \alpha, \ \mathit{modd}\ (1, \tau).$$

V tomto názvosloví zní náš výsledek v té formě, že nullová místa funkce $\vartheta(u, \tau)$ jsou *modd* $(1, \tau)$ shodna s místem $\frac{1+\tau}{2}$.

Geometricky jsou tato místa znázorněna ve středech rovnoběžníků výše sestrojené sítě, takže funkce $\vartheta(u, \tau)$ zmizí v každém z oněch rovnoběžníků vždy a to pouze jednou.

2.

Vzorec (†) poskytuje rozvoj funkce $T(\xi, q)$ v nekonečný součin, při čemž však přichází ještě funkce $\varphi(q)$, které dosud neznáme ve tvaru součinu.

Jacobi nalezl nekonečný součin pro $\varphi(q)$, a po něm podáno více verifikací, z nichž zvlášť pozoruhodným je důkaz *Cauchyho*, a jemu částečně podobný *Weierstrassův*, jenž všechny ostatní elegancí i přesností předčí, jejž tu s malou změnou opakujeme.

Součin na pravé straně rovnice (†) skládá se ze dvou činitelů tvaru

$$(\alpha) \qquad \pi(x, p) = (1 + px)(1 + p^2x)(p + p^3x) \ldots$$

a sice jest

$$\prod_0^\infty (1 + q^{2n+1}\xi^2) = \pi\left(\frac{\xi^2}{q}, q^2\right),$$

$$\prod_0^\infty (1 + q^{2n+1}\xi^{-2}) = \pi\left(\frac{\xi^{-2}}{q}, q^2\right),$$

takže tu p, jak nutno, je menší než 1.

Z definice (α) plyne bezprostředně vztah

$$(\beta) \qquad \pi(x, p) = (1 + px)\pi(px, p).$$

Ana je funkce (α) konečna a spojita pro všecka konečná x, dá se rozvinouti v nekonečnou řadu mocninovou stále konvergentní, jakož se o tom ihned přesvědčíme. Budiž $f(x)$ funkce hovící funkcionalné rovnici (β), t. j. rovnici $f(x)=(1+px)f(px)$, a nechť platí pro x, která jsou menší než určitá mez, rozvoj v konvergentní řadu

$$(\gamma) \qquad f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu.$$

Poněvadž předpokládáme, že $|p| < 1$, bude řada $\Sigma_0^\infty c_\nu p^\nu x^\nu$ tím silněji konvergovati, a proto bude lze klásti do rovnice

$$f(x) = (1+px) f(px)$$

hodnoty v řadách, takže vznikne

$$\sum_0^\infty c_\nu x^\nu = (1+px) \sum_0^\infty c_\nu p^\nu x^\nu = \sum_0^\infty (c_\nu + c^{\nu-1}) p_\nu x^\nu, \qquad c_{-1} = 0,$$

a odtud posléz

$$c_\nu = (c_\nu + c_{\nu-1}) p^\nu,$$

z čehož se řešením obdrží

$$c_\nu = \frac{c_{\nu-1} p^\nu}{1-p^\nu} = \frac{p^\nu p^{\nu-1} c_{\nu-2}}{(1-p^\nu)(1-p^{\nu-1})} = \ldots$$

$$= \frac{c_0 p^\nu p^{\nu-1} p^{\nu-2} \ldots p^1}{(1-p^\nu)(1-p^{\nu-1})(1-p^{\nu-2}) \ldots (1-p^1)},$$

tedy posléz

$$c_\nu = \frac{c_0 p^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}}{(1-p)(1-p^2) \ldots (1-p^\nu)}.$$

Pro tato c_ν máme pak

$$f(x) = (1+px) f(px) = (1+px)(1+p^2 x) f(p^2 x) = \ldots$$
$$= (1+px)(1+p^2 x) \ldots (1+p^n x) f(p^n x).$$

Poněvadž $|p| < 1$, bude tu $\lim_{n=\infty} p^n = 0$, a proto

$$f(x) = f(0) \lim_{n=\infty} (1+px)(1+p^2x)\ldots(1+p^nx)$$
$$= c_0 \pi(x, p),$$

takže platí skutečně

$$(\delta) \qquad \pi(x, p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^\nu, \quad c_\nu = \frac{p^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)}}{(1-p)(1-p^2)\ldots(1-p^\nu)},$$

kterážto řada konverguje pro všecka konečná x.

Součinitel c_ν lze psáti též ve tvaru

$$c_\nu = p^{\frac{1}{2}\nu(\nu+1)} \frac{\pi(-p^\nu, p)}{\pi(-1, p)},$$

takže pak bude

$$\pi\left(\frac{\xi^2}{q}, q^2\right) = \sum_0^\infty q^{\nu^2} \frac{\pi(-q^{2\nu}, q^2)}{\pi(-1, q^2)} \xi^{2\nu}$$

aneb

$$\pi\left(\frac{\xi^2}{q}, q^2\right) = \frac{1}{\pi(-1, q^2)} \sum_0^\infty q^{\nu^2} \pi(-q^{2\nu}, q^2) \xi^{2\nu}$$

$$\pi\left(\frac{\xi^{-2}}{q}, q^2\right) = \frac{1}{\pi(-1, q^2)} \sum_0^\infty q^{\nu^2} \pi(-q^{2\nu}, q^2) \xi^{-2\nu}.$$

Násobením těchto výrazů obdržíme pak z rovnice

$$\pi\left(\frac{\xi^2}{q}, q^2\right) \pi\left(\frac{\xi^{-2}}{q}, q^2\right) = \frac{1}{\varphi(q)} T(\xi, q)$$

následující výsledek:

$$(\varepsilon) \quad \frac{1}{\varphi(q)} T(\xi, q) = \frac{1}{\pi(-1, q^2)^2} \sum_{\mu, \nu} q^{\mu^2+\nu^2} \pi(-q^{2\mu}, q^2)\, \pi(-q^{2\nu}, q^2) \xi^{2\mu-2\nu}$$
$$(\mu, \nu = 0, 1, 2 \ldots)$$

Pravou stranu rovnice (ε) lze uvésti v jednoduchou řadu mocninovou. Znamenáme-li $\mu - \nu = s$, bude koefficient při x^{2s} dán výrazem (při kladném s)

$$(\zeta) \qquad C_s = \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{2\nu^2 + 2\nu s + s^2} \pi(-q^{2\nu+2s}, q^2) \pi(-q^{2\nu}, q^2),$$

načež bude

$$\frac{1}{\varphi(q)} T(\xi, q) = \frac{1}{\pi(-1, q^2)^2} \sum_{s=-\infty}^{\infty} C_s \xi^{2s}, \; C_s = C_{-s},$$

z čehož soudíme, že tu

$$C_s = \frac{\pi(-1, q^2)^2}{\varphi(q)} q^{s^2} = C_0 q^{s^2}, \; C_0 = \frac{\pi(-1, q^2)^2}{\varphi(q)}$$

a tedy dle (ξ)

$$C_0 = C_s q^{-s^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} q^{2\nu^2 + 2\nu s} \pi(-q^{2\nu + 2s}, q^2) \pi(-q^{2\nu}, q^2).$$

Členové této řady klesají s rostoucím s pod každou mez, až na prvý, jenž nezávisí na s, a má hodnotu

$$\pi(-1, q^2),$$

která nám tedy poskytuje C_0, takže máme rovnici

$$\frac{\pi(-1, q^2)^2}{\varphi(q)} = \pi(-1, q^2),$$

a tedy

$$\varphi(q) = \pi(-1, q^2) = (1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6) \ldots,$$

takže máme konečný výsledek

$$\text{(II)} \quad T(\xi, q) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+2})(1 + q^{2n+1}\xi^2)(1 + q^{2n+1}\xi^{-2}),$$

a odtud

$$\text{(II*)} \quad \vartheta(u, \tau) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+2})(1 + q^{2n+1} e^{2u\pi i})(1 + q^{2n+1} e^{-2u\pi i}),$$

aneb spojímeli vždy dva a dva činitele:

$$\text{(II}^0\text{)} \quad \vartheta(u, \tau) = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{2n+2})(1 + 2q^{2n+1} \cos 2u\pi + q^{4n+2}),$$

z čehož plyne $\vartheta(-u) = \vartheta(u)$, což i přímo z definice snadno se odvodí.

3.

Dosavad jsme uvažovali funkci $\vartheta(u, \tau)$ pouze vzhledem k proměnné u; nyní přihledneme k některým vlastnostem jejím vztahujícím se k změnám parametru τ.

Jeli pomyslná část parametru τ kladná, je též pomyslná část veličiny $-\frac{1}{\tau}$ kladnou, jak z geometrického znázornění přímo vyplývá a snadno se počtem verifikuje; následkem toho existuje funkce $\vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$, kterou prozatím znamenejme $\varphi(u)$. Nullová místa této funkce určíme z rovnice

$$\frac{u}{\tau} = \frac{1-\frac{1}{\tau}}{2} + m + n\frac{1}{\tau},$$

z čehož plyne

$$u = \frac{1+\tau}{2} + m\tau + n - 1,$$

t. j. funkce $\vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$ zmizí na místech shodných s $\frac{1+\tau}{2}$ *modd* $(1, \tau)$, na nichž také mizí funkce $\vartheta(u, \tau)$. Následovně bude podíl

$$\frac{\vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta(u, \tau)} = h(u)$$

funkce, která se v okolí každého místa v konečnu chová pravidelně a nikde nemizí. Následkem toho bude se funkce *log* $h(u)$ chovati v okolí všech míst v konečnu pravidelně, a tedy bude buď stálou, neb celistvou funkcí racionalnou aneb řadou stále konvergentní, kterouž znamenejme $-\bar{g}(u)$. Bude pak $h(u) = e^{-\bar{g}(u)}$, a tedy

$$\vartheta(u, \tau) = e^{\bar{g}(u)}\,\vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) = e^{\bar{g}(u)}\vartheta\left(-\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)$$

a dosadímeli hodnoty v řadách

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(\tau\nu^2 - 2u\nu)} = e^{\bar{g}(u)} \sum_{\nu} e^{-\frac{\pi i}{\tau}(\nu^2 + 2\nu u)}$$

$$= e^{g(u)} \sum e^{-\frac{\pi i}{\tau}(\nu + u)^2},$$

kde jsme položili

$$g(u) = \bar{g}(u) + \frac{\pi i}{\tau} u^2,$$

což je funkce téhož tvaru jako $\bar{g}(u)$.

Máme tedy

$$(\alpha) \qquad e^{g(u)} = \frac{\vartheta(u,\tau)}{\sum e^{-\frac{\pi i}{\tau}(\nu+u)^2}} = \frac{\vartheta(u,\tau)}{e^{-\frac{\pi i}{\tau}u^2}\vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)}.$$

Zvětšímeli u o 1, nezmění se čitatel, jak známo, a jmenovatel rovněž ne, poněvadž se tím hodnota součtu nemění; zvětšímeli však u o τ, obdrží čitatel faktor $e^{-\pi i(2u+\tau)}$, a jmenovatel přejde na

$$\vartheta\left(\frac{u}{\tau}+1, -\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{\pi i}{\tau}(u^2+2u\tau+\tau^2)}$$
$$= \vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{\pi i}{\tau}u^2}e^{-\pi i(2u+\tau)},$$

takže se změní o týž faktor jako čitatel, a podíl zůstane nezměněn. Představuje nám tedy výraz (α) funkci dvojperiodickou o periodách 1 a τ, která je dána řadou stále konvergentní, věc to nemožná z týchž důvodů, jichž jsme výše užili při výrazu Q. Musí tedy výraz (α) býti nezávislým na u, rovným veličině stálé C, která závisí bezpochyby na parametru τ, t. j. platí vztah

$$(\beta) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(\nu^2\tau+2\nu u)} = C\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\tau}(u+\nu)^2},$$

kde C nezávisí na u, ale záviseti může na τ.

Předpokládejme u realné a integrujme obě strany rovnice (β) dle u v mezích 0 a 1. Obecný člen v levo má tvar $e^{\tau\pi i\nu^2}e^{2\nu u\pi i}$, a poněvadž integrál

$$\int_0^1 e^{2\nu u\pi i}du$$

má hodnotu 0 pro všecka celistvá ν od 0 různá, ale rovná se 1 pro $\nu=0$, bude integrál levé strany rovnati se jednotce, takže máme rovnici

$$1 = C\int_0^1 \sum_\nu e^{-\frac{\pi i}{\tau}(u+\nu)^2}du = C\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}\int_0^1 e^{-\frac{\pi i}{\tau}(u+\nu)^2}du$$

$$= C \sum_{v=-\infty}^{\infty} \int_{v}^{v+1} e^{-\frac{\pi i}{\tau} z^2} dz = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\tau} z^2} dz,$$

takže máme pro stanovení C rovnici

$$(\gamma) \qquad C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi i}{\tau} z^2} dz = 1,$$

kde integrace vztahuje se k realným z. Jeli τ veličina ryze pomyslná a kladná, bude $\frac{i}{\tau}$ realné a kladné, a proto bude substituce

$$-\frac{i}{\tau} z^2 = v^2, \quad z = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, v$$

realnou, t. j. realným z odpovídají realná v. Volímeli za $\sqrt{\frac{\tau}{i}}$ kladnou hodnotu, budou z a v stejného znamení, a integrál náš obdrží tvar

$$\sqrt{\frac{\tau}{i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2} dv = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\, c,$$

kde patrně $c = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2} dv$ nezávisí na τ, a je čistě numerickou stálou. Z rovnice (γ) máme pak

$$C = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{i}{\tau}}$$

a dosazením do (β) posléz

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (\tau v^2 + 2uv)} = \frac{1}{c} \left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right) \sum e^{-\frac{\pi i}{\tau} (u+v)^2},$$

kde $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ značí kladnou hodnotu kořene $\sqrt{\frac{i}{\tau}}$; poněvadž tu c nezá-

visí na u ani na τ, obdržíme je volbou zvláštních hodnot, na př. $u = 0$, $\tau = i$. Tím se vyskytne na obou stranách faktor $\Sigma\, e^{-\pi v^2}$ od nully různý, takže jím lze děliti, načež plyne $c = 1$. Máme také jednak vedlejší výsledek

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi v^2} dv = 1,$$

a jednak vzorec

$$\text{(III)} \qquad \vartheta(u, \tau) = \left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right) e^{-\frac{\pi i}{\tau} u^2} \vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right),$$

jehož platnosť ovšem dokázána pouze pro ryze pomyslná τ. Nebude však nesnadno provésti důkaz i pro ostatní hodnoty τ. Z rovnice poslední plyne

$$(\delta) \qquad \left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right) = e^{\frac{\pi i}{\tau} u^2} \frac{\vartheta(u, \tau)}{\vartheta\left(\frac{u}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right)}.$$

Pravá strana je tu analytickou funkcí jednoznačnou proměnné τ, pokud má τ druhou souřadnici kladnou. Znamenámeli pak symbolem $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ onu z obou hodnot odmocniny $\sqrt{\frac{i}{\tau}}$, jejíž realná část je kladná, bude tento výraz $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ pro uvažovaná τ úplně jednoznačným a spojitým, vyjadřuje hodnoty analytické funkce τ v těchto místech pravidelně se chovající. Výraz tento splývá pro ryze pomyslná τ s výrazem na levé straně rovnice (δ), t. j. dvě analytické funkce proměnné (τ) dané výrazem $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ a pravou stranou rovnice (δ) splývají pro ryze pomyslná τ, a tedy jsou identické. Rovnice (δ) a tedy také (III) platí pro všecka u a pro všecka τ, jichž druhá souřadnice je kladná, máli jen symbol $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ právě uvedený význam.*)

Důležitosť vzorce (III) jeví se zvlášť při číselném stanovení hodnot funkce ϑ, o čemž později.

---

*) Symbol ten zavádím po příkladu svého slavného učitele p. *Kroneckera* (Monatsberichte der Berliner Akademie, 1880).

4.

Dosadímeli do řady (I) $\tau + 1$ místo τ, obdržíme

$$\vartheta(u, \tau + 1) = \sum_v e^{\pi i(\tau v^2 + 2uv) + v^2 \pi i},$$

a poněvadž

$$e^{v^2 \pi i} = (-1)^{v^2} = (-1)^v = e^{v\pi i},$$

bude

$$\text{(IV)} \quad \begin{aligned} \vartheta(u, \tau + 1) &= \sum_\tau e^{\pi i[\tau v^2 + 2(u + \frac{1}{2})v]} \\ &= \sum_v (-1)^v q^{v^2} \xi^{2v} = \vartheta(u + \tfrac{1}{2}, \tau), \end{aligned}$$

čímž převedeno stanovení funkce ϑ o parametru $(\tau + 1)$ na stanovení funkce ϑ o parametru τ.

Při číselném stanovení funkce ϑ jedná se o to, aby veličina $q = e^{\tau\pi i}$ byla pokud možno malá, tedy druhá souřadnice parametru τ pokud možno veliká. Jeli realná část veličiny τ absolutně větší než $\frac{1}{2}$, můžeme ji uvésti na tvar $m + \alpha$, kde α jest absolutně menší než $\frac{1}{2}$, a m je číslo celistvé.

Substituce $\tau = \tau' + m$ vyvolá τ', jehož realná část jest α, a transformační vzorec (IV) poskytne funkci

$$\vartheta(u, \tau) = \vartheta\left(u + \frac{m}{2}, \tau'\right)$$

o parametru τ'. Jeli pak τ' absolutně větší než 1, můžeme užiti vzorce (III), čímž obdržíme funkci o parametru $-\dfrac{1}{\tau'}$, jehož druhá souřadnice je větší atd.

Transformace vyjádřená vzorcem (IV) vedla nás k utvoření funkce $\vartheta(u + \frac{1}{2})$; nyní vyšetříme výrazy funkcí

$$\vartheta\left(u + \frac{\tau}{2}, \tau\right), \ \vartheta\left(u + \frac{1 + \tau}{2}, \tau\right).$$

Zavedemeli $u + \dfrac{\tau}{2}$ místo u do řady (I), obdržíme

$$\begin{aligned} \vartheta\left(u + \frac{\tau}{2}\right) &= \sum_v e^{\pi i[\tau(v^2 + v) + 2uv]} \\ &= \sum_v e^{\pi i[\tau(v + \frac{1}{2})^2 + 2u(v + \frac{1}{2})] - \pi i(u + \frac{1}{4}\tau)}, \end{aligned}$$

takže máme řadu

$$(\alpha)\qquad e^{\pi i(u+\frac{1}{4}\tau)}\vartheta(u+\tfrac{1}{2}\tau,\tau)=\sum_{\nu=-}^{\infty}e^{\pi i[(\nu+\frac{1}{2})^2\tau+2(\nu+\frac{1}{2})u]}$$

$$=\sum q^{\frac{1}{4}(2\nu+1)^2}\xi^{2\nu+1}.$$

Zavedemeli pak $u+\dfrac{1+\tau}{2}$ do téže řady, obdržíme

$$\vartheta(u+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau)=\sum_{\nu}e^{\pi i[\tau(\nu^2+\nu)+2(u+\frac{1}{2})\nu]}$$

$$=\sum_{\nu}e^{\pi i[\tau(\nu+\frac{1}{2})^2+2(u+\frac{1}{2})(\nu+\frac{1}{2})]-\pi i(u+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\tau)},$$

a tedy

$$ie^{(u+\frac{1}{4}\tau)\pi i}\vartheta(u+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau,\tau)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{\pi i[\tau(\nu+\frac{1}{2})^2+2(u+\frac{1}{2})(\nu+\frac{1}{2})]}$$

$$=i\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}(-1)^{\nu}q^{\frac{1}{4}(2\nu+1)^2}\xi^{2\nu+1}.$$

Spojíme-li v řadách pro $\vartheta(u)$ a $\vartheta(u+\frac{1}{2})$ členy odpovídající hodnotám $\nu=n$, $-n$, a v řadách pro funkce

$$e^{\pi i(u+\frac{1}{4}\tau)}\vartheta(u+\tfrac{1}{2}\tau),\quad ie^{\pi i(u+\frac{1}{4}\tau)}\vartheta(u+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2})\tau),$$

členy příslušné k hodnotám $\nu=n$, $-n-1$, obdržíme následující soustavu vzorců:

$$(\mathrm{V})\left\{\begin{aligned}
&\vartheta(u,\tau)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{\pi i(\tau\nu^2+2\nu u)}=\sum_{\nu}q^{\nu^2}\xi^{2\nu}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2n\pi u,\\
&\vartheta(u+\tfrac{1}{2},\tau)=\sum_{\nu}e^{\pi i[\tau\nu^2+2\nu(u+\frac{1}{2})]}=\sum_{\nu}(-1)^{\nu}q^{\nu^2}\xi^{2\nu}\\
&\qquad\qquad=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}q^{n^2}\cos 2n\pi u,\\
&e^{\pi i(u+\frac{1}{4}\tau)}\vartheta(u+\tfrac{1}{2}\tau,\tau)=\sum_{\nu}e^{\pi i[(\nu+\frac{1}{2})^2\tau+2(\nu+\frac{1}{2})u]}\\
&\qquad=\sum_{\nu}q^{\frac{1}{4}(2\nu+1)^2}\xi^{2\nu+1}=2\sum_{n=o}^{\infty}q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2}\cos(2n+1)\pi u,\\
&-ie^{\pi i(u+\frac{1}{4}\tau)}\vartheta(u+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau,\tau)=-\sum_{\nu}e^{\pi i[(\nu+\frac{1}{2})^2\tau+2(\nu+\frac{1}{2})(u+\frac{1}{2})]}
\end{aligned}\right.$$

$$
\text{(V)} \left\{ \begin{aligned} &= -i\sum_{\nu}(-1)^{\nu} q^{\frac{1}{4}(2\nu+1)^2} \xi^{2\nu+1} \\ &= 2\sum_{n=o}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2} sin(2n+1)\pi u \end{aligned} \right.
$$

Tyto čtyry funkce dají se shrnouti ve společný tvar

$$
\text{(VI)} \qquad \vartheta_{gh}(u, \tau) = (-1)^{gh} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[(\nu + \frac{1}{2}g)^2\tau + 2(\nu + \frac{1}{2}g)(u + \frac{1}{2}h)]},
$$

kde g, h značí jednu z hodnot 0, 1, a sice jsou funkce (V) patrně

$$
\begin{aligned} \vartheta_{00}(u) &= \vartheta(u) \\ \vartheta_{01}(u) &= \vartheta(u + \tfrac{1}{2}) \\ \vartheta_{10}(u) &= e^{\pi i(u + \frac{1}{4}\tau)} \vartheta(u + \tfrac{1}{2}\tau) \\ \vartheta_{11}(u) &= -ie^{\pi i(u + \frac{1}{4}\tau)} \vartheta(u + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\tau) \end{aligned}
$$

Přípona (g, h) sluje *známkou* či *charakteristikou* funkce ϑ_{gh}, i považujeme dvě charakteristiky (g, h), (g', h') za *shodné* (kongruentní), jsouli oba rozdíly $(g-g', h-h')$ čísla sudá, takže existují pouze čtyry neshodné známky: (0,0), (0,1), (1,0), (1,1); známky mohou se také značiti jedním písmenem. Součtem dvou známek $\varepsilon = (g, h)$, $\varepsilon' = (g', h')$ rozumíme známku $\varepsilon + \varepsilon' = (g + g', h + h')$. Pak bude součet dvou známek shodným s jich rozdílem, sudý násobek každé známky je shodný se známkou (0, 0).

Z řady (VI) plyne:

$$
\begin{aligned} \vartheta_{g+2,\,h}(u) &= \vartheta_{g,\,h}(u) \\ \vartheta_{g,\,h+2}(u) &= (-1)^g \vartheta_{g,\,h}(u), \end{aligned}
$$

takže funkce mající shodné známky se mohou lišiti pouze znamením.

Zároveň obdržíme z řady (VI):

$$
\vartheta_{gh}(u) = (-1)^{gh} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[\nu^2\tau + 2\nu(u + \frac{1}{2}g\tau + \frac{1}{2}h) + \frac{1}{4}g^2\tau + gu + \frac{1}{2}gh]},
$$

t. j.

$$
\text{(VII)} \qquad \vartheta_{gh}(u) = (-i)^{gh} e^{g(u + \frac{1}{4}g\tau)\pi i} \vartheta_{00}(u + \tfrac{1}{2}g\tau + \tfrac{1}{2}h)
$$

Z rovnice této plyne, že místa nullová funkce $\vartheta_{gh}(u)$ jsou modd $(1, \tau)$ shodna s místem

$$
\frac{(1-g)\,\tau + (1-h)}{2} \equiv \frac{(g-1)\,\tau + (h-1)}{2},
$$

a zároveň obdržíme z ní hodnotu funkce

$$\vartheta_{gh}(u + \tfrac{1}{2}g'\tau + \tfrac{1}{2}h')$$
$$= (-i)^{gh} e^{g(u + \frac{1}{2}g'\tau + \frac{1}{2}h' + \frac{1}{4}g\tau)\pi i} \vartheta_{00}\left(u + \tfrac{1}{2}(g + g')\tau + \tfrac{1}{2}(h + h')\right)$$

a po krátké redukci

$$\text{(VIII)} \quad \vartheta_{gh}(u + \tfrac{1}{2}g'\tau + \tfrac{1}{2}h') = (-1)^{gh} i^{g'(h + h')} e^{-g'(u + \frac{1}{4}g'\tau)\pi i} \vartheta_{g + g,\, h + h'}(u)$$

Zároveň bychom obdrželi z rovnice (VII) výrazy pro $\vartheta_{gh}(u+1)$, $\vartheta_{gh}(u+\tau)$, které ale raději odvodíme přímo z řady (VI). Vzroste-li tam u o 1, obdrží exponent obecného členu přírůstek $(2\nu + g)\pi i$, takže se tím člen sám znásobí veličinou $e^{(2\nu + g)\pi i} = (-1)^g$, která nezávisí na ν a přichází ve všech členech, čímž vznikne

$$\vartheta_{gh}(u+1) = (-1)^g \vartheta_{gh}(u).$$

Píšemeli pak v řadě (VI) $\nu = \mu + 1$, obdrží exponent obecného členu hodnotu

$$\pi i \left[\left(\mu + 1 + \frac{g}{2}\right)^2 \tau + 2\left(\mu + 1 + \frac{g}{2}\right)\left(u + \frac{h}{2}\right)\right]$$
$$= \pi i \left[\left(\mu + \frac{g}{2}\right)^2 \tau + 2\left(\mu + \frac{g}{2}\right)\left(u + \tau + \frac{h}{2}\right)\right] + \pi i(\tau + 2u + h)$$

a řada bude míti tvar

$$\vartheta_{gh}(u) = e^{\pi i(2u+\tau+h)} \cdot (-1) \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i[(\mu + \frac{1}{2}g)^2\tau + 2(\mu + \frac{1}{2}g)(u + \tau + \frac{1}{2}h)]}$$
$$= (-1)^h e^{\pi i(2u + \tau)} \vartheta_{gh}(u + \tau),$$

takže máme vzorce:

$$\text{(IX)} \quad \begin{aligned} \vartheta_{gh}(u+1) &= (-1)^g \vartheta_{gh}(u) \\ \vartheta_{gh}(u+\tau) &= (-1)^h e^{-\pi i(2u + \tau)} \vartheta_{gh}(u). \end{aligned}$$

Ze vzorců (II) a (VII) odvodíme snadno nekonečné součiny pro funkce ϑ_{gh}. Bude tu

$$
(\mathrm{X})\left\{
\begin{aligned}
\vartheta_{01}(u) &= \prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+1}\xi^2)(1-q^{2n+1}\xi^{-2}) \\
&= \prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{2n+2})(1-2q^{2n+1}\cos 2\pi u+q^{4n+2}) \\
\vartheta_{10}(u) &= \sqrt[4]{q}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}\xi^2)(1+q^{2n}\xi^{-2}) \\
&= 2\sqrt[4]{q}\,.\cos\pi u\,.\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+2q^{2n}\cos 2\pi u+q^{4n}) \\
\vartheta_{11}(u) &= -i.\sqrt[4]{q}\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-q^{2n}\xi^2)(1-q^{2n}\xi^{-2}) \\
&= 2\sqrt[4]{q}\sin\pi u\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos 2\pi u+q^{4n}),
\end{aligned}
\right.
$$

kde jako dříve položeno $\xi = e^{u\pi i}$, $q = e^{\tau\pi i}$, a čtvrtá odmocnina $\sqrt[4]{q}$ značí $e^{\frac{1}{4}\tau\pi i}$, čímž je úplně určena.

5.

Druhá logarithmická derivace funkce $\vartheta_{gh}(u, \tau)$, t. j. funkce

$$\frac{d^2 lg\vartheta_{gh}(u, \tau)}{du^2}$$

jest jednoznačná funkce proměnné u, která se pouze v místech nullových funkce $\vartheta_{gh}(u)$ stává nekonečnou, a v ostatních bodech se chová pravidelně. Jeli pak $u_0 = \frac{(g-1)\tau + (h-1)}{2}$ nullové místo funkce $\vartheta_{gh}(u)$, bude v něm funkce tato mizeti pouze jednoduše, jak ze vzorců (II) a (X) bezprostředně vyplývá, a bude tedy v okolí tohoto místa míti tvar

$$(u-u_0)\,\mathfrak{P}(u-u_0),$$

kde $\mathfrak{P}(u-u_0)$ značí řadu mocninovou tvaru

$$c_0 + c_1(u-u_0) + c_2(u-u_0)^2 + \ldots\ldots,$$

a při tom jest $\mathfrak{P}(0) = c_0$ od nully různo.

Logarithmická derivace $\frac{\vartheta'_{gh}(u)}{\vartheta_{gh}(u)}$ bude tedy v okolí bodu $u = u_0$ tvaru

$$\frac{1}{u-u_0}+\frac{\mathfrak{P}'(u-u_0)}{\mathfrak{P}(u-u_0)}=\frac{1}{u-u_0}+\overline{\mathfrak{P}}(u-u_0)$$

a druhá derivace logarithmická tedy tvaru

(1) $$\frac{d^2 lg\, \vartheta_{gh}(u,\tau)}{du^2}=-\frac{1}{(u-u_0)^2}+\mathfrak{P}_0(u-u_0),$$

z čehož soudíme, že má funkce tato v místě $u=u_0$ nekonečno druhého stupně.

Jelikož jedna z funkcí $\vartheta_{gh}(u)$, $\vartheta'_{gh}(u)$ je vždy sudou, druhá pak lichou, bude jich podíl $\frac{\vartheta'_{gh}(u)}{\vartheta_{gh}(u)}$ funkcí lichou, a jeho derivace (1) tedy sudou funkcí proměnné u.

Zároveň patrno z rovnic (IX), že tu platí:

$$\frac{d^2 lg\, \vartheta_{gh}(u+1)}{du^2}=\frac{d^2 lg\, \vartheta_{gh}(u)}{du^2}$$

$$\frac{d^2 lg\, \vartheta_{gh}(u+\tau)}{du^2}=\frac{d^2 lg\, \vartheta_{gh}(u)}{du^2}$$

Zavedemeli tedy označení

(2) $$P_{gh}(u\,|\,\tau)=-\frac{d^2 lg\, \vartheta_{gh}(u)}{du^2},$$

bude $P_{gh}(u)$ sudá jednoznačná analytická funkce proměnné u, která jest v okolí nullových míst $u_0=\frac{(g-1)\tau+h-1}{2}$ funkce $\vartheta_{gh}(u)$ tvaru

$$\frac{1}{(u-u_0)^2}+\mathfrak{P}(u-u_0),$$

a v okolí všech ostatních míst v konečnu se pravidelně chová, a která má vlastnosť dvojnásobné periodicity vyjádřenou rovnicemi

$$P_{gh}(u+1)=P_{gh}(u+\tau)=P_{gh}(u),$$

z nichž plyne bezprostředně rovnice obecnější

$$P_{gh}(u+m+n\tau)=P_{gh}(u),$$

kde m, n značí dvě celistvá čísla kladná neb záporná, takže má funkce tato v místech shodných, znázorněných stejnolehlými body rovnoběžníků sítě výše sestrojené stejnou hodnotu.

Ze vzorce (VIII) obdržíme pak bezprostředně

(3) $$P_{gh}(u + \tfrac{1}{2}g'\tau + \tfrac{1}{2}h') = P_{g+g',\, h+h'}(u)$$

Zavedemeli označení $P_{gh}(o) = a_{gh}$, bude tu patrně dle vzorce (3):

(4) $$\begin{aligned} P_{00}(0) &= P_{01}(\tfrac{1}{2}) = P_{10}\left(\frac{\tau}{2}\right) = P_{11}\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = a_{00} \\ P_{01}(0) &= P_{00}(\tfrac{1}{2}) = P_{11}\left(\frac{\tau}{2}\right) = P_{10}\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = a_{01} \\ P_{10}(0) &= P_{11}(\tfrac{1}{2}) = P_{00}\left(\frac{\tau}{2}\right) = P_{01}\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = a_{10} \\ P_{11}(0) &= P_{10}(\tfrac{1}{2}) = P_{01}\left(\frac{\tau}{1}\right) = P_{00}\left(\frac{1+\tau}{2}\right) = \infty, \end{aligned}$$

a obecně tu máme

(4ᵃ) $$a_{gh} = P_{g'h'}\left(\frac{g+g'}{2}\tau + \frac{h+h'}{2}\right)$$

Studujme nyní funkce

(α) $$P_{gh}(u) - a_{g'h'},$$

kde (g', h') jest jedna ze sudých známek (0, 0), (0, 1), (1, 0).

Funkce (α) patrně zmizí na místech shodných s místem

$$\frac{(g+g')\tau + h + h'}{2},$$

kteráž jsou shodna se svými protivnými hodnotami; neboť tam jest dle (4ᵃ) $P_{gh}(u) = a_{g'h'}$.

Ukážeme, že na týchž místech mizí také prvá derivace funkce (α), t. j. funkce $P'_{gh}(u)$. Neb ana je $P_{gh}(u)$ funkce sudá, je $P'_{gh}(u)$ funkcí lichou, a jsouc zároveň dvojperiodickou, má vlastnosť

$$P'_{gh}\left(\frac{\omega}{2} + v\right) = P'_{gh}\left(v - \frac{\omega}{2}\right) = -P'_{gh}\left(\frac{\omega}{2} - v\right),$$

kde $\omega = m\tau + n$ značí jednu z period. Jsouli m a n tak volena, že $P_{gh}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ není $= \infty$, t. j. neníli $(m, n) \equiv (g, h) + (1, 1)$, bude lze klásti $v = o$, čímž vznikne

$$P'_{gh}\left(\frac{\omega}{2}\right) = -P'_{gh}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

tedy

$$P'_{gh}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0,$$

kde ω značí jednu z veličin $g''\tau + h''$, pro něž je známka $(g'', h'') + (g, h)$ shodna s jednou ze tří sudých známek (0, 0), (0, 1), (1, 0). Pro funkci $P'_{gh}(u)$ tedy známe tři neshodná místa nullová, jsou to právě ona místa, na nichž zmizí funkce (α), t. j.

$$P_{gh}(u) - a_{g'h'}.$$

Z toho plyne, že na místech řečených mizí funkce (α) ve stupni nejméně druhém, ana by jinak derivace její $P'_{gh}(u)$ měla tam hodnotu od nully různou.

Funkce (α) má však v místech nullových funkce $\vartheta_{gh}(u)$ nekonečna stupně druhého, a proto bude přirozeno porovnati ji s funkcí

$$\varphi(u) = \frac{\vartheta_{g''h''}(u)^2}{\vartheta_{gh}(u)^2}, \text{ kde } (g'', h'') \equiv (g, h) + (g', h') + (1, 1),$$

která nezmizí ani nevzroste do nekonečna na žádných jiných místech nežli funkce (α), a to ve stupni zajisté nikoli větším.

Z rovnic (IX) plyne ihned, že tato funkce $\varphi(u)$ má periody $(1, \tau)$, t. j. že platí

$$\varphi(u + 1) = \varphi(u + \tau) = \varphi(u).$$

Avšak funkce (α) má tytéž periody a podíl

$$\frac{P_{gh}(u) - a_{g'h'}}{\varphi(u)}$$

je ve všech konečných místech u pravidelným, ana jsou místa nullová Jmenovatele mezi místy nullovými čitatele obsažena, a nekonečna společna, a to po obékráte polohou i stupněm.

Jest tudíž podíl tento funkcí dvojperiodickou stále konečnou a proto veličinou stálou, takže obdržíme

$$(\beta) \qquad P_{gh}(u) - a_{g'h'} = \left(C\,\frac{\vartheta_{g''h''}(u)}{\vartheta_{gh}(u)}\right)^2,$$

Z rovnice této plyne, že odmocnina

$$(\beta^0) \qquad \sqrt{P_{gh}(u) - a_{g'h'}} = C\,\frac{\vartheta_{g''h''}(u)}{\vartheta_{gh}(u)},$$

$$[g'' \equiv g + g' + 1,\ h'' \equiv h + h' + 1 \pmod 2],$$

jest jednoznačnou funkcí proměnné u.

Volme z obou hodnot odmocniny onu, jejíž rozvoj dle mocností $(u - u_0)$, kde $u_0 = \frac{1-g}{2}\tau + \frac{1-h}{2}$, začíná členem $\frac{1}{u-u_0}$, čímž pak je znamení odmocniny (β^0) úplně určeno, postrádajíc dvojznačnosti analytické.

Abychom určili stálou C, rozviňme pravou stranu rovnice (β^0) dle mocností $(u - u_0)$. Člen začáteční bude patrně

$$C \,.\, \frac{\vartheta_{g''h''}\left(\frac{1-g}{2}\tau + \frac{1-h}{2}\right)}{\vartheta'_{gh}\left(\frac{1-g}{2}\tau + \frac{1-h}{2}\right)} \,.\, \frac{1}{u-u_0}$$

A tu jest patrně dle vzorce (VIII):

$$\vartheta_{g''h''}\left(\frac{1-g}{2}\tau + \frac{1-h}{2}\right)$$

$$= (-1)^{g''(1-h)}\, i^{(1-g)(h''+1-h)}\, e^{-\frac{1}{4}(g-1)^2\tau\pi i}\, \vartheta_{g''+1-g,\ h''+1-h}(0),$$

$$\vartheta_{gh}\left(u + \frac{1-g}{2}\tau + \frac{1-h}{2}\right) = (-1)^{g(1-h)}\, i^{1-g}\, e^{-\frac{1}{4}(g-1)^2\tau\pi i}\, \vartheta_{11}(u)$$

a odtud dělením na u pro $u = 0$:

$$\vartheta'_{gh}\left(\frac{1-g}{2}\tau + \frac{1-h}{2}\right) = (-1)^{g(1-h)}\, i^{1-g}\, e^{-\frac{1}{4}(g-1)^2\tau\pi i}\, \vartheta'_{11}(0),$$

a tedy je součinitel členu začátečního dán výrazem

$$C \,.\, (-1)^{(g''-g)(1-h)}\, i^{(1-g)(h''-h)} \,.\, \frac{\vartheta_{g''+1-g,\ h''+1-h}(0)}{\vartheta'_{11}(0)}$$

Avšak

$$g'' \equiv g + g' + 1,\ h'' - h \equiv h' + 1 \pmod 2)$$

$$g'' + 1 - g \equiv g',\ h'' + 1 - h \equiv h',$$

$$\vartheta_{g''+1-g,\ h''+1-h} = \vartheta_{g',\,h''+1-h} = (-1)^{\frac{1}{2}g'(h''+1-h-h')}\,\vartheta_{g'h'},$$

a proto bude tento koefficient vyjádřen tvarem

$$C\,(-1)^{(g'+1)(h+1)+\frac{1}{2}g'(h''+1-h-h')}i^{(1-g)(h''-h)}\frac{\vartheta_{g'h'}(0)}{\vartheta'_{11}(0)},$$

a poněvadž musí býti roven 1, máli obstáti rovnosť (β^0), musí

$$C=(-1)^{(g'+1)(h+1)+\frac{1}{2}g'(h''+1-h-h')}i^{(g-1)(h''-h)}\frac{\vartheta'_{11}(0)}{\vartheta_{g'h'}(0)},$$

a rovnice (β^0) obdrží tvar

$$(5)\qquad \sqrt{P_{gh}(u)-a_{g'h'}}=$$

$$(-1)^{(g'+1)(h+1)+\frac{1}{2}g'(h''+1-h-h')}i^{(g-1)(h''-h)}\frac{\vartheta'_{11}(0)}{\vartheta_{g'h'}(0)}\cdot\frac{\vartheta_{g''h''}(u)}{\vartheta_{gh}(u)}$$

$$g''\equiv g+g'+1, h''\equiv h+h'+1 \pmod 2.$$

Funkce (5) jest jednoznačnou analytickou funkcí proměnné u, která má v místech nullových funkce $\vartheta_{gh}(u)$, jež jsou, jak známo, modulis $(1,\tau)$ shodna s $\left(\frac{1-g}{2}\tau+\frac{1-h}{2}\right)$, nekonečna stupně prvního, a je dvojperiodická o periodách $(2-g')$, $(2-h')\,\tau$, předpokládaje, že g', h' mají jednu z hodnot 0, 1.

Neboť zvětšímeli na pravé straně rovnice (5) u o 1, obdrží čitatel faktor $(-1)^{g''}$, jmenovatel $(-1)^{g}$, tedy celý zlomek objeví se znásoben hodnotou $(-1)^{g''-g}=(-1)^{g'+1}$; jeli $g'=1$, je tento výraz roven 1, a funkce má periodu 1; jeli $g'=0$, objeví se funkce znásobena hodnotou (-1), t. j. změní znamení; vzrosteli pak u opět o 1, vrátí se funkce do původní hodnoty, a má periodu 2; v obou případech je tedy perioda rovna $(2-g')$.

Vzrosteli nyní u o τ, obdrží funkce faktor $(-1)^{h''-h}=(-1)^{h'+1}$; jeli $h'=1$, zůstala funkce nezměněna a má tedy periodu τ, a jeli $h'=0$, změnila funkce označení, a má tedy periodu 2τ; v obou případech je tedy perioda ta $(2-h')\,\tau$. —

Shledali jsme, že $P'_{gh}(u)$ je dvojperiodickou funkcí o periodách $(1,\tau)$ proměnné u, která má v okolí nullových míst u_0 funkce ϑ_{gh} tvar $-\frac{2}{(u-u_0)^3}+\mathfrak{P}(u-u_0)$, a která zmizí na místech, na nichž mizí tři funkce (5), t. j. funkce

$$\sqrt{P_{gh}(u)-a_{00}},\quad \sqrt{P_{gh}(u)-a_{01}},\quad \sqrt{P_{gh}(u)-a_{10}},$$

jichž místa nullová jsou různa. Nekonečna těchto tří funkcí jsou nullová místa funkce $\vartheta_{gh}(u)$ a sice jsou jednoduchá. Proto bude funkce

$$\varphi(u) = \sqrt{P_{gh} - a_{00}}\ \sqrt{P_{gh} - a_{01}}\,.\ \sqrt{P_{gh} - a_{10}}$$

míti s funkcí $P'_{gh}(u)$ společná nekonečna, a všecka její místa nullová jsou zároveň místy nullovými funkce $P'(u)$. Zvětšímeli u o 1, změní první dva činitelé znamení, třetí zůstane nezměněn, a tedy též celý součin se tím nemění, takže jest $\varphi(u+1) = \varphi(u)$. Zvětšímeli u o τ, zůstane prostřední faktor nezměněn, oba krajní změní znamení, a bude opět $\varphi(u+\tau) = \varphi(u)$. Funkce $\varphi(u)$ má tedy tytéž periody jako $P'(u)$, a podíl

$$\frac{P'_{gh}(u)}{\varphi(u)}$$

chová se v okolí všech konečných míst pravidelně, a je funkcí dvojperiodickou, což vyžaduje, aby byl veličinou stálou: Tudíž bude

$$P'_{gh}(u) = C\sqrt{P_{gh}(u) - a_{00}}\ \sqrt{P_{gh}(u) - a_{01}}\ \sqrt{P_{gh}(u) - a_{10}}$$

Je-li u_0 nullové místo funkce ϑ_{gh}, začíná rozvoj dle mocností rozdílu $(u - u_0)$ v levo členem $-\frac{2}{(u-u_0)^3}$, v pravo každý činitel členem $\frac{1}{u-u_0}$, a tedy bude nutně $C = -2$, takže máme posléz důležitý vztah

$$(6) \qquad P'_{gh}(u) = -2\sqrt{P_{gh}(u) - a_{00}}\ \sqrt{P_{gh}(u) - a_{01}}\ \sqrt{P_{gh}(u) - a_{10}}$$

Znamenáme-li tedy

$$P_{gh}(u) = x,$$

hoví tato funkce rovnici differencialné

$$(6^0) \qquad \frac{dx}{du} = -2\sqrt{(x-a_{00})(x-a_{01})(x-a_{10})},$$

v níž bylo znamení odmocniny náležitě voleno. Je-li tu $g = h = 1$, je funkce x v okolí bodu $u = 0$ tvaru $x = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}(u^2)$, ana jakožto sudá funkce obsahovati může pouze sudé mocniny proměnné. Odtud plyne

$$\frac{1}{x} = \frac{u^2}{1 + u^2\mathfrak{P}(u^2)} = u^2 + u^2\mathfrak{P}(u^2),\quad \frac{1}{\sqrt{x}} = u + c_1u^3 + c_2u^5 + \ldots,$$

z čehož se obdrží na základě známé poučky z theorie řad mocninových rozvoj tvaru

$u = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $\mathfrak{P}(0) = 0$, konvergentní v jistém okolí bodu $x = \infty$.

Touto řadou je stanovena určitá analytická funkce u proměnné x, která je pro nekonečně veliká x nekonečně malou, ačkoli dvojznačnou. Je patrno, že tato funkce hoví rovnici (6^0) aneb lépe rovnici differencialné

$$(6^*) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{-2\sqrt{(x-a_{00})(x-a_{01})(x-a_{10})}},$$

která ji úplně definuje, připojíme-li podmínku, že pro nekonečně veliká x má u míti nekonečně malé hodnoty. Tuto funkci u označíme symbolem

$$(7^0) \qquad u = \int\limits_{\infty} \frac{dx}{-2\sqrt{(x-a_{00})(x-a_{01})(x-a_{10})}}, \qquad x = P_{11}(u),$$

čímž nic jiného nemá býti vyjádřeno, nežli že derivace $\frac{du}{dx}$ rovná se pravé straně rovnice (6^*), a že pro $x = \infty$ jest $u = o$.

V ostatních případech, kdy (g, h) jest jednou ze sudých známek (0,0), (0,1), (1,0), chová se funkce x v okolí místa $u = o$ pravidelně a jest jakožto sudá funkce tvaru

$$x = c_0 + c_1 u^2 + c_2 u^4 + \ldots,$$

z čehož plyne pro dosti malá u:

$$\sqrt{x - c_0} = \sqrt{c_1} \,.\, u \;\; (1 + \alpha_1 u^2 + \alpha_2 u^4 + \ldots)$$

a odtud

$$u = \mathfrak{P}(\sqrt{x - c_0}), \; \mathfrak{P}(0) = 0, \; c_0 = P_{gh}(0) = a_{gh},$$

čímž jest u definováno jako analytická funkce proměnné x, která je nekonečně malá a dvojznačná v okolí bodu $x = a_{gh}$. I je patrno, že tato funkce hoví differencialné rovnici (6^*), která ji úplně definuje, připojíme-li podmínku, že funkce ta v bodě $x = a_{gh}$ zmizí; označíme ji symbolem

$$(7) \qquad u = \int\limits_{a_{gh}} \frac{dx}{-2\sqrt{(x-a_{00})(x-a_{01})(x-a_{10})}}, \qquad x = P_{gh}(u).$$

kterým nic jiného nemá vyjádřeno býti, než posledně řečené vlastnosti funkce u. Vzorec tento zahrnuje v sobě vzorec (7^0), umluvíme-li se psáti $a_{11} = \infty$.

6.

Zabývejme se nyní differencialnou rovnicí

$$(\alpha) \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{-2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}}.$$

Položíme-li

$$(\beta) \qquad x = a + (b-a)z,$$

bude jednak

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} x - a = (b-a)z \\ x - b = (a-b)(1-z) \\ x - c = (a-c)\left(1 - \dfrac{a-b}{a-c}z\right) \end{cases}$$

a jednak

$$\frac{dx}{dz} = b - a,$$

takže obdržíme rovnici

$$(\delta) \qquad \frac{du}{dz} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{c-a}\,.\,\sqrt{z(1-z)(1-\mu z)}},$$

kde

$$(\varepsilon) \qquad \mu = \frac{a-b}{a-c}.$$

Rovnice (α) přejde v rovnici (6*), volíme-li na př.

$$a = a_{01},\ b = a_{00},\ c = a_{10},$$

tak že substitucí

$$(8) \qquad x = a_{01} + (a_{00} - a_{01})z,\ \mu = \frac{a_{01} - a_{00}}{a_{01} - a_{10}}$$

obdrží rovnice (6*) tvar

$$(9) \qquad \frac{du}{dz} = \frac{\pm 1}{2\sqrt{a_{10} - a_{01}}\,.\,\sqrt{z(1-z)(1-\mu z)}}$$

kde o znamení odmocniny příležitostně rozhodneme.

Především uvažme, že $x = P_{gh}(u)$ a tedy též z je zcela určitá funkce proměnné u, a že odmocniny $\sqrt{z}$, $\sqrt{1-z}$, $\sqrt{1-\mu z}$ mají zcela určitou hodnotu, jsouce [srov. vzorce (γ)] jednoznačnými funkcemi proměnné u, a rovněž odmocnina $\sqrt{a_{10}-a_{01}}$ má hodnotu jednoznačně definovanou, ana jest jen zvláštní hodnotou jednoznačné funkce $\sqrt{P_{10}-a_{01}}$. Abychom tyto funkce vyjádřili funkcemi ϑ, uvažme, že z (γ) plyne v našem případě:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{x-a_{01}}{a_{00}-a_{01}}}$$

$$\sqrt{1-z} = \sqrt{\frac{x-a_{00}}{a_{01}-a_{00}}}$$

$$\sqrt{1-\mu z} = \sqrt{\frac{x-a_{10}}{a_{01}-a_{10}}}$$

Uvažujme nyní případ, kde $x = P_{01}(u)$. Tu obdržíme použitím pouze rovnice (5):

$$(10)\qquad \begin{cases} \sqrt{z} = -\dfrac{\vartheta_{00}}{\vartheta_{10}} \cdot \dfrac{\vartheta_{11}(u)}{\vartheta_{01}(u)} \\[2ex] \sqrt{1-z} = \dfrac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{10}} \cdot \dfrac{\vartheta_{10}(u)}{\vartheta_{01}(u)} \\[2ex] \sqrt{1-\mu z} = \dfrac{\vartheta_{01}}{\vartheta_{00}} \cdot \dfrac{\vartheta_{00}(u)}{\vartheta_{01}(u)}, \end{cases}$$

kde užito označení $\vartheta_{gh} = \vartheta_{gh}(o,\tau)$.

Při tom je patrno, že znamení odmocnin jsou tu tak stanovena, že pro $u = 0$, t. j. pro $z = 0$ jest $\sqrt{1-z} = 1$, $\sqrt{1-\mu z} = 1$. Z téhož vzorce (5) plyne pro $a_{10} = P_{10}(o)$:

$$\sqrt{a_{10}-a_{01}} = -\frac{\vartheta'_{11} \cdot \vartheta_{00}}{\vartheta_{01} \cdot \vartheta_{10}}, \qquad \vartheta'_{11} = \vartheta'_{11}(o,\tau)$$

a rovněž i

$$\sqrt{\mu} = k = \sqrt{\frac{a_{00}-a_{01}}{a_{10}-a_{01}}} = \left(\frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}}\right)^2.$$

Nalezlo se, že veličina ϑ'_{11} se dá jednoduše vyjádřiti součinem funkcí ϑ_{gh}; skutečně obdržíme z poslední z rovnic (X), dělíme-li ji na u a přejdeme-li k mezím pro $u = 0$:

$$(\alpha') \qquad \vartheta'_{11}(o) = 2\pi\sqrt[4]{q}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3.$$

Násobíme-li výrazy plynoucí z (X) a (Π) pro $u = o$, máme

$$(\beta') \; \vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10} = 2\sqrt[4]{q}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3 . \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2(1+q^{2n-1})^2(1-q^{2n-1})^2.$$

Znamenáme-li

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}) = h_{00}, \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}) = h_{01}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}) = h_{10}, \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}) = h_{11},$$

obdržíme patrně

$$h_{00}h_{01} . h_{10}h_{11} = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n-2})(1-q^{4n})$$
$$= (1-q^2(1-q^6)(1-q^{10})(1-q^{14}) \ldots .$$
$$\times (1-q^4)(1-q^8)(1-q^{12})(1-q^{16}) \ldots .$$
$$= \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{2m}) = h_{11},$$

tedy

$$h_{00}h_{01}h_{10} = 1,$$

a proto bude dle (β'):

$$\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10} = 2\sqrt[4]{q}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3$$

a porovnáme-li s (α'),

$$(11) \qquad \vartheta'_{11} = \pi\vartheta_{00}\vartheta_{01}\vartheta_{10},$$

takže vznikne ze vzorce pro $\sqrt{a_{10}-a_{01}}$:

$$(12) \qquad \sqrt{a_{10}-a_{01}} = -\pi\vartheta^2_{00},$$

při čemž napišme ještě hořejší výsledek

$$(13) \qquad \sqrt{k} = \sqrt[4]{\mu} = \frac{\vartheta_{10}}{\vartheta_{00}}$$

Abychom definitivně rozhodli o znamení pravé strany v (9), uvažme, že tu platí

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{a_{00} - a_{01}} \frac{dx}{du},$$

a že

$$a_{00} - a_{01} = \frac{\vartheta'^2_{11}}{\vartheta^2_{01}} \cdot \frac{\vartheta^2_{10}}{\vartheta^2_{00}} = \pi^2 \vartheta^4_{10},$$

takže bude

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{\pi^2 \vartheta^4_{10}} \cdot \frac{dx}{du};$$

jelikož tu funkce $\frac{dx}{du}$ rozvinuta dle mocností $(u - u_0)$ pro $u_0 = \frac{\tau}{2}$ začíná členem $-\frac{2}{(u - u_0)^3}$, začíná týž rozvoj funkce $\frac{dz}{du}$ členem $-\frac{2}{\pi^2 \vartheta^4_{10}} \frac{1}{(u - u_0)^3}$.

Tato funkce může se dle (9) ale pouze znamením lišiti od součinu

$$2\sqrt{a_{10} - a_{01}} \cdot \sqrt{z(1-z)(1-\mu z)} = 2\pi \frac{\vartheta^2_{00} \vartheta^2_{01}}{\vartheta^2_{10}} \cdot \frac{\vartheta_{11}(u) \vartheta_{10}(u) \vartheta_{00}(u)}{\vartheta_{01}(u)^3},$$

jenž začíná při témž rozvoji výrazem $\frac{1}{(u - u_0)^3}$ násobeným koefficientem

$$2\pi \frac{\vartheta^2_{00} \vartheta^2_{01}}{\vartheta^2_{10}} \cdot \frac{\vartheta_{11}\left(\frac{\tau}{2}\right) \vartheta_{10}\left(\frac{\tau}{2}\right) \vartheta_{00}\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta'_{01}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3} = -2\pi \frac{\vartheta^2_{00} \vartheta^2_{01}}{\vartheta^2_{10}} \cdot \frac{\vartheta_{00} \vartheta_{01} \vartheta_{10}}{\vartheta'^3_{11}} = -\frac{2}{\pi^2 \vartheta^4_{10}},$$

první členy obou řad se tedy shodují, a proto jsou řady — nemohouce býti znamení protivných — sobě rovny. Bude tudíž

$$(9^0) \qquad \frac{du}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{a_{10} - a_{01}} \sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}}.$$

Znamenáme-li, jakož zvykem,

$$-\sqrt{a_{10} - a_{01}} = \pi \vartheta^2_{00} = 2K,$$

bude

$$(9^*) \qquad 2Ku = \int_0 \frac{dz}{-2\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}}$$

Zavedeme-li nyní funkci

$$s = -\sqrt{z} = \frac{\vartheta_{00}}{\vartheta_{10}} \frac{\vartheta_{11}(u)}{\vartheta_{01}(u)},$$

bude

(10*) $$2Ku = v = \int_0 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}},$$

při čemž je počáteční hodnota odmocniny rovna 1.

Sečteme-li čtverce prvých dvou z rovnic (10), a přičteme-li ku čtvercované třetí z nich μ-násobný čtverec prvé, majíce zřetel k rovnici (13), obdržíme důležité vztahy mezi čtverci funkcí ϑ, a sice:

(14) $$\begin{cases} \vartheta_{00}^2 \vartheta_{11}(u)^2 + \vartheta_{01}^2 \vartheta_{10}(u)^2 = \vartheta_{10}^2 \vartheta_{01}(u)^2 \\ \vartheta_{10}^2 \vartheta_{11}(u)^2 + \vartheta_{01}^2 \vartheta_{00}(u)^2 = \vartheta_{00}^2 \vartheta_{01}(u)^2, \end{cases}$$

jež se obyčejně přímo dokazují způsobem, kterýž vyložiti nám bude možno teprvé později.

7.

Veličiny a_{00}, a_{01}, a_{10} jsou funkce jediného parametru τ, a proto bude jediná z nich neodvislou. Zavedeme-li však veličiny ω, ω' tak aby $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$, bude funkce

$$-\frac{d^2}{du^2} \log \vartheta_{gh}\left(\frac{u}{\omega}, \frac{\omega'}{\omega}\right) = \wp_{gh}(u|\omega, \omega')$$

totožna s funkcí

$$\frac{1}{\omega^2} P_{gh}\left(\frac{u}{\omega}\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right),$$

která má tu vlastnosť, že obdrží v bodech u', pro něž

$$\frac{u'}{\omega} = \frac{u}{\omega} + m + n\tau$$

tutéž hodnotu jako v bodě u, nechť jsou m, n libovolná čísla celistvá. Poněvadž tu bude zároveň

$$u' = u + m\omega + n\omega',$$

je patrno, že platí vztah

$$\wp_{gh}(u+m\omega+n\omega'|\omega,\ \omega')=\wp^{gh}(u|\omega,\ \omega'),$$

t. j. $\wp_{gh}(u)$ jsou funkce o periodách ω, ω'.

Znamenáme-li pak

$$\wp_{gh}(o|\omega,\ \omega')=\frac{1}{\omega^2}P_{gh}\left(o\left|\frac{\omega'}{\omega}\right.\right)=\frac{1}{\omega^2}a_{gh}=e_{gh},$$

bude se funkce

$$(\alpha)\qquad \sqrt{\wp_{gh}(u|\omega,\ \omega')-e_{g'h'}}$$

od funkce $\frac{1}{\omega}\sqrt{P_{gh}\left(\frac{u}{\omega}\left|\frac{\omega'}{\omega}\right.\right)-a_{g'h'}}$ lišiti nanejvýš znamením, a bude jí rovna, umluvíme-li se přikládati odmocnině (α) onu hodnotu, jejíž rozvoj dle mocností $(u-u_0)$ pro $u_0=\frac{1-g}{2}\omega'+\frac{1-h}{2}\omega$ začíná členem $\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{\frac{u}{\omega}-\frac{u_0}{\omega}}=\frac{1}{u-u_0}$.

Za touto supposicí obdržíme pak z rovnice (6) vztah

$$(\mathfrak{A})\quad \wp'_{gh}(u|\omega,\ \omega')=-2\sqrt{\wp_{gh}(u)-e_{00}}\sqrt{\wp_{gh}(u)-e_{01}}\sqrt{\wp_{gh}(u)-e_{10}},$$

a funkce $\wp_{gh}(u)=x$ hoví tedy rovnici differencialné

$$(\mathfrak{A}^0)\qquad \frac{dx}{du}=-2\sqrt{(x-e_{00})(x-e_{01})(x-e_{10})},\qquad x=\wp_{gh}(u),$$

kde veličiny e_{gh} jsou funkce dvou neodvislých proměnných ω, ω', takže vládne jimi jediný vztah.

Netřeba tu zvlášť vykládati, že z rovnice $(\mathfrak{A}^0)$ plyne analogickými úvahami, jimiž jsme odvodili vzorec (7), následující rovnice:

$$(\mathfrak{A}^*)\quad u=\int_{e_{gh}}\frac{dx}{-2\sqrt{(x-e_{00})(x-e_{01})(x-e_{10})}},\qquad x=\wp_{gh}(u)$$

platící i pro $g=h=1$, umluvímeli se psáti $e_{11}=\infty$.

Veličiny e_{gh} jsou toho způsobu, že jsouli dvě dány, je již tím třetí určena, předpokládaje, že periody ω,ω' předepsány nejsou.

Jeli α veličina nezávislá na u, bude funkce

$$(\mathfrak{B})\qquad y=\wp_{gh}(u)+\alpha,$$

ano tu

$$\frac{dy}{du} = \wp'_{gh}(u),$$

hověti rovnici

$$(\mathfrak{B}^*) \qquad u = \int_{c_{gh}} \frac{dy}{-2\sqrt{(y-c_{00})(y-c_{01})(y-c_{10})}},$$

znamenáme-li

$$c_{gh} = e_{gh} + \alpha.$$

Veličiny c_{gh} jeví se při neurčitém α, ω, ω' býti neodvislými vespolek, takže můžeme je přímo voliti, obecně snad pouze v jistých mezích libovolně, a pak z nich určiti veličiny α, ω, ω'.

Je tedy otázka, je-li lze a za jakých podmínek stanoviti veličiny α, ω, ω' z předepsaných hodnot c_{gh}, tak aby funkce ($\mathfrak{B}$) hověla rovnici ($\mathfrak{B}^*$). Odpověď záleží v podrobném studiu funkce u proměnné y definované rovnicí ($\mathfrak{B}^*$), a funkce obrácené, aneb, což totéž jest, v integrování rovnice differencialné

$$(\mathfrak{B}^0) \qquad \frac{dy}{du} = -2\sqrt{(y-c_{00})(y-c_{01})(y-c_{10})}.$$

Dříve než k řešení této otázky přikročíme, pokusíme se o typické vyjádření funkcí $P_{gh}(u)$. Poslední z rovnic (X) poskytne, dvakrát logarithmicky differencována, patrně

$$\frac{d^2}{du^2} lg\, \vartheta_{11}(u) = \frac{d^2}{du^2} lg\, sin\, \pi u + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d^2}{du^2} lg\left(1-q^{2n}e^{2u\pi i}\right) + \frac{d^2}{du^2} lg\left(1-q^{2n}e^{2u\pi i}\right) \right].$$

Avšak

$$1-q^{2n}e^{2u\pi i} = -q^n e^{u\pi i}\left(q^n e^{u\pi i} - q^{-n}e^{-u\pi i}\right)$$
$$= -2\, i\, q^n e^{u\pi i} \sin(u+n\tau)\pi,$$
$$1-q^{2n}e^{-2u\pi i} = q^{+n}e^{-u\pi i}\left(q^{-n}e^{u\pi i} - q^n e^{-u\pi i}\right)$$
$$= 2\, i\, q^n e^{-u\pi i} \sin(u-n\tau)\pi,$$

takže bude

$$\frac{d^2}{du^2} lg\left(1-q^{2n}e^{2u\pi i}\right) = \frac{d^2 lg\, sin\,(u+n\tau)\pi}{du^2},$$
$$\frac{d^2}{du^2} lg\left(1-q^{2n}e^{-2u\pi i}\right) = \frac{d^2 lg\, sin\,(u-n\tau)\pi}{du^2},$$

a následovně

$$\frac{d^2 lg\,\vartheta_{11}'(u)}{du^2} = \frac{d^2 lg\,sin\,\pi u}{du^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d^2}{du^2}\,lg\,sin\,(u+n\tau)\,\pi\right.$$

$$\left. + \frac{d^2}{du^2}\,lg\,sin\,(u-n\tau)\,\pi\right),$$

čili

$$\frac{d^2 lg\,\vartheta_{11}(u)}{du^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{d^2}{du^2}\,lg\,sin\,(u-n\tau)\,\pi.$$

Užijemeli nyní známého vzorce

$$sin\,\pi\,v = \pi v \prod_{m=-8}^{\infty}{}' \left(1-\frac{v}{m}\right)e^{\frac{v}{m}},$$

(kde čárka u znamení součinu vyjadřuje, že se má vynechati hodnota $m=0$, t. j. že se má utvořiti součin hodnot vzniklých z obecného činitele pro $m=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$) obdržíme:

$$\frac{d\,lg\,sin\,\pi v}{dv} = \frac{1}{v} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{v-m}+\frac{1}{m}\right)$$

$$-\frac{d^2 lg\,sin\,\pi v}{dv^2} = \frac{1}{v^2} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(v-m)^2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(v-m)^2},$$

Pomocí tohoto vzorce obdržíme

$$(\mathfrak{S})\qquad -\frac{d^2 lg\,\vartheta_{11}(u)}{du^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\ \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(u-m-n\tau)^2} = P_{11}(u).$$

Tento součet ale nekonverguje neodvisle od způsobu seřadění svých členů, ale součet, jejž obdržíme z něho differencováním, t. j.

$$(\mathfrak{S}')\quad P'_{11}(u) = -2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\ \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(u-m-n\tau)^3} = -2\sum_{m,\,n}\frac{1}{(u-m-n\tau)^3}$$

konverguje neodvisle od seřadění svých členů, aneb jak říkáme, bezpodmínečně. To dokážeme pomocí následující věty:

Řada

$$(\gamma)\qquad \sum_{m,\,n}{}' \frac{1}{|m\omega+n\omega'|^3},$$

v níž ω, ω' jsou libovolné dvě veličiny od 0 různé, jichž podíl není realným, je konvergentní.

Prvý důkaz této a jiné obecnější mnohem věty podal prvý *Eisenstein**), zde ale stůjž kratší důkaz *Weierstrassův.*

Poněvadž ω, ω' nejsou v realném poměru, bude lze sestrojiti rovnoběžník, jehož vrcholy jsou 0, ω, $\omega + \omega'$, ω', a celou rovinu rozděliti v rovnoběžníky s ním shodné o vrcholech $m\omega + n\omega'$.

Prodlužme strany $(\overline{\omega, \omega + \omega'})$, $(\overline{\omega', \omega + \omega'})$ a vyšetřme, která z nich je bodu 0 blíže; budiž to první z nich, a vzdálenosť příslušná buď δ; v případě opačném bychom změnili označení hodnot ω, ω', píšíce (ω', ω) místo (ω, ω'). Jsouli přímky ty od bodu 0 stejně vzdáleny, nezmění se na věci ničeho.

Jelikož členové součtu (γ) jsou veličiny kladné, můžeme je uvésti v libovolný pořádek, aniž tím hodnotu součtu, jeli konečná, změníme. Rozdělme je v skupiny, jichž součty buďte $S_1, S_2, S_3, \ldots S_\nu, \ldots$, kde S_ν obsahuje členy, v nichž hodnoty $m\omega + n\omega'$ jsou representovány body položenými vesměs na obvodu rovnoběžníka o vrcholech $\pm \nu\omega \pm \nu\omega'$; nejkratší vzdálenosť obvodu tohoto rovnoběžníku od bodu 0 je patrně $\nu\delta$; počet bodů sem příslušných jest 8ν, a pro všechny platí $|m\omega + n\omega'| \geqq \delta\nu$, takže bude $S_\nu < \frac{8\nu}{\delta^3 . \nu^3} = \frac{8}{\delta^3} \cdot \frac{1}{\nu^2}$, a tedy

$$S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_\nu + \ldots < \frac{8}{\delta^3} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{\nu^2} + \ldots \right)$$

kterážto řada konverguje, a tedy též řada (γ).

Odtud odvodíme bezpodmínečnosť konvergence řady $(\mathfrak{E}')$. Je totiž

$$\sum_{m,n}{}' \frac{1}{|u - m\omega - n\omega'|^3} = \sum_{m,n}{}' \frac{1}{\left|1 - \frac{u}{m\omega + n\omega'}\right|^3} \cdot \frac{1}{|m\omega + n\omega'|^3}$$

$$\begin{pmatrix} m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \\ m = 0, n = 0 \text{ vyloučeno} \end{pmatrix}$$

Veličiny $\left|1 - \frac{u}{m\omega + n\omega'}\right|^{-3}$ patrně nepřevyší určitou stálou veličinu M, takže bude

$$\sum_{m,n}{}' \frac{1}{|u - m\omega - n\omega'|^3} < M \cdot \sum_{m,n}{}' \frac{1}{|m\omega + n\omega'|^3},$$

*) Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetzt sind (Mathem. Abhandlungen v. Dr. G. Eisenstein, p. 213).

a poněvadž u součtu v pravo konvergence je dokázána, je též součet v levo konvergentním. Pro ω (resp. ω') rovné 1, ω' (resp. ω) rovné τ plyne odtud přímo absolutní konvergence součtu ($\mathfrak{C}'$).

Řadu ($\mathfrak{C}'$) obdržíme též differencováním řady

$$\varphi(u) = \sum_{m,n}{}' \left[\frac{1}{(u-m-n\tau)^2} - \frac{1}{(m+n\tau)^2} \right] + \frac{1}{u^2},$$

která rovněž absolutně konverguje. Neboť obecný člen má hodnotu

$$\frac{1}{(u-m-n\tau)^2} - \frac{1}{(m+n\tau)^2} = \frac{u(2m+2n\tau-u)}{(m+n\tau)^2(u-m-n\tau)^2}$$

$$= -\frac{2u}{\left(1-\dfrac{u}{m+n\tau}\right)^2}\left(1-\frac{u}{2m+2n\tau}\right)\cdot\frac{1}{(m+n\tau)^3},$$

z čehož další průběh důkazu jest patrný.

Z rovnice $P'_{11}(u) - \varphi'(u) = 0$ soudíme, že musí existovati určitá veličina stálá c, tak aby

$$P_{11}(u) = c + \varphi(u).$$

Weierstrass znamená nekonečný součet

$$(\mathfrak{D}^0) \qquad \frac{1}{u^2} + \sum_{m,n}{}' \left\{ \frac{1}{(u-m\omega-n\omega')^2} - \frac{1}{(m\omega+m\omega')^2} \right\} = \wp(u|\omega,\ \omega'),$$

takže bude naše funkce $\varphi(u)$ dána výrazem $\wp(u|1,\ \tau)$, tedy

$$(\mathfrak{D}) \qquad P_{11}(u) = \wp(u|1,\ \tau) + c$$

Z rovnice (3) § 5. soudíme, že tu bude

$$(\mathfrak{D}') \quad P_{gh}(u) = P_{11}\left(u + \frac{1-g}{2}\tau + \frac{1-h}{2}\right) = \wp\left(u + \frac{1-g}{2}\tau + \frac{1-h}{2}\right) + c,$$

z čehož patrno, jak lze veškery funkce P vyjádřiti funkcí $\wp$.

Zároveň je tu patrným vztah

$$\frac{1}{\omega^2}\wp\left(\frac{u}{\omega}\middle|1, \frac{\omega'}{\omega}\right) = \wp(u|\omega,\ \omega'),$$

a tedy též vztah

$$(\mathfrak{D}^*)\qquad \wp_{gh}(u|\omega,\ \omega') = \wp\left(u + \frac{1-g}{2}\omega' + \frac{1-h}{2}\omega\middle|\omega,\ \omega'\right) + c_0,$$

kde
$$c_0 = \frac{1}{\omega^2}\,c.$$

Funkce $\wp(u|\omega,\ \omega')$ je sudou funkcí proměnných u, ω, ω', a souměrnou vzhledem k posledním dvěma, kteréž jsou její periody, ano tu

$$\wp(u + m\omega + n\omega') = \wp(u).$$

V nejjednodušším vztahu nalezá se k funkci $p_{11}(u)$, a sice jest

$$\wp_{11}(u|\omega,\ \omega') = \wp(u|\omega,\ \omega') + c_0,$$

z kteréžto rovnice plyne, že funkce ta hoví rovnici differencialné $(x = pu)$.

$$(\mathfrak{E})\qquad \frac{dx}{du} = -2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}\,,$$

kde e_ι jsou dány výrazy $e_{gh} - c_0$, a sice, píšeme-li

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega}{2}\middle|\omega,\ \omega'\right),\quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega+\omega'}{2}\right),\quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega'}{2}\right),$$

bude patrně dle $(\mathfrak{D}^*)$.

$$(\mathfrak{E}^0)\qquad e_1 = e_{10} - c_0,\ e_2 = e_{00} - c_0,\ e_3 = e_{01} - c_0.$$

Funkce

$$\sqrt{\wp u - e_1},\quad \sqrt{\wp u - e_2},\quad \sqrt{\wp u - e_3}$$

jsou jednoznačné vzhledem k u, a volíme-li hodnoty odmocnin tak, aby jich rozvoj podle mocností proměnné u začínal členem $\frac{1}{u}$, odpadá i jich formalná dvojznačnosť. Zároveň platí rovnice:

$$\sqrt{\wp u - e_1} = \sqrt{\wp_{11}(u) - e_{10}},\quad \sqrt{\wp u - e_2} = \sqrt{\wp_{11}(u) - e_{00}},$$
$$\sqrt{\wp u - e_3} = \sqrt{\wp_{11}(u) - e_{01}}.$$

Funkce $\wp(u)$ má tu důležitou vlastnost, že při ní je vztah mezi veličinami e_1, e_2, e_3 znám, platí tu totiž

$$(\mathfrak{E}^1) \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

takže rovnice $\mathfrak{E}$ je tvaru

$$(\mathfrak{E}^2) \qquad \frac{dx}{du} = -\sqrt{4x^3 - g_2 x - g^3},$$

kde patrně

$$-4g_2 = e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_3 e_1$$
$$4g_3 = e_1 e_2 e_3.$$

Abychom dokázali vztah $(\mathfrak{E}_1)$, zjednejme si rozvoj funkcí $\wp u$, $\wp' u$ podle mocností u.

Znamenáme-li $w = m\omega + n\omega'$, zní definice funkce $\wp u$ následovně:

$$\wp u = \sum_w \left(\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right) + \frac{1}{u^2}$$

Pro $|u| < |w|$ platí, jak známo:

$$\frac{1}{w-u} = \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2} + \frac{u^2}{w^3} + \ldots + \frac{u^\nu}{w^{\nu+1}} + \ldots$$

a odtud differencováním

$$\frac{1}{(w-u)^2} = \frac{1}{w^2} + 2\frac{u}{w^3} + 3\frac{u^2}{w^4} + \ldots + \nu \frac{u^{\nu-1}}{w^{\nu+1}} + \ldots$$

a odtud tedy pro $|u|$ menší než nejmenší z veličin $|w|$:

$$(\alpha) \qquad \wp(u) = \frac{1}{u^2} + 3s_4 u^2 + 5s_6 u^4 + \ldots,$$

kde jsme znamenali

$$s_{2n} = \sum_w{}' \frac{1}{w^{2n}},$$

při čemž jsme ihned za $s_{2n+1} = \sum_w{}' \frac{1}{w_{2n+1}}$ kladli hodnotu 0, neboť v tomto součtu se členy po dvou ruší.

Z rovnice (α) plyne:

$$\wp^3 u = \frac{1}{u^6} + \frac{9s_4}{u^2} + \mathfrak{P}_0(u), \quad \mathfrak{P}_0(0) = 15 s_6$$

$$\wp^2 u = \frac{1}{u^4} + \mathfrak{P}_1(u) \quad , \mathfrak{P}_1(0) = *$$

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \mathfrak{P}_2(u) \quad , \mathfrak{P}_2(0) = 0$$

a dále

$$\wp'(u) = -\frac{2}{u^3} + 6 s_4 u + 20 s_6 u^3 + \dots$$

tedy

$$\wp'(u)^2 = \frac{4}{u^6} - \frac{24 s_4}{u^2} + \mathfrak{P}_3(u), \quad \mathfrak{P}_3(0) = -80 s_6.$$

Bude tedy

$$\wp'(u)^2 - \{4\wp^3 u - g_1 \wp^2 u - g_2 \wp u - g_3\}$$

jen tehdy rovno nulle, je-li $g_1 = o$, ano tu v $\wp'(u)^2$ člen obsahující $\frac{1}{u^4}$ nepřichází. Pro g_2 nalezne se podmínka:

$$-24 s_4 - 36 s_4 + g_2 = o$$

t. j. bude

$$g_2 = 60 s_4 = 60 \sum_{m,\,n}' \frac{1}{(m\omega + n\omega')^4}$$

Pro stanovení g_3 třeba znáti ještě absolutní členy řad $\mathfrak{P}$, kteréž jsme napsali vedle; obdržíme tak rovnici:

$$-80 s_6 - 60 s_6 - g_3 = 0$$

t. j.

$$g_3 = 140 s_6 = 140 \,.\, \sum_{m,\,n}' \frac{1}{(m\omega + n\omega')^6}$$

Máme tedy vzorec ($\mathfrak{E}$) ve tvaru

($\mathfrak{E}^*$) $$\wp'(u) = -\sqrt{4\wp_3 u - g_2 \wp u - g_3},$$

kde

$$g_2 = 60 \sum_{m,\,n}' \frac{1}{(m\omega + n\omega')^4}$$

$$g_3 = 140 \sum' \frac{1}{(m\omega + n\omega')^6}$$

Obdobným způsobem pak, jakým jsme výše obdrželi rovnici (7), nalezneme

$$(\mathfrak{F})\quad u = \int_{\infty} \frac{dx}{-2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} = \int_{\infty} \frac{dx}{-\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},\ x = \wp u.$$

Ne příliš obtížno bude nalézti vzorce

$$(\mathfrak{F}^0)\quad u = \int_{e_k} \frac{dx}{-2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} = \int_{e_k} \frac{dx}{-\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},\ x = \wp_k u$$

kde znamenáme

$$\wp_0 u = \wp u,\ \wp_1 u = \wp\left(u + \frac{\omega}{2}\right),\ \wp_2 u = \wp\left(u + \frac{\omega + \omega'}{2}\right),\ \wp_3 u = \wp\left(u + \frac{\omega'}{2}\right)$$

26.

Studien an Hypostomen böhmischer Trilobiten Nro. IV.

Vorgetragen von Dr. **Ottomar Novák** am 12. März 1886.

(Mit einer Tafel Abbildungen.)

Vergleichende Studien, die ich in der letzten Zeit an den Trilobitengattungen Cromus und Encrinurus unternommen habe, führten mich zu der Überzeugung, dass die Merkmale der Hypostome dieser Gattungen in jeder Beziehung vollkommen übereinstimmen.

Dieses Resultat gab Veranlassung, zu der Vermuthung dass die von Barrande 1852 *) gegründete Gattung Cromus mit der Gattung Encrinurus identisch sein dürfte. In diesem Falle hätte die viel ältere Bezeichnung Encrinurus die Prioritaet.

Nach den auf der beiliegenden Tafel dargestellten Hypostomen der beiden genannten Gattungen können die gemeinsamen Merkmale derselben folgendermaassen zusammengefasst werden:

Charakteristik des Hypostomes von Cromus und Encrinurus.

Die allgemeine Form des Hypostomes bildet ein Dreieck, dessen convexe Basis der Hypostomalsutur entspricht. Der meist sehr schmale

---

*) Syst. Silur. Boh. Vol. I. p. 821.

Vorderrand erweitert sich an den beiden Ecken zu ziemlich grossen, schräg nach rückwärts gerichteten, dreieckigen, concaven Flächen, die das vordere Flügelpaar repraesentiren. Die horizontalen Seitenränder beginnen hinter den Vorderflügeln, etwa in der Mitte der Totallänge des Hypostomes. Sie sind anfangs sehr schmal, erweitern sich aber nach rückwärts und verschmelzen endlich am Hinterrande zu einem ebenfalls horizontalen, zungenförmigen, nach hinten zugespitzen Fortsatze.

Die Vorderfurche ist nicht immer deutlich entwickelt. Die Seitenfurchen sind schmal und parallel mit den Rändern. Die Hinterfurche ist etwas breiter und convex. Das Mittelstück ist hoch gewölbt. Sein Vorderlappen ist oval und durch zwei parallele Furchen in drei Längsloben eingetheilt, die jedoch nicht bis an die Mittelfurche hinabreichen. Von diesen Loben ist der Medianlobus am stärksten gewölbt und ragt mitunter über den Vorderrand des Kopfes hinaus (Vergl. Cromus transiens Fig. *15—16* und. Encrin. punctatus Fig. *5—8*). Die beiden Lateralloben verschmelzen vor der Mittelfurche zu einer gleichförmig gewölbten Fläche. Die Mittelfurche ist meist durch eine kurze transversale Depression angedeutet. Der Hinterlappen des Mittelstückes ist klein und nimmt etwa ein fünftel der Totallänge des letzteren ein.

Der Umschlag ist schmal, die mit ihm zusammenhängenden Hinterflügel (Fig. 19) viereckig und schräg nach einwärts gerichtet. Sie sind in der zweiten Hälfte der Totallänge des Hypostomes angebracht.

Nachdem nun, wie aus dieser Schilderung, sowie auch aus dem blossen Vergleichen der begleitenden Figuren hervorgeht, eine vollständige Übereinstimmung der Hypostome der beiden Gattungen klar dargestellt erscheint, sei mir erlaubt auch noch die übrigen Schalenelemente der beiden fraglichen Gattungen näher zu untersuchen.

Was zunächst den Kopf von Cromus betrifft, so muss bemerkt werden, dass die bis jetzt ungenügend bekannte Bildung der Kopfnäthe und die darauf beruhende falsche Vorstellung von dem Verlaufe derselben wahrscheinlich jener entscheidende Moment war, welcher Barrande die Veranlassung zur Gründung dieser Gattung gegeben haben mag. Von den Kopfnäthen der Gattung Cromus hatte Barrande blos die Gesichtsnath gekannt.*) Seiner Auffassung nach, besteht der Kopf dieser Gattung bloss aus 2 Stücken nämlich:

*) Was den Verlauf derselben betrifft vergl. Barrande Syst. Silur. Vol. I. Supplt I. Pl. 9. Fig. 24. und Vol. I. Pl. 43. Fig. 1.

1) Aus der Glabella mit den beiden mit ihr zusammenhängenden fixen Wangen. 2) Aus den Randschildern („joues mobiles"), die jedoch vor dem Stirnlappen der Glabela durch eine Querbrücke in blos ein Stück verwachsen wären.

Dies ist aber nicht der Fall. Aus meinen in Fig. *9—12* gegebenen Abbildungen von Cromus Beaumonti geht hervor, dass die vorderen Äste der Gesichtsnath keinen nach vorn gerichteten Winkel bilden, wie dies die citirten Zeichnungen Barrande's zeigen, sondern dass sie in der Mitte des Stirnlappens durch eine kurze horizontale Querlinie („Schnauzennath" Nieszkowski) mit einander verbunden sind. Von den beiden Enden dieser Quernath entspringt je eine kurze Längsnath, die sich über den Vorderrand des Kopfes bis an den Kopfumschlag verfolgen lässt (Fig. 11—12). Diese beiden Parallelnäthe schliessen ein kleines viereckiges Stück, nämlich das Schnauzenschild ein, dessen vordere Kante dem vorragenden Medianlappen des Hypostomes gegenübersteht.

Es besteht daher der Kopf von Cromus nicht aus 2, sondern aus 4, und mit Einschluss des Hypostomes aus 5 Schalenstücken.

Genau dasselbe Verhältniss ist auch bei Encrinurus sichergestellt worden. Ich verweise hier blos auf die trefflichen von F. Schmidt*) gegebenen Abbildungen von Encrin. punctatus deren einige auf der beiliegenden Tafel in Fig. 1—4 copirt sind.

Obwohl das Schnauzenschild von Cromus Beaumonti etwas breiter ist als das von Encrin. punctatus, so kann dieser Unterschied doch als kein wesentlicher betrachtet werden.

Auch sind in dem Verlaufe der beiden, das Schnauzenschild einschliessenden Suturen einige Unterschiede nachweisbar.

Dieselben berühren sich bei Encrinurus punctatus mit ihren vorderen Enden, nämlich am Randsaume (Fig. 2.) und divergiren gegen den Stirnlappen. In diesem Falle müssen sich auch die Randschilder in demselben Punkte auf der Unterseite des Kopfes gegenseitig berühren**).

Bei Encrin. variolaris ist nun, wie aus Salter's Zeichnung in Mem. Geol. Survey Dec. *VII.* Pl. 4. Fig. 13. geschlossen werden kann, das Gegentheil der Fall. Bei dieser Art berühren sich

---

*) Revision der ostbaltischen Silur-Triboliten. I. Taf. XIV. Fig. 11 *a—c* und Fig. 12 sowie auch Taf. XV. Fig. 18.

**) Vergl. Nieszkowski Versuch einer Monogr. d. Trilob. der Ostseeprovinzen im Archiv für Naturkunde d. Est-Liv. & Curlandes Ser. I. Bd. I. p. 603 Taf. III. Fig. 7.

die beiden Längsnäthe am Stirnlappen und divergiren dann gegen den Randsaum.

Bei Cromus Beaumonti (Fig. 9 und 12) sind sie, wie schon früher gezeigt wurde, mit einander parallel.

Es können also auch diese Unterschiede nicht als massgebend aufgefasst werden.

Als einen ferneren Hauptunterschied zwischen Cromus und Encrinurus betrachtet Barrande das Vorhandensein von 4 Paar Seitenfurchen und Loben an der Glabella des ersteren und das Fehlen derselben bei dem letzteren. Dieser Umstand ist, wie die Erfahrung und Analogie mit anderen Trilobiten lehrt, unwesentlich. Übrigens ist die nach Schmidt l. c. copirte, in Fig. 1 der beiliegenden Tafel dargestellte Glabella von Encrin. punctatus*), ebenso wie die böhmischen Cromusarten mit 4 Paar Seitenloben versehen. Diese letzteren verlieren sich sehr oft zwischen den groben Tuberkeln der Glabella und entgehen daher leicht der Beobachtung.

Was den Thorax betrifft, so ist weder im Bau noch in der Anzahl der Leibesringe irgend ein Unterschied nachweisbar. Die sämmtlichen in vollständigen Exemplaren bekannten Cromus- und Encrinurusarten besitzen ohne Ausnahme 11 freie Leibesglieder.

Das Pygidium zeigt nicht nur bei Encrinurus, sondern auch bei Cromus ein sehr variables Verhältniss in der Anzahl der Spindelringe zu der Anzahl der Seitenrippen. Ich habe dieses Verhältniss bei vielen Arten der genannten Gattungen festgestellt und fand in einigen Fällen auch eine vollkommene Übereinstimmung desselben. Daher kann diesem Verhältnisse, welches von Barrande**) als ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal benützt wird, keine besondere Wichtigkeit beigelegt werden.

Es wird daher vortheilhaft erscheinen die Gattung Cromus einzuziehen, und die sämmtlichen böhmischen Arten mit Encrinurus zu vereinigen.

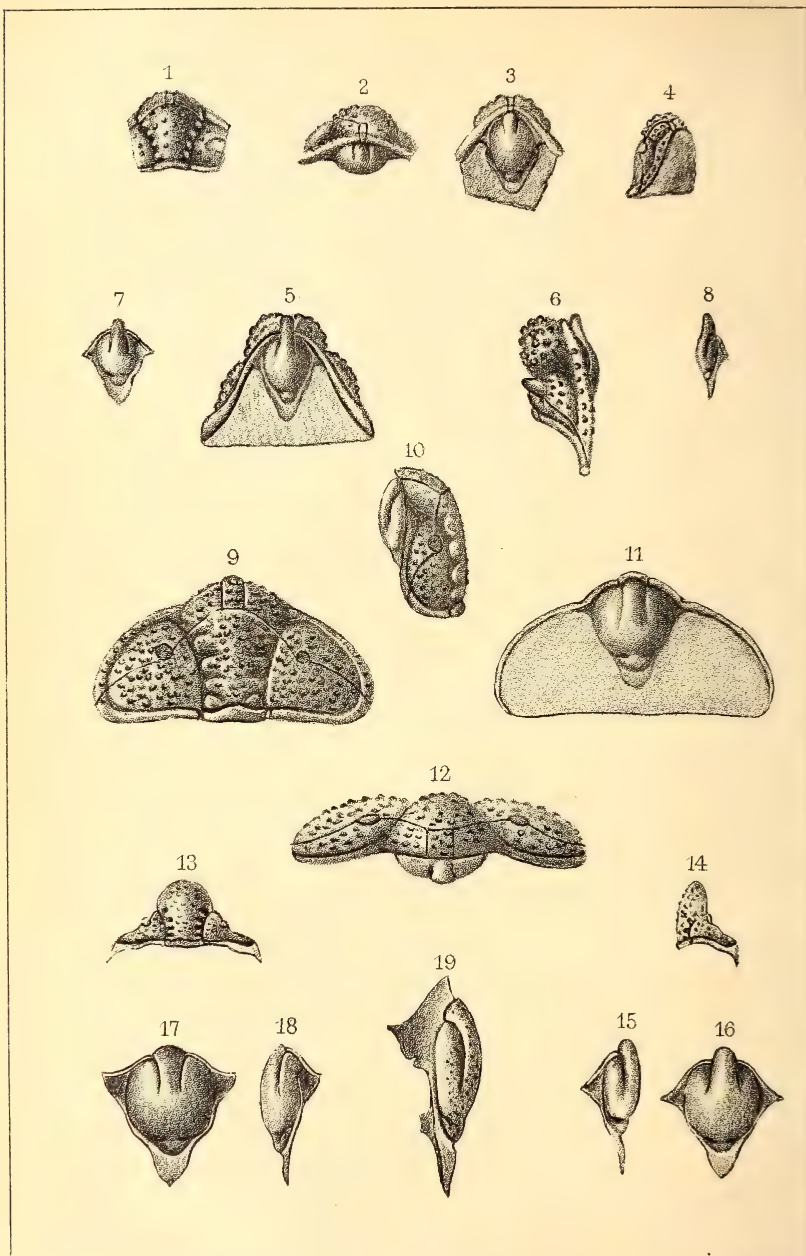
Hiemit hat die bereits von Salter***) ausgesprochene Ver-

---

*) Es sei mir erlaubt hier zu bemerken, dass das Hypostom des von Schmidt l. c. Taf. Taf. XIV. Fig. 11 *c* als Encrin. punctatus bestimmten Trilobiten von den von mir auf Taf. I. Fig. 5—8 abgebildeten Hypostomen etwas verschieden ist. Es ist daher möglich, dass man es im vorliegenden Falle, mit zwei verschiedenen Arten zu thun hat. Die von mir abgebildeten Originale befinden sich in der Sammlung des Mus. of practical Geology in London.

**) Syst. Silur. Boh. Vol. I. p. 823.

***) Memoirs Geol. Survey. Decade VII. 1853.



Imp. Farský Prague.

muthung von der Identitaet der beiden genannten Gattungen, ihre volle Bestätigung gefunden.

Erklärung der Tafel.

Fig. 1. Encrinurus punctatus Wahl. sp. von Johannis auf Oesel (Copie nach Schmidt) Kopf von oben.
„ 2. id. von der Stirn gesehen.
„ 3. id. von unten.
„ 4. id. Seitenansicht, etwas schräg.
„ 5. Encrinurus punctatus aus den Woolhope beds von Worcester (Original in der Sammlung des Mus. of Pract. geology zu London Cat. Nro. 15/67). Kopf von unten.
„ 6. id. von der Seite.
„ 7. Hypostom derselben Art. (Dieselbe Sammlung Cat. Nro. 19/34).
„ 8. id. von der Seite.
„ 9. Encrinurus (Cromus) Beaumonti Barr. sp. aus E—e2 von Z. Kopanina. Kopf von oben.
„ 10. id. von der Seite.
„ 11. id. von unten.
„ 12. id. von der Stirn.
„ 13. Encrinurus (Cromus) transiens Barr. sp. aus E—e2 von Listice. Kopf ohne Randschilder und ohne Schnauzenschild.
„ 14. id. von der Seite.
„ 15. Hypostom derselben Art 2mal vergrössert von der Seite. Ebendaher.
„ 16. id. von aussen. (Der Medianlappen des Mittelstückes ragt über den Vorderrand hinaus).
„ 17. Encrinurus (Cromus) Bohemicus Barr. sp. 2mal vergrössert aus E—e2 von Lochkov. Von der Aussenseite.
„ 18. id. Seitenansicht. (Der Medianlappen des Mittelstückes reicht bis an den Vorderrand).
„ 19. Encrinurus (Cromus) intercostatus Barr. sp. aus E—e2 von Lochkov. Hypostom von der Seite, die Hinterflügel zeigend. (Der Medianlappen des Mittelstückes erreicht nicht den Vorderrand).

27.

Grundzüge der Relief-Perspective.

Vorgetragen von **Miloslav Pelíšek** am 25. Juni 1886.

I. Litterarische Übersicht.

Das Relief ist eine materielle, räumliche Abbildung eines gegebenen Raumes und der in ihm befindlichen Gegenstände, wobei die Tiefendimension gesetzmässig verkürzt ist; je nach den Gesetzen dieser Verkürzung unterscheiden wir das antike und das moderne Relief. Das erste enthält keine perspectivischen Gesetze, sondern ist charakteristisch durch seine mehr oder weniger abgeplatteten Formen, welche durch den Hintergrund wie entzweigeschnitten aussehen (die Franzosen nennen dies ronde-bosse, sciée en deux). Solche Reliefs, wie hoch auch sonst ihr künstlerischer Wert ist, erwecken keine perspectivischen Täuschungen, wie die modernen, deren Begründer der gleich als Maler und als Bildhauer bekannte Laurentius Ghiberti ist. Derselbe verfertigte (1401) ein Relief für ein Kirchenthor in Florenz, in welchem zum ersten Male perspectivische Gesetze beachtet wurden, so dass es zu grosser Verwunderung aller Künstler wie ein Bild wirkte; diese Wirkung war so mächtig, dass selbst Michel Angelo beim Anblicke desselben ausgerufen haben soll, dass es würdig wäre, das Thor zum Paradies zu bilden.

Seit dieser Zeit wendeten die Künstler ihre Aufmerksamkeit dieser Gattung der Reliefs zu und besonders in Frankreich hat sich eine berühmte Schule herausgebildet, zu deren würdigsten Vertretern Cousin, Goujon, Bontemps, Desjardins, Pilon, Paget, Saint-Georges etc. zu zählen sind.

Im XVII. Jahrhundert hat der Italiener Algardi noch einen Schritt mehr auf der so begonnenen Bahn gethan, dass er sich nämlich nicht auf die Abbildung kleiner Räume beschränkte wie seine Vorgänger, sondern dass er Reliefs nach historischen Gemälden, Schlachten usw. vorstellend, in so virtuoser Weise ausführte, dass dieselben fast den Eindruck des Originales machten.

Ebenso wie die Maler in den ersten Perioden ihrer Kunst nicht nach einheitlichen Regeln vorgiengen, die nun die Linearperspective bilden, die man aber besser ebene Perspective nennen

sollte, so auch die Bildhauer, die sich in der ersten Zeit dieser Schöpfungen lediglich von ihrem Gefühl leiten liessen, da sie keine Winke und Regeln kannten, welche die Lehre von der Reliefperspective, die man besser räumliche Perspective nennen sollte, ausmachen.

Es wird allgemein angenommen, dass Desargues der erste die Principien der Reliefperspective angab, es hat sich jedoch nichts darüber in seinen Schriften erhalten. Erst Abraham Bosse, Professor an der französischen Malerakademie, bekannt als ein eifriger Freund und Verehrer Desargues, gibt einige diesbezügliche Methoden in seinem Werke „Traité des pratiques géométrales et perspectives“ (1648) an.

Erst ein ganzes Jahrhundert später können wir ein neues Werk, in welchem der Reliefperspective Erwähnung geschieht, verzeichnen; es ist dies das Werk Petiots, Raisonnement sur la Perspective (1758). Der erste jedoch, der auf die Sache von rein geometrischem Standpunkte blickte, war der Magdeburger Professor Breyssig, und zwar in seiner Abhandlung Versuch einer Relief-Perspective (1792), welche aber wegen der rein mathematischen Tendenz sich der Gunst der Künstler nicht erfreute, sondern bald in Vergessenheit gerieth.

Eine neue Epoche leitete auch auf diesem Gebiete das klassische Werk Poncelets, Traîté des propriétés projectives des figures, uud zwar dessen Theil Théorie des Figures homologigues ou Perspective-relief; die Details werden aber nicht durchgeführt, sondern nur die Vermuthung ausgesprochen, dass diese geometrische Verwandtschaft die wissenschaftliche Grundlage der Basreliefs bilden müsse.

Analytisch wurden die Gesetze der Reliefperspective zum ersten Mal von Anger aufgestellt und zwar in den Abhandlungen Analyische Darstellung der Bas-relief-Perspective (1834) und Beiträge zur analytischen Darstellung der Basrelief-Perspective (1846).

Von den späteren Schriften über die Reliefperspective sind uns noch bekannt, De la Gournerie: Traité de la Perspective linéaire (1859), in welchem am Ende, mit keinem besondern Glück, die Reliefperspective behandelt wird; dann das ausgezeichnete Werk von Poudra: Traité de Perspective-relief (1860), in welchem sich für den Praktiker sehr nützliche Betrachtungen befinden, das aber in theoreitscher Hinsicht nicht befriedigt; endlich Stau-

digl: Grundzüge der Reliefperspective (1864), welcher, wie wir beiläufig aus der Vorrede entnehmen, dazu veranlasst wurde, als er im bekannten Lehrbuch von Schreiber die Bemerkung las, dass die Gesetze der räumlichen Perspective noch nicht entdeckt sind, was wol nur auf Irrthum beruht, wie die vorhergehende Literaturangabe beweist. Das Buch Staudigls bedeutet entschiedenen Fortschritt in dem zweiten, constructiven Theile, die Deductionen des ersten, theoretischen Theiles scheinen uns aber nicht genug übersichtlich, die Principien dieses Abbildens nicht genug scharf hervorgehoben.

Endlich haben wir den Vortrag des Geheimrathes Quido Hauk anzuführen: Über die Grenzen zwischen Malerei und Plastik, gehalten bei der feierlichen Eröffnung der Alma Mater in Berlin, in welchem unter Anderem die Ansicht ausgesprochen ist, dasz die bisherige Theorie der Reliefperspective, deren Begründer Breyssig und Poncelet waren nichts als ein schöner Traum war; dass wir dieselbe verlassen müssen und behufs einer richtigeren Theorie gründliche Studien der Verhältnisse der Beleuchtung namentlich der Intensitätslinien zu machen haben. Diese Ansichten stützen sich auf die Abweichungen von den Gesetzen der Reliefperspective, die man an den Reliefs von Thorwaldsen wahrnehmen kann, der, wie allgemein bekannt, bei seinen Schöpfungen ganz anders vorgieng, als etwa die oben angeführten Künstler, und dessen Kunstwerke sich durch grosse Natürlichkeit auszeichnen.

Indessen meinen wir, dass diese Abweichungen sich in ähnlicher Weise aus der Nichtübereinstimmung des Sehprocesses und der Centralprojection erklären lassen müssen, wie wir bei der ebenen Perspective versucht haben*) und dass daher die jetzige Theorie der räumlichen Perspective eine ebenso genaue und richtige Annäherung an die Wirklichkeit ist wie die ebene Perspective und dass wir daher entweder beide fallen lassen müssten oder aber beide als gleich richtig anerkennen müssen. Wir bringen demnach jenen Behauptungen gegenüber grosse Reserve

*) Siehe meine Abhandlungen:

Über perspectivische Restitution, Bewegung und Verzerrung (Sitzungsber. der kön. böhm. Ges. der Wissenschaften, Prag 6. Mai 1886).

Über eine specielle, durch ein dioptrisches System bestimmte Raumcollineation (Ebendaselbst 21. Mai 1886).

Untersuchung der Wirkungen perspectivischer Darstellungen (Ebendaselbst 4. Juni 1886).

entgegen und werden an der Richtigkeit der bisherigen Theorie so lange festhalten, bis wir nicht durch eine genauere, welche in schlagender Weise die Mängel der jetzigen darthut und dieselbe beseitigt, zum Gegentheil gezwungen werden.

Es schien uns daher der Versuch, die Grundzüge der Reliefperspective in Kürze und mit Strenge zu entwickeln, da sich dieselbe in neuerer Zeit wieder eines immer mehr wachsenden Interesses der darstellenden Künstler erfreut, dankbar zu sein.

II. Theorie der Relief-Perspective.

Perspectivische Darstellungen sind Abbildungen eines gegebenen Raumes d. h. der in ihm befindlichen Gegenstände, welche nur an die Gesetze gebunden sind, dass die „Bilder" der Ebenen und ihrer Schnitte, also der Geraden uud Punkte, wieder solche sind; dann, dass die Verbindungslinien irgend eines Originalpunktes und seines Bildes durch ein festes Centrum, das Auge, hindurchgehen. Diese Bedingungen, die wir offenbar nicht umgehen können, wie immer wir uns die Abbildungsmethode denken, genügen aber zu einer bestimmten Abbildung eines gegebenen Raumes. Durch die erste ist eine Raumcollineation bestimmt, und zwar, wie schon Poncelet gezeigt, durch fünf Paare entsprechender Punkte; die zweite Bedingung hat zur Folge, dass die durch das gegebene Centrum gehenden Geraden, die sogenannten Sehstrahlen und daher auch ihr Schnitt, jenes Centrum, selbstentsprechend sind. Daraus geht hervor, dass diese besondere, sogenannte centrale Raumcollineation, oder Relief-Perspective oder Raumperspective durch das Centrum und durch vier Paare einander entsprechende, auf den Sehstrahlen liegende Punkte bestimmt ist. Wir wollen aber nicht die Resultate der allgemeinen Collineation entlehnen, weil dieselbe den ausübenden Künstlern fremd ist, sondern wir werden den Beweis führen, dass durch diese Angaben, wenn man an den obigen Bedingungen consequent festhält, die in Rede stehende Abbildungsart bestimmt, ja die einzig mögliche ist.

Seien also $O \equiv O'$ das Centrum und aa', bb', cc', dd' vier Paar entsprechender Punkte auf den Sehstrahlen, mit anderen Worten $a'b'c'd'$ die „Bilder" der Punkte $abcd$; dann entspricht dem Tetraëder $abcd$ das Tetraëder $a'b'c'd'$. In der fraglichen Beziehung sind dann folgende Ebenen selbstentsprechend:

$$oab \equiv o'a'b' \qquad obc \equiv o'b'c' \qquad ocd \equiv o'c'd'$$
$$oac \equiv o'a'c' \qquad obd \equiv o'b'd'$$
$$oad \equiv o'a'd'$$

daher auch die Schnittlinien derselben, und zwar ausser den vier gegebenen Sehstrahlen

$$oa \equiv o'a' \qquad ob \equiv o'b' \qquad oc \equiv o'c' \qquad od \equiv o'd'$$

noch die Schnittlinien folgender Ebenen:

oab und ocd, die wir bezeichnen mit g_1
oac „ obd „ „ „ „ g_2
oad „ obc „ „ „ „ g_3.

Betrachten wir nun etwa die Ebene oab, so erkennen wir, dass die Durchschnittspunkte γ und γ' der Geraden g_1 mit den Geraden ab und $a'b'$ entsprechende Punkte sind, dasselbe gilt von den Schnittpunkten der Geraden g_2 mit ab und $a'b'$ usw.

Auf den Geraden ab und $a'b'$ treten also die Punktreihen $ab\gamma\ldots$ und $a'b'\gamma'\ldots$ auf, die so beschaffen sind, dass die Verbindungslinien aa', bb', $\gamma\gamma'\ldots$ durch O gehen, und der Schnittpunkt δ der Geraden ab und $a'b'$ notwendig ein selbstentsprechender Punkt ist.

Zur Übersicht führen wir für solche selbstentsprechenden Punkte folgende Bezeichnung ein:

$$\overline{ab}\frown\overline{a'b'} \equiv \delta_1 \qquad \overline{bc}\frown\overline{b'c'} \equiv \delta_4 \qquad \overline{cd}\frown\overline{c'd'} \equiv \delta_6$$
$$\overline{ac}\frown\overline{a'c'} \equiv \delta_2 \qquad \overline{bd}\frown\overline{b'd'} \equiv \delta_5$$
$$\overline{ad}\frown\overline{a'd'} \equiv \delta_3$$

dann erkennen wir, dass je drei dieser selbstentsprechenden Punkte immer auf einer Geraden liegen, nämlich auf der Schnittlinie zweier entsprechender Ebenen der erwähnten Tetraëder, und zwar ist

$\delta_1\delta_2\delta_4$ die Schnittlinie der Ebenen abc und $a'b'c'$
$\delta_1\delta_3\delta_5$ „ „ „ „ abd „ $a'b'd'$
$\delta_2\delta_3\delta_6$ „ „ „ „ acd „ $a'c'd'$
$\delta_4\delta_5\delta_6$ „ „ „ „ bcd „ $b'c'd'$.

Auf diesen Geraden ist daher, wie man leicht bemerken kann, jeder Punkt selbstentsprechend.

Betrachten wir etwa die Geraden $\delta_1\delta_2\delta_4$ und $\delta_1\delta_3\delta_5$, welche in einer Ebene liegen, weil sie den Punkt δ_1 gemeinschaftlich haben, dann erkennen wir auch, dass die zwei übrigen Geraden $\delta_2\delta_3\delta_6$ und $\delta_4\delta_5\delta_6$ in dieser Ebene liegen, weil sie je zwei Punkte mit jenen gemeinschaftlich haben. Daraus folgt aber, dass jede Gerade dieser Ebene selbstentsprechend ist, weil es ihre Schnittpunkte mit den vorhergehenden sind und endlich, dass ein jeder Punkt dieser Ebene selbstentsprechend ist, als der Schnittpunkt irgend zweier durch ihn gezogenen selbstentsprechenden Geraden.

Diese sich selbst und zwar punktweise entsprechende Ebene werden wir die Bildebene nennen.

Nebenbei haben wir folgenden geometrischen Satz gewonnen:

Gehen die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte zweier Tetraëder $abcd$ und $a'b'c'd'$ durch einen einzigen Punkt O, dann schneiden sich die entsprechenden Kanten, bezüglich Flächen in den Punkten bezüglich Geraden einer einzigen Ebene.

Es entsteht nun die Frage, ob es mit den gegebenen Bedingungen verträglich ist, dass allgemein einer Ebene wieder eine Ebene entspricht.

Eine beliebige Ebene schneidet die Kanten des Tetraëders $abcd$ in sechs Punkten, die wir übersichtlich bezeichnen wollen mit:

$$(A) \qquad \begin{matrix} (a \cdot b) & (a \cdot c) & (a \cdot d) \\ & (b \cdot c) & (b \cdot d) \\ & & (c \cdot d), \end{matrix}$$

und die selbstentsprechende Bildebene in der selbstentsprechenden Geraden G; wir müssen also ersichtlich machen, dass die ihnen entsprechenden Punkte, nämlich die Schnittpunkte der entsprechenden Sehstrahlen mit den entsprechenden Kanten des Tetraëders $a'b'c'd'$, die wir in leicht verständlicher Weise bezeichnen wollen:

$$(A') \qquad \begin{matrix} (a' \cdot b') & (a' \cdot c') & (a' \cdot d') \\ & (b' \cdot c') & (b' \cdot d') \\ & & (c' \cdot d'), \end{matrix}$$

mit der Geraden G in einer Ebene liegen müssen.

Die Verbindungslinien z. B. $\overline{(a \cdot b)\ (a \cdot c)}$ und $\overline{(a' \cdot b')\ (a' \cdot c')}$, wobei wir alle fünfzehn Combinationen zu zweien der angeführten Punkte

zu nehmen haben, müssen sich notwendig in den selbstentsprechenden Punkten der Geraden G schneiden, daher schneidet irgend eine der fünfzehn Verbindungslinien zweier Punkte des Systems (A') die Gerade G; dies ist aber nur möglich, wenn jene sechs Punkte in einer Ebene liegen.

Damit ist der Beweis geliefert, dass in unserer Beziehung allgemein einer Ebene wieder eine solche entspricht, und dass daher diese Art von Abbildung überhaupt möglich und nur so möglich ist.

Wir müssen hier ausdrücklich die Bemerkung machen, dass wir absichtlich den Beweis so und nicht anders führten (dass wir namentlich keine projectivischen Sätze benutzten), wie sich etwa Schopenhauer in seinem bekannten Werke „Die Welt als Wille und Vorstellung" einen geometrischen Beweis überhaupt vorstellt: nämlich das Anstreben unmittelbarer Evidenz ohne Berufung an Sätze, die an sich dem vorliegenden Problem fremd sind; daher ich meine, jeden darstellenden Künstler, wenn er auch keine besonderen geometrischen Kenntnisse, sondern nur ein durchgebildetes Raumvorstellungsvermögen besitzt, von der Richtigkeit vorangehender Behauptungen überzeugt zu haben.

Auf Grund der vorangehenden Betrachtungen müssen wir notwendig schliessen, dass einer zur Bildebene parallelen Ebene wieder eine solche entspricht; insbesondere, dass die durchs Auge gehende zur Bildebene parallele Ebene sich selbst entspricht; endlich, dass der Ebene im Unendlichen ebenfalls eine zur Bildebene parallele Ebene im Endlichen entspricht, da, wenn sich dieselbe im Unendichen befände, auf jeder beliebigen Geraden zwei selbstentsprechende Punkte, ein endlicher und ein unendlicher auftreten würden, d. h. jede Gerade wäre selbstentsprechend und daher auch jeder Punkt des Raumes, was wir doch ausschliessen müssen.

Die angeführte Ebene, welche also die Bilder aller Punkte im Unendlichen enthält, werden wir die Verschwindungsebene nennen.

Man sieht nun leicht ein, dass die in Rede stehende Beziehung auch durch das Auge und zwei Paare einander entsprechender paralleler Ebenen bestimmt ist, insbesondere durch das Auge O, die Bildebene B und die Verschwindungsebene F.

Im letzten Falle ist der Raum von unendlicher Tiefe zwischen der Bildebene und dem Unendlichen durch den Raum von endlicher Tiefe zwischen der Bildebene und der Verschwindungsebene abgebildet. Diese allgemeinste Abbildungsart des Raumes auf Grund der

PELÍŠEK: RELIEF-PERSPECTIVE.

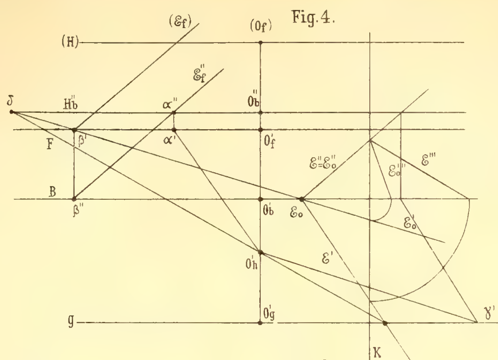


Fig. 4.

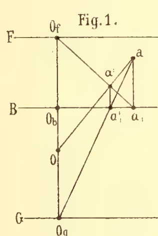


Fig. 1.

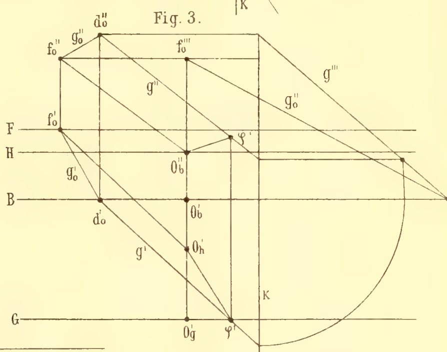


Fig. 3.

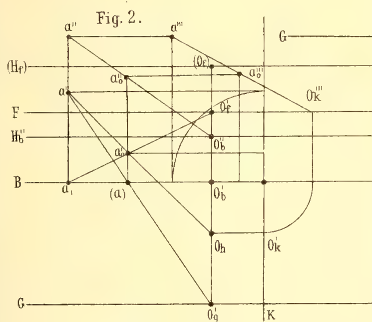


Fig. 2.

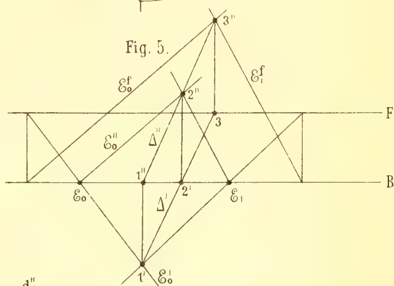


Fig. 5.

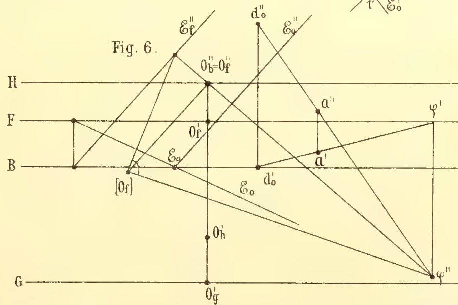


Fig. 6.

Lith. Farský Prag.

oben ausgesprochenen Bedingungen nennen wir Raum- oder Relief-Perspective. Also:

Die Relief-Perspective ist die Abbildung eines Raumes durch einen anderen, welcher die Bedingungen zu Grunde liegen, dass Ebenen und ihre Durchschnitte sich wieder als solche abbilden und dass die Verbindungslinien der Originalpunkte und ihrer Bilder durch ein festes Centrum gehen.

Es ist evident, dass diese Bedingungen erfüllt werden müssen, wenn wir nicht zugeben wollen, dass uns allgemein eine krumme Linie oder Fläche als eine Gerade resp. Ebene erscheinen kann; unsere Auseinandersetzung hat auch erbracht, dass dies die einzig mögliche Art solcher Abbildung ist.

Da wir über die Verschwindungsebene willkürlich verfügen können, so können wir dieselbe auch mit der Bildebene zusammenfallen lassen und erhalten als ersten Specialfall der Relief-Perspective die Linearperspective.

Zweitens können wir uns dieses Zusammenfallen im Unendlichen denken, dann erhalten wir als zweiten Specialfall die Ähnlichkeit, welche in der Sculptur auch Ronde-bosse oder Haut-relief heisst, während dem allgemeinsten Fall das Bas-relief entspricht.

Drittens können wir die Bildebene im Endlichen, die Verschwindungsebene im Unendlichen annehmen, und erhalten dann, wie oben erwähnt, die Congruenz.

In den vorhergehenden Fällen haben wir stillschweigend das Auge im Endlichen vorausgesetzt. Liegt O im Unendlichen, dann kann man, wie wir vorgreifend erwähnen, mit den sogenannten Fluchtelementen freilich nicht mehr operieren, da dies ein endliches Centrum bedingt, aber auch in diesem kann man einem beliebigen Tetraëder wieder ein solches zuordnen, so dass die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte gegebene Richtung haben; diesen Specialfall der Reliefperspective nennt man räumliche Affinität und speciell, wenn die erwähnte constante Richtung senkrecht zur Bildebene ist, orthogonale Affinität. Nach unserer Ansicht bildet dieselbe die Theorie des antiken Bas-reliefs.

Nach dem Urtheile von Kunstkennern nimmt Thorwaldsen eine Mittelstellung zwischen der antiken und der modernen Schule; in der Theorie würde dem der Fall eines zwar sehr weit, aber nicht unendlich entfernten Centrums entsprechen.

Da sich die betrachtete Abbildungsart durch grosse Bildlichkeit auszeichnet, so werden wir alle den Ebenen, Geraden und Punkten entsprechenden Elemente ihre Bilder nennen; dann erkennen wir sehr leicht die Giltigkeit nachstehender Sätze:

1. Das Bild einer Ebene ist durch ihre Bildtrasse T und durch die Fluchtlinie F nämlich den Schnitt mit der Verschwindungsebene bestimmt.

2. Ein System paralleler Ebenen bildet sich als ein Ebenenbüschel ab, dessen Träger der Schnitt ihrer gemeinschaftlichen Fluchtebene mit der Verschwindungsebene ist, mit anderen Worten, die Bilder paralleler Ebenen haben gemeinschaftliche Fluchttrasse.

Speciell:

3. Die Bilder horizontaler Ebenen haben als gemeinschaftliche Fluchttrasse den Horizont d. h. den Schnitt der durchs Auge gehenden Horizontalebene mit der Verschwindungsebene. Ferner:

4. Die Bilder verticaler Ebenen haben eine Verticale zur gemeinschaftlichen Fluchtlinie und speciell: die Bilder der Kreuzrissebenen die Hauptverticale V d. i. den Schnitt der durchs Auge gehenden Kreuzrissebene, sogenannter Hauptverticalebene mit der Verschwindungsebene. Den Durchschnittspunkt O_f des Horizonts mit der Hauptverticalen, also die orthogonale Projection des Auges auf die Verschwindungsebene nennen wir den Hauptpunkt und den Sehstrahl OO_f den Hauptstrahl, die Länge OO_f die Hauptdistanz.

5. Die Fluchtlinien der Bilder derjenigen Ebenen, welche mit der Bildebene einen gegebenen Winkel einschliessen, sind die Tangenten desjenigen Kreises, dessen Centrum der Hauptpunkt ist, und den man als den Schnitt desjenigen Rotationskegels mit der Verschwindungsebene ansehen kann, dessen Axe die Hauptdistanz ist und dessen Erzeugende mit der Verschwindungsebene den gegebenen Winkel einschliessen; man nennt diesen Kreis den Neigungskreis, und zwar ist ersichtlich, dass dessen Radius grösser, gleich oder kleiner ist als die Hauptdistanz, je nachdem der gegebene Winkel grösser, gleich oder kleiner ist als 45°. Im Falle der Gleichheit heisst der Neigungskreis aus leicht begreiflichen Gründen Distanzkreis. Speciell gehen die Fluchttrassen von zur Bildebene senkrechten Ebenen durch den Hauptpunkt, in welchen der Neigungskreis degeneriert; die Fluchttrassen von zur Bildebene parallelen Ebenen sind im Unendlichen — der Neigungskreis degeneriert in die unendlich ferne Gerade.

6. Das Bild einer Geraden ist bestimmt durch deren Bildtrasse t und durch ihren Fluchtpunkt f d. h. den Schnitt des durchs Auge gehenden, zu der gegebenen Geraden parallelen Fluchtstrahls mit der Verschwindungsebene.

7. Ein Parallelstrahlenbündel bildet sich als ein Strahlenbündel, dessen Scheitel der Schnittpunkt des gemeinschaftlichen Fluchtstrahls mit der Verschwindungsebene ist; mit anderen Worten: die Bilder paralleler Geraden haben gemeinschaftlichen Fluchtpunkt. Insbesondere:

8. Die Fluchtpunkte der Bilder horizontaler Geraden liegen am Horizont; aufwärts oder abwärts geneigter Geraden oberhalb oder unterhalb desselben; zur Bildebene senkrechter Geraden im Hauptpunkt; der in Kreuzrissebenen befindlichen Geraden auf der Hauptverticalen; zur Bildebene paralleler Geraden im Unendlichen; mit der Bildebene bestimmten Winkel einschliessender Geraden auf einem bestimmten Neigungskreis.

9. Sollen wir auf eine gegebene Gerade G, deren Bild tf ist, gegebene Strecken perspectivisch auftragen, so erhalten wir die Bilder dieser Strecken am einfachsten in folgender Weise: durch die Gerade tf legen wir eine beliebige Ebene, deren Bildtrasse T und Fluchttrasse F ist, machen ferner auf $F: f\tau = fo$ und tragen auf T die gegebenen Strecken von t nach $\alpha\beta\ldots$ auf; verbinden diese Punkte mit τ: dann sind die Schnittpunkte $\alpha'\beta'\ldots$ dieser Verbindungslinien mit tf die gesuchten Punkte. Um dieses zu beweisen, tragen wir auf die gegebene Gerade G, welche zu of parallel ist, die gegebenen Strecken aus t nach $\alpha_1\beta_1\ldots$, dann sind die Dreiecke $t\alpha\alpha_1$, $t\beta\beta_1\ldots$ gleichschenklig und ähnlich dem Dreiecke $fo\tau$; die Verbindungslinien $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1\ldots$ sind daher parallel zu $o\tau$, es ist somit τ der gemeinschaftliche Fluchtpunkt dieser Geraden, und deshalb sind $\alpha'\beta'\ldots$ die Bilder der Punkte $\alpha_1\beta_1\ldots$, was zu beweisen war.

Der Punkt τ heisst der Theilungspunkt der gegebenen Geraden; da aber die Richtung der Geraden F willkürlich war, so erkennen wir, dass der Ort der Theilungspunkte derjenige Theilungskreis ist, dessen Centrum der Fluchtpunkt der gegebenen Geraden ist und dessen Halbmesers die Entfernung des Auges vom Fluchtpunkte ist, welchen Abstand man die schiefe Entfernung oder auch Accidentaldistanz nennt. Aus den Fundamentalsätzen der Ähnlichkeit leuchtet weiter ein, dass wir auch $\alpha'\beta'\ldots$ erhalten, indem wir auf die Bildtrasse T aliquote Theile der gegebenen Strecken und gleichzeitig denselben Theil der Accidentaldistanz auf F von f bis

nach o auftragen. Einen solchen Punkt o nennt man daher aliquoten Theilungspunkt.

10. Sollen wir den Winkel zweier Geraden oder Ebenen oder einer Geraden mit einer Ebene bestimmen, so führen wir die Aufgabe mit den Fluchtelementen durch. Wenn wir umgekehrt eine Ebene oder eine Gerade unter gegebenen Bedingungen zu construiren haben, so ermitteln wir, mit deren Fluchtelementen arbeitend die Fluchtpunkte und Fluchtlinien und dann erst die Bildtrassen derselben.

11. Das Bild eines Punktes a bestimmen wir allgemein als den Schnitt zweier Geraden, welche durch ihn gehen; der Einfachheit wegen wählen wir aber erstens die Senkrechte aa_1 zur Bildebene, deren Bild durch den Fusspunkt a_1 als Bildtrasse und den Hauptpunkt o_f als Fluchtpunkt bestimmt ist; zweitens den Sehstrahl oa, der sich selbst entspricht; dann ist der Schnitt a' des Sehstrahls mit der Geraden $a_1 o_f$ das gesuchte Bild des Punktes a.

12. Führen wir die Construction mit irgend einem Punkte b der durch o gehenden, zur Bildebene parallelen Ebene, so finden wir, dass das Bild b' in dieselbe hinein fällt, was uns übrigens aus dem Früheren bekannt ist; jetzt erkennen wir aber noch, dass nur der Augepunkt selbstentsprechend ist, während ein beliebiges Gebilde und sein Bild in dieser Ebene ähnlich und für das Centrum o ähnlich gelegen sind.

13. Führen wir die Construction für irgend einen Punkt c der mit der Bildebene parallelen Ebene G, die vom Auge ebenso weit und in demselben Sinne entfernt ist, wie die Bildebene von der Fluchtebene, dann erkennen wir wegen $cc_1 \| oo_f$, dass wir haben $oc \| o_f c_1$ und dass sich daher ihr Schnittpunkt c' im Unendlichen befindet. Ein beliebiger Punkt p dieser Ebene hat sein Bild im Unendlichen in der Richtung op, mit anderen Worten: das Bild der Ebene G ist die Ebene im Unendlichen. Diese Ebene hat demnach dieselbe Bedeutung fürs Original wie die Verschwindungsebene fürs Bild, daher der Name Gegenebene. Kennen wir das Relief, so können wir auch mit Hilfe der Gegenebene durch dieselbe Construction wie früher das Original herstellen; aus diesem Grunde nennen wir auch beide Ebenen Gegenebenen.

14. Mit Hilfe der Gegenebene können wir das Bild einer Geraden der Ebene auch in folgender Weise herstellen:

Man verbindet das Centrum O mit dem Schnittpunkt der gegebenen Geraden (Schnittlinie der gegebenen Ebene) mit der Gegen-

ebene, und zieht zu dieser Verbindungslinie (Ebene) durch die Bildtrasse eine parallele Gerade (Ebene).

Betrachtet man speciell Gerade, welche durch den Schnittpunkt O_g des Hauptstrahles mit der Gegenebene, den sogenannten Hauptgegenpunkt gehen, so erkennt man sofort, dass ihre Bilder auf der Bildebene senkrecht stehen. Verbindet man also einen beliebigen Punkt p des Originals mit dem Hauptgegenpunkte O_g und errichtet in dem Schnittpunkte p_1 der Verbindungslinie mit der Bildebene eine Senkrechte zur letzteren, so liegt auf ihr und selbstverständlich auch auf op das Bild p'. Kehren wir diesen Satz um, so erhalten wir den wichtigsten Satz der Reliefperspective.

(α) Projiciert man die Punkte a' ... des Reliefs orthogonal auf die Bildebene nach a_1 ..., so sind diese Projectionen zugleich die Centralprojectionen der Originale a... für den Hauptgegenpunkt O_g als Centrum und umgekehrt, projiciert man die Punkte des Originals aus dem Hauptgegenpunkt auf die Bildebene central, so sind diese Projectionen zugleich orthogonale Projectionen des Reliefs auf diese Ebene. —

15. Legen wir durch den Hauptstrahl OO_f irgend eine Ebene, so bilden die in ihr liegenden entsprechenden Punkte eine ebene Centralcollineation, in welcher O das Centrum, der Schnitt mit der Bildebene die selbstentsprechende Gerade, die Schnittlinien mit den Gegenebenen die Gegenlinien sind. Denkt man sich nun diese Ebene so bewegt, dass die genannten Schnittlinien in ihren Ebenen bleiben, während der Centralpunkt der Ebene immer die Orthogonalprojection seiner ursprünglichen Lage auf diese Ebene bleibt, so bleiben auch die Punkte a ... a' ... fortwährend die Orthogonalprojectionen ihrer ursprünglichen Lage auf die betrachtete Ebene. Dies liefert den allgemeinen Satz:

Projicieren wir das Auge O, das System der Originalpunkte a ... und ihrer Reliefbilder a' ... orthogonal auf eine zum Hauptstrahl OO_f parallele Ebene E nach O_1 bezüglich a_1 ... und a'_1 ..., so entsprechen sich die Orthogonalprojectionen a_1 ... der Originalpunkte und die Orthogonalprojectionen a'_1 ... der Reliefbilder in der durch die orthogonale Projection O_1 des Auges als Centralpunkt und die Schnittlinien dieser Ebenen mit der Bildebene, bezüglich den Gegenebenen bestimmten ebenen Centralcollineation.

Wählen wir speciell die horizontale Ebene, die durch unseren Standpunkt O_h geht und Grund- oder Basisebene heisst, so erhalten wir den Satz:

(β) Die Horizontalprojectionen der Originalpunkte und der Reliefpunkte sind entsprechende Punkte derjenigen ebenen Centralprojection, welche durch den Standpunkt O_h als Centrum und die Schnitte dieser horizontalen Ebene mit der Bildebene und die Gegenebenen als Anfangslinie und Gegenlinien bestimmt ist.

Wählen wir eine Kreuzrissebene, so erhalten wir den für die Praxis ebenso wichtigen Satz:

(γ) Die Kreuzrissprojectionen der Original- und der Reliefpunkte entsprechen sich in der Centralprojection, welche durch O_k als Centrum und durch die Schnittlinien der Kreuzrissebene mit der Bildebene und den Gegenebenen als Anfangslinie und Gegenlinien bestimmt sind.

15. Diese Sätze lehren uns, wie wir das Relief aus dem Original durch orthogonales und centrales Projicieren in seinen Projectionen erhalten können. Zu diesem Behufe denken wir uns die Lage der Gegenstände, die abgebildet werden sollen, sowie das Relief selbst auf ein Coordinatensystem bezogen und zwar am besten auf das rechtwinklige, welches 1) von der Bildebene Y, 2) Haupthorizontalebene Z, die durch das Auge geht und 3) Hauptverticalebene X gebildet wird. Projicieren wir dann das Original orthogonal auf die horizontale und die Kreuzrissebene und bestimmen in denselben auf die oben angegebene Weise die Centralprojectionen dieser Projectionen, so erhalten wir die orthogonalen Projectionen des Reliefs auf die genannten Ebenen; die Orthogonalprojection des Reliefs auf die Bildebene dagegen, indem wir das Original aus dem Hauptgegenpunkte auf diese Ebene central projicieren.

In der Praxis müssen wir zwei Fälle unterscheiden, ob nämlich der Künstler aus dem Vollen (en plein) arbeitet, ob er also z. B. ein Relief aus Marmor verfertigt, und daher alles überflüssige Materia mit dem Meissel zu entfernen hat, oder aus dem Leeren (en creux) wenn er z. B. das Relief aus plastischem Thon verfertigt, welchen er entsprechend auf eine Grundfläche aufträgt*).

Im ersten Falle verfertigt er sich ein rechtwinkliges Parallelpiped aus dem betreffenden Materiale, auf dessen vordere Fläche die ebene Perspective der abzubildenden Gegenstände hergestellt wird und zwar für den aus der Tiefe des Reliefs und der Lage des Auges

---

*) Siehe Poudra, Traîté de Perspective-relief p. 70—80.

zuerst zu ermittelnden Hauptgegenpunkt als Centrum. Auf die Seitenflächen und ebenso auf die Grund- und Deckfläche werden die Centralprojectionen der orthogonalen Projectionen der Gegenstände in der bereits angegebenen Weise hergestellt; diese Constructionen können auch abgesondert zum blossen Abnehmen von Dimensionen ausgeführt werden. Wenn Alles so vorbereitet ist, bestimmt sich der Künstler die wichtigsten Punkte, also namentlich hervorragende Punkte architektonischer Formen etc. und entfernt mit dem Meissel das überflüssige Material; dann hat er immer mehr Punkte dieser Pläne, wie wir sie wohl bezeichnen dürfen, so dass endlich nur die Ausführung des Details übrig bleibt.

Arbeitet der Künstler aus dem Leeren, dann muss das erwähnte Parallelpiped ebenfalls hohl und so vorgerichtet sein, dass sich die vordere, obere und eine Seitenfläche entfernen lassen, damit von allen Seiten Zutritt ist; die Constructionen werden wie früher ausgeführt. Die Hauptpunkte kann man hier etwa mittels Fäden bestimmen, welche zwei identische Punkte der gegenüberliegenden Flächen verbinden; vor allem werden die Punkte grösster Tiefe bestimmt und der Raum hinter denselben mit Material ausgefüllt; dann werden nähere wichtige Punkte auf dieselbe Weise bestimmt und so fort, bis wiederum nur Details nach künstlerischem Geschmack auszuführen sind.

So hergestelltes Relief wäre aber von keiner langen Dauer; es dient nur zur Herstellung eines Gyps- oder Metallabgusses, was nach bekannten Methoden geschieht. Auch die Marmorreliefs werden gewöhnlich nach vorher verfertigten Thonreliefs gearbeitet.

Es ist klar, dass bei der Verfertigung eines Reliefs das Talent, klare Anschauung und Geschmack des Künstlers Hauptsache ist und bleibt, aber es wäre nicht gerechtfertigt, wenn sich derselbe aller Hilfsmittel, welche ihm die Reliefperspective bietet, entschlagen wollte, denn diese muss sich sicher mindestens so bewähren wie die ebene dem Maler; wir geben es zu, dass sich der Künstler selbst genügt, dass er sich nach keinen Winken der Wissenschaft umzusehen braucht, wenn er sich einen Stoff zum Vorwurfe genommen, der durch keine Kompliziertheit von Grössenverhältnissen hervorragt; es ist aber zweifellos, dass bei grösserer Tiefe des Reliefs, namentlich wenn geometriches und architektonisches Beiwerk abzubilden ist und Gegenstände von verschiedener Tiefe etc., auf diese Weise die Lage der wichtigsten Punkte ungleich correcter bestimmt wird als durch blossen Versuch. Die Durchführung der Details ist freilich immer die wesentliche Aufgabe des Künstlers.

16. Wenn jedoch ein Relief grössere Dimensionen haben soll z. B. die ganze Fläche des Giebels eines monumentalen Baues einzunehmen hat, dann empfiehlt es sich die Coordinaten der wichtigsten Punkte durch Rechnung zu bestimmen.

Seien xyz die Coordinaten des ursprünglichen Punktes a in Bezug auf das oben angeführte Coordinatensystem; $x'y'z'$ die Coordinaten seines Bildes a'; d die Hauptdistanz und e die Entfernung der Verschwindungsebene von der Bildebene, dann ist offenbar (Fig. 1.)

$$\frac{x}{x'} = \frac{z}{z'} = \frac{oa}{oa'}$$

ferner

$$\frac{x}{x'} = \frac{a_1 o_f}{a' o_f} = \frac{ao}{a'o} = \frac{ao_g}{a'_1 o_g} = \frac{aa'_1 + a'_1 o_g}{a'_1 o_g} = \frac{aa'_1}{a'_1 o_g} + 1$$

$$= \frac{aa_1}{o_g o_b} + 1 = \frac{y}{d} + 1 = \frac{y+d}{d};$$

daher

$$(1) \qquad \frac{x}{x} = \frac{y+d}{d}$$

Ferner ist:

$$\frac{y}{d} = \frac{a' a_f}{a' o_f} = \frac{y'}{e - y'},$$

woraus folgt:

$$(2) \qquad \frac{y}{y'} = \frac{d+y}{e}.$$

Es gelten also nachstehende Beziehungen:

$$(3) \qquad x' = \frac{d}{d+y} x, \quad y' = \frac{e}{d+y} y, \quad z' = \frac{d}{d+y} z,$$

aus welchen die Coordinaten des Bildes eines Punktes berechnet werden können, wenn die des Originals bekannt sind.

17. Wenn wir also die Aufgabe lösen sollen, aus den orthogonalen Projectionen des Originals die orthogonalen Projectionen des Reliefs zu finden, so kann dies entweder durch Construction oder durch Rechnung geschehen. Bei den Constructionen des Reliefs gegebener Gegenstände werden aber immer die bekannten elementaren Aufgaben über Punkt, Gerade und Ebene auftreten, welche hier auf folgende Arten gelöst werden können:

1. Wir lösen die Aufgabe mit Hilfe der orthogonalen Projectionen des Originals und übertragen die Resultate in Reliefperspective entweder durch Construction oder durch Rechnung.

2. Wir bestimmen die Reliefprojectionen der gegebenen Elemente und lösen die gegebene Aufgabe mit Hilfe der so gewonnenen Projectionen; dabei werden sich aber auf Grund der oben angeführten Sätze zahlreiche Vereinfachungen ergeben.

Da wir die Kenntnis des orthogonalen und centralen Projicierens voraussetzen, so haben wir die Zuversicht, dass die Skizzierung einiger Elementaraufgaben zum Verständnis aller Construction genügen wird.

18. Darstellung eines Punktes. Seien (Fig. 2) F, B, G; die Projectionen der Verschwindungsebene, Bildebene und Gegenebene auf die Grundebene, welche mit der Zeichenebene zusammenfällt $o_b\, o_f\, o_g\, o_h\, o_k$ die Projectionen des Auges auf die bezüglichen Ebenen, somit $o'_b\, o''_b = o'_f\, (o'_f)$ die Höhe des Auges über der Grundebene; H''_b, (H_f) die umgelegten Horizonte der Bild- und Verschwindungsebene, an welcher Bezeichnung in allen Figuren festgehalten wird. Seien fernen $a'\, a''\, a'''$ die orthogonalen Projectionen eines Punktes auf der Standebene, Bildebene und der Hauptverticalebene; dann sind, wie wol auf Grund obiger Sätze ohne jede Erklärung aus der Figur ersichtlich ist, $a_0'\, a_0''\, a_0'''$ die bezüglichen Projectionen des Reliefs a_0.

19. Darstellung einer Geraden. Seien (Fig. 3) $g'\, g''\, g'''$ die Orthogonalprojectionen einer Geraden g; dann ist der Durchschnittspunkt $(d_0'\, d_0'')$ derselben mit der Bildebene zugleich der Bilddurchstosspunkt des Bildes g_0. Ziehen wir durch o eine Parallele zu g $(o' f_0' \parallel g',\ o'' f_0'' \parallel g'')$; dann erhalten wir im Durchschnittspunkte $(f_0' f_0'')$ dieses Fluchtstrahles mit der Verschwindungsebene den gesuchten Fluchtpunkt f_0. Endlich ermitteln wir auf bekannte Weise die Kreuzrisstrasse der Geraden $d_0 f_0 = g_0$ nämlich $d_0''' f_0'''$.

Wir können aber auch so verfahren:

Sei φ der Durchschnittspunkt der gegebenen Geraden mit der Gegenebene, dann führen wir durch die Spur d_0 eine Parallele zur Geraden $o\varphi$, was in der Figur in Projectionen ausgeführt ist.

20. Darstellung einer Ebene. Seien (Fig. 4) E' und E'' die horizontale und verticale Trasse der gegebenen Ebene; dann ist auch $E'' = E_0''$ die Bildtrasse des Reliefs. Um die Fluchttrasse zu erhalten, ziehen wir durch o eine parallele Ebene $(o_h'\, \alpha' \parallel E',$ $o_b''\, \alpha'' \parallel B,\ \alpha''\, \beta'' \parallel E_0'')$, dann ist E_f'' die Projection der Fluchttrasse auf dle Bildebene. Die Fluchttrasse selbst, umgelegt um F, erhalten wir in E_f. Endlich ist $\beta'\, E_0 = E'_0$ die Horizontaltrasse des Reliefs,

so dass jetzt auch die Kreuzrisstrassen sowol des Originals als auch des Reliefs leicht bestimmt werden können.

Wir hätten auch so verfahren können:

Wir verbinden den Schnittpunkt γ' von E mit der Gegenebene und der Haupthorizontalebene mit o; dann ist $E_0' \parallel o_h' \gamma'$ und daraus ergibt sich dann leicht die Fluchttrasse oder vielmehr die Projection derselben auf die Bildebene.

Nachdem wir Punkte, Gerade und Ebenen darstellen können, denken wir uns die Aufgabe immer so weit zurückgeführt, dass wir nur mit Projectionen des Reliefs zu thun haben.

21. Schnitt zweier Ebenen. Seien (Fig. 5) $E_0' \, E_0'' \, E_0^f$ und ebenso $E_1' \, E_1'' \, E_1^f$ die Horizontal-, Vertical- und Fluchttrassen der Ebenen E_0 und E_1. Dann ist der Schnittpunkt der Horizontaltrassen der erste, der Verticaltrassen der zweite und der Fluchttrassen der dritte Punkt der Schnittlinie ($\Delta' \Delta''$).

22. Lot zu einer Ebene. Es seien (Fig. 6) $E' \, E'' \, E^f$ die Trassen einer Ebene; $a' \, a''$ die Projectionen eines Reliefpunktes, von welchem die Senkrechte zur Bildebene gefällt werden soll. Wir suchen zunächst den Fluchtpunkt derselben, indem wir von dem Centrum o zu der Ebene ein Perpendikel fällen und den Schnittpunkt φ desselben mit der Verschwindungsebene bestimmen. Verbinden wir diesen gemeinschaftlichen Fluchtpunkt aller Senkrechten zu der gegebenen Ebene mit a und bestimmen den Bilddurchstosspunkt d dieser Verbindungslinie, so haben wir die Aufgabe gelöst, was in der Figur in den Projectionen ausgeführt erscheint.

23. Theilen und Auftragen von Strecken. Sollen auf eine gegebene Strecke gegebene Längen aufgetragen werden, oder dieselbe getheilt werden, so geschieht dies perspectivisch, wie wir unter (9) auseinandergesetzt haben; jetzt haben wir dazu nur noch zu bemerken, dass man nicht im Raume, sondern nur in der Grundebene zu operieren hat, da die Verhältnisse von Längen durch orthogonales Projicieren nicht geändert werden.

Wir halten dafür, dass die bisherigen Winke jedem, der in der Lösung von Constructionsaufgaben in orthogonaler und centraler Projection geübt ist, vollständig genügen, um ohne erhebliche Schwierigkeiten irgend ein Problem reliefistisch zu lösen; vollständige Lösung zahlreicher Aufgaben findet man in dem bereits citierten Werke Staudigl's.

28.

Sur le faisceau de coniques du $2n^{\text{ième}}$ indice.

Par **J.-S. Vaněček.** Lu dans la séance du 25. juin 1886.

1. Dans la communication précédente nous avons traité le réseau de coniques du $2n^{\text{ième}}$ indice. Dans ce qui va suivre nous allons montrer la génération et les propriétés principales des figures réciproques, c'est-à-dire des faisceaux de coniques.

Soient donnés trois points fixes s, t, u; par l'un, s, de ces points passent deux droites S_1, S_2 qui restent fixes. Une droite arbitraire D rencontre S_1, S_2 respectivement en les points d_2, d_1.

La droite ud_1 ou D_1^u rencontre S_1 en le point $S_1 D_1^u$; et de même la droite ud_2 ou D_2^u coupe S_2 en $S_2 D_2^u$. Les points d_1, d_2, $S_1 D_1^u$, $S_2 D_2^u$ sont les sommets d'un quadrangle complet dont un point diagonal se trouve en U. La jonction V des deux autres points diagonaux est l'a x e d'homologie, u étant l e c e n t r e d'homologie. Nous disons que la droite $S_1 \cdot D_1^u\ S_2 \cdot D_2^u$ ou D^u correspond à la droite considéré D.

2. Les droites D^t, D^u se rencontrent en le point d qui est le pôle de la droite D par rapport à la conique (D) déterminée par les points s, t, u, d_1, d_2. Nous disons que la conique (D) correspond à la droite D.

Quand la droite D enveloppe une courbe σ de la $n^{\text{ième}}$ classe, la conique (D) forme un faisceau ayant trois points fondamentaux.

Il nous s'agit de déterminer le nombre de coniques (D) qui passent par un point arbitraire du plan. Pour cet effet nous allons construire le lieu des centres des coniques du dit faisceau.

3. Les points donnés s, t, u et un point arbitraire d_2 déterminent un faisceau de coniques dont les centres se trouvent sur une conique passant par les points milieux x, y, z des côtés st, su, tu du triangle stu. Nous obtenons de même une telle conique passant par les points x, y, z quand le quatrième point fondamental du faisceau se trouve en d_1. Les points d_2, d_1 parcourent respectivement les droites S_1, S_2 qui passent par s.

Les tangentes de la courbe σ qui est de la $n^{\text{ième}}$ classe engendrent deux séries des points sur les droites S_1, S_2, auxquelles correspondent deux faisceaux de coniques qui sont les lieux des centres des coniques (D) et passent par trois points fixes x, y, z.

Chaque telle conique des centres passe, comme on sait, par les points diagonaux du quadrangle complet $stud_2$. Quand le point d_2 parcourt la droite S_1, l'un de ces points a est fixe, parce qu'il est le point de rencontre des droites fixes tu, sd_2. Il s'ensuit que les coniques des centres forment un faisceau ayant quatre points fondamentaux. Le second faisceau possède en le point d'intersection des droites S_2, tu on b le quatrième point fondamental.

4. Nous allons maintenant déterminer l'ordre de la courbe (Σ) engendrée par ces deux faisceaux de coniques des centres.

Par un point arbitraire d_2 de la droite S_1 passent n tangentes à la courbe σ, qui rencontrent la droite S_2 en n points d_1, et réciproquement à un point d_1 de S_2 correspondent n points d_2 de S_1. De là suit que à une conique des centres d'un des faisceaux correspondent n coniques de l'autre faisceau.

On trouve aisément qu'il y a n coniques du faisceau (b) qui touchent une conique du faisceau (a) en chacun des points fondamentaux x, y, z; et inversement. Ces points sont, par conséquent, multiples d'ordre $2n$ sur la courbe cherchée (Σ); de plus, les points a, b sont multiples d'ordre n sur cette courbe.

Une conique arbitraire du faisceau (a) rencontre donc les n coniques correspondantes du faisceau (b) en $7n$ et puis en n points. Nous obtenons ainsi sur chaque conique d'un de ces faisceaux $8n$ points de la courbe (Σ) qui est par conséquent d'ordre $4n$.

Donc

Le lieu des centres des coniques (D) est une courbe du $4n^{\text{ième}}$ ordre, ayant trois points multiples d'ordre $2n$ et deux points multiples d'ordre n.

5. Ainsi préparés, nous pouvons déterminer le nombre de coniques (D), qui passent par un point arbitraire p du plan. Considérons ce point comme le quatrième point fondamental d'un faisceau de coniques qui passent par les points s, t, u. Le lieu des centres de ce faisceau est une conique qui passe par les points x, y, z et rencontre y la courbe (Σ). Nous obtenons ainsi $6n$ points d'intersection de ces deux courbes. Elles se rencontrent donc encore en $2n$ autres points qui sont les centres des coniques du faisceau, qui passent par le point p.

Il s'ensuit que

Le faisceau (D) de coniques est du $2n^{\text{ième}}$ indice.

6. Quand la courbe σ est de la première classe, c'est-à-dire un faisceau de droites passant par le point p, la courbe (Σ) est du quatrième ordre et le faisceau (D) est du deuxième indice.

Quand le point p vient d'être placé sur la droite S_1 (ou S_2), le faisceau du deuxième indice se décompose en deux faisceaux ordinaires du premier indice. L'un de ces faisceaux est donné par les points s, t, u, p et l'autre par s, t, u et par la tangente S_2 en s. La courbe des centres (Σ) se décompose dans ce cas en deux coniqueus, qui passent par les points x, y, z, dont l'une passe par le point a et l'autre par b, et de plus, cette dernière touche en s la droite qui est conjuguée harmonique de S_2 par rapport aux droites st, su.

7. Supposons que les droites S_1, S_2, tu sont les tangentes multiples de la courbe σ. Dans ce cas l'ordre de la courbe (Σ) s'abaisse ou, en d'autres termes, cette courbe se décompose ainsi que les autres courbes, savoir: le lieu des pôles des tangentes de la courbe σ et la courbe enveloppée des tangentes issues de ces pôles aux coniques (D) correspondantes.

Nous ne voulons pas discuter ces courbes, puisqu' elles sont les figures réciproques de celles qui font l'objet de la Note précédente.

8. Nous pouvons donc énoncer le théorème général:

Considérons les coniques ayant trois points fondamentaux s, t, u, dont les deux autres points déterminants se trouvent sur deux droites fixes S_1, S_2, passent par l'un des points fondamentaux, et puis sur une tangente D d'une courbe σ de la $n^{\text{ième}}$ classe; toutes ces coniques (D) forment un faisceau d'indice $2n$.

Le lieu des centres des coniques de ce faisceau est une courbe (Σ) d'ordre $4n$ ayant trois points multiples d'ordre $2n$ et deux points multiples d'ordre n.

Les pôles des tangentes D de la courbe σ par rapport à leurs coniques correspondantes (D) engendrent une courbe d'ordre $2n$ ayant trois points multiples d'ordre n, savoir: les points d'intersection des droites S_1, S_2 avec la jonction R des autres deux points fixes du faisceau et puis le point S_1S_2.

Les tangentes menées des pôles, dont nous avons parler tout à l'heure, aux coniques correspondantes (D) enveloppent deux courbes de la classe $2n$, dont une possède les droites S_1, R et l'autre les droites S_2, R comme les tangentes multiples d'ordre n.

29.

Krystallographische Bemerkungen zum Leucit, Staurolith, Phillipsit, Chalkanthit und Axinit.

Vorgetragen von Prof. Dr. J. Krejčí am 2. Juli 1886.

Mit 1 Tafel.

1. Bekanntlich erkannte vom Rath an vesuvischen Leucitkrystallen eine Zwillingsstreifung (siehe Zirkels Mineralogie 1885, Seite 607.) und fand bei seinen Messungen dieses Leucites, dass derselbe dem quadratischen Systeme angehöre, indem er an den Ikositetraëderflächen für die obere Polkante $A = 130^0\ 3'$, für die untere $A' = 131^0\ 24'$, und für die Seitenkante $0 = 133^0\ 58'$ nachwies, während am regulären Leucitoid $0 = A = A' = 131^0\ 49'$ ist.

Treptow fand an einem Leucitkrystall aus dem Albaner Gebirge eine rhombische Pyramide mit den Polkanten $130^0\ 43'$ und $132^0\ 33'$.

Wegen den optischen Eigenschaften wurde schon früher von Biot, Zirkel und mehreren a. eine Zusammensetzung der Leucitkrystalle aus doppeltbrechenden Lamellen constatirt, und der Leucit wurde demgemäss von Rath dem quadratischen, von Treptow dem rhombischen Systeme zugereiht. Schliesslich erkannte C. Klein auf experimentellem Wege, dass dünne über 265^0 erhitzte Lamellen des Leucites optisch isotropisch sind, dass sie aber beim Erkalten wieder die doppeltbrechenden Eigenschaften erhalten.

Daraus ergab sich der Schluss, dass der Leucit im heissen vulkanischen Magma, wo seine ursprüngliche Bildungsstätte ist, allerdings in regulären Gestalten sich ausbilden konnte, dass aber nach dem Erkalten und Erstarren der vulcanischen Matrix im Leucite nach drei auf einander senkrechten Richtungen eine verschiedene Contraction seiner Substanz statt fand, welche die Eigenschaft der Doppelbrechung zur Folge hatte.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, dass sowohl die von Rath'schen als die Treptow'schen Messungen auf reguläre Grunddimensionen sich zurückführen lassen, und dass also der Leucit trotz seiner quadratischen oder rhombischen Erscheinung doch als zum regulären Systeme gehörig betrachtet werden kann. —

Die Zwillingsstreifen am Leucit sind parallel zur längeren Diagonale der Deltoidflächen und müssten an der regulären Gestalt $2O2$ parallel zu einer Fläche $\infty O = 10\bar{1}$ sein. In Folge davon müssten die Deltoidflächen der beiden Zwillingsindividuen an dieser Zusammensetzungsfläche in einer Ebene liegen und es könnten hiemit keine Zwillingsstreifen entstehen. Die Zwillingsstreifen des Leucites deuten demnach darauf hin, dass dieses Mineral entweder einem anderen als dem regulären System angehört, oder dass die Zwillingsfläche eine andere Lage hat als ∞O.

Nimmt man nach den Messungen von Rath für die Leucitkrystalle das quadratische System an, so ist, wenn man die obere Deltoidfläche als $P = 111$ betrachtet, die darunter gelegene Fläche $= mPn = nm1$.

Die Axe z der Pyramide P ist $z = 0{\cdot}52631$.

Die Fläche $mPn = nm1$ bestimmt man aus den Kanten $\frac{1}{2}A'$, $\frac{1}{2}0$, wo $\frac{1}{2}A' = 65^\circ\, 42'$, $\frac{1}{2}0 = 66^\circ\, 59'$ ist, mittelst der Gleichung

$$\frac{\cos \frac{1}{2}A'}{\cos \frac{1}{2}0} = nz = 1{\cdot}0524.$$

Dividirt man diesen Werth durch z, so ist $\frac{nz}{z} = n = 2$.

Es ist weiter $yo = \frac{m}{n}$.

Im Triëder $\frac{1}{2}A'$, $\frac{1}{2}0$, Y, wo $Y = 90^\circ$, ist

$$\cos yo = \frac{\cos \frac{1}{2}A'}{\sin \frac{1}{2}0} = 0{\cdot}4472,\ yo = 63^\circ\, 26',$$

$$tang\ yo = 2,\ \text{mithin}\ \frac{m}{n} = 2,\ \text{und da}\ n = 2,\ \text{ist}\ m = 4;$$

demnach $mPn = 241 = 4P2$.

Von den anderen Flächen ist die eine abstumpfende Fläche $2P\infty$, die andere ∞P.

Für die Fläche $P = 111$ ist $mnr = 11\frac{1}{z}$ oder nach dem obigen

$$m : n : r = 1 : 1 : \frac{1}{0{\cdot}52631} = 1 : 1 : 1{\cdot}900.$$

Da 1·9 eine rationale Zahl ist, so folgt daraus, dass auch bei den von Rath angegebenen Kantenwinkeln des Leucites dieses Mineral doch als regulär angesehen werden kann, und zwar als die meroëdrische Entwicklung einer regulären Gestalt, deren Indices sich den zum regulären Leucitoide $2O2$ gehörigen Werthen nähern. In die Naumann'sche Bezeichnung umgesetzt ist nämlich

$$P = 111 = 1 . 1 . 1{\cdot}9 = \tfrac{19}{10}O\tfrac{19}{10} \text{ statt } 2O2,$$
$$2P\infty = 021 = 0 . 2 . 1{\cdot}9 = \infty O\tfrac{20}{19} \text{ statt } \infty O,$$
$$4P2 = 241 = 2 . 4 . 1{\cdot}9 = 2O\tfrac{40}{19} \text{ statt } 2O2,$$
$$\infty P = 110 = \infty O.$$

Die Zwillingsfläche, nach welcher sich die Streifung des Leucites richtet, ist also für die angegebenen Dimensionen keineswegs ∞O, sondern $\infty O\tfrac{20}{19}$, und es kann also der Leucit auch im regulären Systeme mit Zwillingsstreifung erscheinen.

Die optischen Eigenschaften, welche an gewissen Leuciten auf das rhombische System hindeuten, scheinen das Resultat der verschiedenen Contraction nach drei auf einander senkrechten Richtungen zu sein.

Nach den von Treptow angegebenen Dimensionen der stumpfen am oberen Pole der Leucitkrystalle auftretenden Pyramide $= mnr$ mit den Polkanten $E = 130^0\ 43'$, $A = 132^0\ 33'$, für die man als Seitenkante $0 = 70^0\ 49'$ findet, ist

$$\cos {}^1/_2E : \cos {}^1/_2A : \cos {}^1/_2 0 = m : n : r = 0{\cdot}4169 : 0{\cdot}4023 : 0{\cdot}8150$$

oder fast genau $= 1036 : 1000 : 2025$.

Auch diese Dimensionen lassen sich auf das reguläre System beziehen, und es scheint also, dass die von Klein experimentell nachgewiesene Veränderung von erhitzten Leucitlamellen, die in ihrem optischen Verhalten auf das reguläre System, nach dem Erkalten aber auf das rhombische System hindeuten, nach den drei auf einander senkrechten Dimensionen xyz zwar in verschiedenem Maasse statt findet, dass aber hiebei die Contractionscoëfficienten in Bezug auf die regulären Grunddimensionen rational sind.

Der Leucit kann also sowohl in seiner quadratischen als in seiner rhombischen Erscheinung als dem regulären Systeme angehörig betrachtet werden.

2. Der Staurolith kommt in rechtwinklig und schiefwinklig kreuzförmigen Zwillingen und auch in sternförmigen Drillingen des

rhombischen Systemes vor, und zwar mit den Flächen $\infty \check{P} \infty$, oP, ∞P, $\bar{P}\infty$. Hauy nimmt als Mittelwerth für $\infty P = 129^{0}\ 31'$, für $\bar{P}\infty \doteq 70^{0}\ 32'$ an.

Diese Werthe stimmen zwar mit neueren Messungen nicht überein, aber da aus denselben die ausgezeichnete Symmetrie der Staurolithzwillinge am leichtesten erklärt wird und die oben angegebenen Winkel nicht allzusehr von den neueren Messungen abweichen, so könnte man sie doch als die ursprünglichen Winkel betrachten, welche erst durch spätere Veränderung der Staurolithsubstanz eine Verzerrung erlitten.

Bei den rechtwinklig kreuzförmigen Zwillingen (siehe Zirkels Mineralogie 1885. Seite 564) stossen die Flächen $\infty \check{P} \infty$ unter 90^{0} zusammen und die Zwillingsfläche ist als $n\check{P}\infty = no\bar{1}$.

Aus den obigen Winkeln findet man $yo = {}^{1}/_{2} \,.\, 129^{0}\ 31'$, $ze = {}^{1}/_{2} \,.\, 70^{0}\ 32'$ und

$$x : y : z = tang\ yo : 1 : cot\ ze = 2{\cdot}1211 : 1 : 1{\cdot}4140$$

oder

$$x : y : z = 2{\cdot}1211 : 1 : \sqrt{2} = 3 : \sqrt{2} : 2.$$

Diese Dimensionen stimmen genau überein mit den Dimensionen einer meroëdrisch entwickelten regulären Combination von $3O3$, O, ∞O, und zwar entspricht die Lage der Flächen am Staurolith dieser Combination, wenn man dieselbe senkrecht auf eine Axe $r = \sqrt{2}$ aufstellt.

Der halbe Zwillingswinkel L ist für $n\check{P}\infty = 45^{0}$, mithin ist

$$tang\ 45^{0} = \frac{x}{n} : z = \frac{3}{n} : 2 = \frac{3}{2n}, \text{ oder da } tang\ 45^{0} = 1,$$

$$n = {}^{3}/_{2},\ 30\bar{2} = {}^{3}/_{2}\check{P}\infty.$$

Des Cloizeaux bestimmte an scharf ausgeprägten alpinischen Krystallen $\infty P = 129^{0} 26'$, $\bar{P}\infty = 69^{0}\ 32'$, also in Betreff des verticalen Prisma nahezu übereinstimmend mit der Hauy'schen Angabe, aber in Betreff des horizontalen Prisma $\bar{P}\infty$ um einen ganzen Grad abweichend.

Das Verhältniss der Hexaiddimensionen ist darnach

$$x : y : z = 2{\cdot}1171 : 1 : 1{\cdot}440$$

oder
$$x : y : z = 2{\cdot}994 : \sqrt{2} : 2{\cdot}036,$$

so dass nach der Hexaidkante x eine Contraction mittelst des Coëfficienten $1{\cdot}002 = \frac{501}{500}$ und nach der Axe z eine Ausdehnung mittelst des Coëfficienten $1{\cdot}018 = \frac{509}{500}$ sich ergiebt, indem $2{\cdot}994 \,.\, \frac{501}{500} = 3$ und $2 \cdot \frac{509}{500} = 2{\cdot}036$ ist.

Daraus findet man für $n = {}^3/_2$, $L = \frac{x}{nz}$, $L = 44^0\,30'$. Für $L = 45^0$ wäre aber $n = 1{\cdot}466 = \frac{44}{30}$ statt $n = \frac{45}{30} = 1{\cdot}5 = {}^3/_2$.

Bei den schiefwinklig kreuzförmigen Zwillingen (Zirkels Mineralogie. Seite 565. Fig. 6.) durchkreuzen sich die Individuen unter einem Winkel von 60° und zwar so, dass die Flächen $\infty\breve{P}\infty$ einen hohlen verticalen Winkel von 120° bilden, der von der Zwillingsfläche $s = mnr$ halbirt wird. Eine zweite Zwillingsfläche $s' = m'n'r'$ steht auf s senkrecht und bildet horizontale hohle Zwillingswinkel.

Die auf die Zwillingsfläche s gestellte Verticale f bildet mit den Kanten des Prisma ∞P den Winkel von 60°. Dieser Winkel entspricht der Combinationskante O einer oktaidischen Fläche auf der Endfläche oP. Die zweite Combinationskante A auf der Endfläche $\infty\breve{P}\infty$ ist gleich der halben verticalen Zwillingskante und ist gleichfalls $= 60^0$. Die dritte Combinationskante E der Zwillingsfläche mit dem Hexaide findet man nach der Gleichung

$$\cos 2O + \cos 2E + \cos 2A = -1$$

oder
$$\cos 120^0 + \cos 2E + \cos 120^0 = -1,$$

demnach
$$\cos 2E = 0,\; 2E = 90^0,\; E = 45^0.$$

Das Verhältniss der zu dieser oktaidischen Fläche $s = mnr$ gehörigen Axen findet man aus der Proportion

$$\cos A : \cos E : \cos O = \cos 60^0 : \cos 45^0 : \cos 60^0 = \frac{m}{x} : \frac{n}{y} : \frac{r}{z},$$

oder
$$\frac{m}{x} : \frac{n}{y} : \frac{r}{z} = \tfrac{1}{2} : \tfrac{1}{2}\sqrt{2} : \tfrac{1}{2},$$

und da
$$x : y : z = 3 : \sqrt{2} : 2,$$

ist
$$m : n : r = {}^3/_2 : 1 : 1,$$

demnach
$$s = mnr = {}^3/_2 11 = 322 = {}^3/_2\breve{P}{}^3/_2.$$

Die andere Zwillingsfläche s' steht senkrecht auf der Fläche $s = 322$ in der Lage $s = \bar{m}\,1\,\bar{1}$ und zwar in der Fläche $v_0 = \infty \bar{P} \infty$. Diese Fläche s' liegt also in der Zone $ss'v_0$, deren Gleichung ist:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ \bar{m} & 1 & \bar{1} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

woraus man $m = {}^3/_2$, mithin $s' = \bar{3}\,2\,\bar{2}$ findet.

Die sternförmigen Gestalten des Staurolithes sind nur eine drillingsartige Wiederholung der Zusammenwachsung nach den Flächen s und s'.

Diese vollkommene Symmetrie der Staurolithzwillinge entsteht aber nur unter der Voraussetzung der oben angegebenen Winkeldimensionen, die mit den Kantenwinkeln der meroëdrisch entwickelten regulären Combination von $3O3 \,.\, O \,.\, \infty O$ übereinstimmen.

Es ist nämlich die Prismenkante $\infty P = 129^0\ 31'$ gleich der Kante H eines Leucitoides $3O3$, und die Domenkante $\bar{P}\infty = 70^0\ 32'$ ist gleich der Combinationskante von zwei Oktaëderflächen $O = 111$ und $O' = \bar{1}\bar{1}1$.

Demgemäss kann man die Staurolithkrystalle als meroëdrische Entwicklungen regulärer Gestalten deuten mit den Flächen

$$\infty P = 3O3 = 311,\ \bar{P}\infty = O = 111,\ \infty \breve{P} \infty = \infty O = \bar{1}01$$
$$\text{und } oP = \infty O = 101.$$

Die Zwillingsfläche bei den rechtwinklig kreuzförmigen Gestalten ist dann die Fläche ${}^3/_2\breve{P}\infty = \infty O \infty$, und bei der schiefwinklig kreuzförmigen die Fläche ${}^3/_2\breve{P}{}^3/_2 = \infty O$.

Man kann analog wie bei dem Leucite annehmen, dass die supponirte Veränderung der ursprünglichen Dimensionen des Staurolithes im rationalen Verhältnisse erfolgte, und zwar in Bezug auf die Winkelangaben von Des Cloizeaux nach den Axen x, z mittelst der rationalen Coëfficienten $\frac{501}{500}$ und $\frac{509}{500}$.

3. Der Phillipsit war früher dem rhombischen Systeme zugereiht und wird nun aus optischen Gründen dem monoklinen Systeme zugewiesen. Er kömmt fast immer in Durchkreuzungszwillingen vor. Fig. 5. Dieselben haben die Gestalt von quadratischen Prismen mit einer vierflächigen in der Mitte schwach gebrochenen Pyramide. Eigentlich sind es aber Zwillinge mit den Flächen $\infty\bar{P}\infty\ (v_0)$,

$\infty \breve{P} \infty (l_0)$, $P(o_1)$, die sich gegenseitig durchdringen und in den Zwillingsflächen $v_1 = \bar{1}10$ (∞P) die sehr stumpfe Kante K bilden. Der einspringende Winkel $v_0\ l_0$ ist häufig ausgefüllt und der Krystall hat dann die einfache Form von Fig. 4.

Die eine Polkante des Oktaëders o_1 ist $A_1 = 120^{\circ}42'$; die Combinationskante von $v_0\ o_1$ ist $= 120^{\circ}\ 21'$; demnach ist für die andere Polkante E_1, der halbe Kantenwinkel $\frac{1}{2}E_1 = 180^{\circ} - 120^{\circ}21' = 59^{\circ}39'$, $E_1 = 119^{\circ}\ 18'$. Die dritte Oktaëderkante O_1 findet man aus der Gleichung

$$\cos A_1 + \cos E_1 + \cos O_1 = -1, \text{ nämlich } O_1 = 90^{\circ}.$$

Die Kante K findet man aus dem Triëder

$$^1/_2 A_1,\ ^1/_2 O_1,\ Y, \text{ wo } Y = 90^{\circ},$$

und erhält

$$\cos yo = \frac{\cos\ ^1/_2 A_1}{\sin\ ^1/_2 O_1} = 0{\cdot}69961,\ yo = 45^{\circ}36;$$

dann aus dem Triëder

$$^1/_2 K,\ ^1/_2 O_1,\ \text{K, wo } K = 90^{\circ},\ ^1/_2 O_1 = 45^{\circ},\ k'o + yo + 45^{\circ} = 180^{\circ},$$
$$k'o = 89^{\circ}\ 24',$$

und erhält

$$\cos k'o = \frac{\cos\ ^1/_2 K}{\sin\ ^1/_2 O_1},\ ^1/_2 K = 89^{\circ}\ 35',\ K = 179^{\circ}\ 10'.$$

Es kommen auch kreuzförmige Doppelzwillinge vor Fig. 6, deren Individuen je zu den Axen x und z parallel sind, ja auch dreifache Doppelzwillinge Fig. 7, die sich parallel zu den Axen xyz durchdringen. Die Zwillingsfläche dieser Gestalten ist o_1.

Sind die einspringenden Zwillingswinkel ausgefüllt, so haben die ersteren Krystalle die Gestalt der Combination einer quadratisch achtflächigen Pyramide mit einem quadratischen Pinakoid; die letzteren haben aber die Gestalt eines Granatoid-ähnlichen Achtundvierzigflächners mit sehr stumpfen auf die scheinbaren Granatoidflächen aufgesetzten Pyramiden. Fig. 8.

Deutet man diesen letzteren Zwillingscomplex als eine reguläre Gestalt und zwar als ein Adamantoid $= mn1$, so hat dasselbe die Kante

$$D = A_1 = 120^{\circ}42',\ O = K = 179^{\circ}\ 10',\ H = 179^{\circ}\ 58'.$$

Man findet nämlich aus dem Triëder $^1/_2 A_1$, $^1/_2 K$, X, wo $X = 45^0$,

$$cos\ xo = \frac{cos\ ^1/_2 A_1 \sqrt{2} + cos\ ^1/_2 K}{sin\ ^1/_2 K},\ xo = 45^0 1';$$

und aus dem Triëder

$$^1/_2 K,\ ^1/_2 H,\ O',\ \text{wo}\ O' = 90^0,\ o'o + 45^0 + 45^0\ 1' = 180^0,$$

$$oo' = 89^0 59',\ cos\ oo' = \frac{cos\ ^1/_2 H}{cos\ ^1/_2 O'},\ ^1/_2 H = 89^0 59',\ H = 179^0 58'.$$

Desgleichen findet man aus

$$tang\ ^1/_2 O\ .\ sin\ xo = m,\ m = 97{\cdot}26,$$

aus

$$tang\ xo = \frac{m}{n},\ n = 97{\cdot}20,$$

also

$$m : n : 1 = 9726 : 9720 : 100.$$

Würde man bei Belassung dieses Verhältnisses von $m : n$ diesem Zwillingscomplex ein Granatoid unterlegen, so dass die Kanten D mit den gleichnamigen Kanten des Granatoides coincidiren möchten und $n = m - 1$ wäre, so müsste das volle Verhältniss der Indices sein:

$$m : n : r = 9726 : 9720 : 6 = 1621 : 1620 : 1.$$

Man findet aus diesen Indices

$$O = 179^0\ 58',\ H = 179^0\ 59',\ D = 120^0\ 2'.$$

Die Kanten des Phillipsitoktaëders müssten aber dann die folgenden sein:

$$A_1 = 120^0\ 2',\ O_1 = 91^0\ 24',\ E_1 = 118^0\ 21'.$$

Man kann demnach die Phillipsitkrystalle auch auf eine reguläre Grundgestalt, nämlich auf das Hexaëder beziehen, indem die Flächen derselben auf den Hexaëderkanten rationale Abschnitte bilden.

Groth und Streng nahmen den Phillipsit aus optischen Gründen als monoklin an und geben seinen Krystallen eine solche Stellung, dass die Pyramidenfläche O_1 die Lage von verticalen Prismen-

flächen v_1 erhalten und die Fläche v_0 in die Lage h_0 gelangt und nur l_0 seine Lage behält.

Fig. 1. in Zirkels Miner. Seite 716 stellt einen scheinbar einfachen Krystall dar, der aber nach dieser Auffassung schon ein Durchkreuzungskrystall von zwei Individuen ist, während Fig. 2. einen Doppelzwilling darstellt. Nach dieser Aufstellung ist

$$v_1 v_1 = 120^0\, 42',\ h_0 v_1 = 180^0 - {}^1\!/_2\,.\,119^0\, 18' = 120^0\, 21',$$

und für den Neigungswinkel der Kante X des monoklinen Hexaides ist

$$\cos X = \frac{\cos h_0 v_1}{\sin {}^1\!/_2 v_1 v_1} = \frac{\cos 120^0\, 21'}{\sin 60^0\, 21'} = -\, 0{\cdot}5814,\ X = 125^0\, 33'.$$

Um nun die monoklin optischen Eigenschaften des Phillipsites mit seiner äusseren orthogonalen oder regulären Gestalt in Übereinstimmung zu bringen, muss man annehmen, dass die Phillipsitmolecule monoklin sind, wobei aber ihre Dimensionen zu den Kanten des regulären Hexaëders in einem rationalen Verhältnisse sich befinden.

Man kann nämlich aus der Fläche $o_1 = mO\frac{m}{n}$ (mit den für das Zwillings-Adamantoid angegebenen Dimensionen $= mn1$) und aus den zwei auf einander senkrechten Dodekaidflächen $\infty O = v_0$; $\infty O' = l_0$ ein monoklines Hexaid construiren, welches genau der Lage $v_1\, h_0\, l_0$ in der Fig. 1 entspricht.

Durch zwillingsartige Durchkreuzung nach der Fläche v_0 entsteht der einfache Zwilling mit monoklinem Charakter, Fig 2; dann weiter durch zwillingsartige Durchkreuzung dieser beiden Zwillinge ebenfalls nach v_0 der aus vier Individuen bestehende Doppelzwilling Fig. 3 mit orthotypem Charakter; durch weitere Durchkreuzung nach der Fläche v_1 entsteht ein doppelter quadratischer Doppelzwilling mit der stumpfen Kante K, der aus acht Individuen besteht, Fig. 4. 5; durch weitere Durchkreuzung von zwei solchen Zwillingscomplexen nach der Fläche o_1 entsteht ein vierfacher Doppelzwilling aus 16 Individuen ebenfalls mit quadratischem Charakter, Fig. 6; und endlich durch Vereinigung von drei der letztgenannten Zwillingscomplexe entsteht eine Zwillingsbildung aus 24 Individuen bestehend, Fig. 7, deren äussere Flächenlage dem regulären Adamantoid $mO\frac{m}{n}$ entspricht Fig. 8.

Es ergiebt sich hieraus, dass sich einerseits durch wiederholte Zwillingsbildung die Symmetrie der Zwillingscomplexe steigert, so dass man durch symmetrische Zusammensetzungen von klinogonalen

Hexaiden zu orthogonalen und regulären Gestalten gelangt; anderseits aber dass man durch meroëdrische Zerlegung von regulären oder orthogonalen Gestalten endlich klinogonale Hexaide erhält, welche allerdings auch die mit dem klinogonalen Systeme verbundenen Eigenschaften besitzen können.

Bei der Beurtheilung der eigentlichen Grundgestalt solcher polysynthetischen Zwillingscomplexe muss man sich an das krystallographische Grundgesetz der Rationalität halten. Ist nämlich das Grundhexaid von dem regulären Hexaider ableitbar, so gehört der Zwillingscomplex dem regulären Systeme an, mögen seine Kantenwinkel auf welche immer klinogonale Systeme hinweisen, und nur in dem Falle, als das Grundhexaid selbstständige, vom regulären Hexaëder rational nicht ableitbare Dimensionen besitzt, gehört es einem der anderen orthogonalen oder klinogonalen Systeme an.

Aus diesem Grunde können die Phillipsitkrystalle wegen ihren vom regulären Hexaëder rational ableitbaren Dimensionen als eine meroëdrische Ausbildung regulärer Flächencomplexe angesehen werden. Hiedurch erklären sich nicht blos die analogen Krystallformen des Harmotomes und Stilbites, welche Mineralien mit dem Phillipsit isomorph sind, sondern auch andere scheinbare optisch-krystallographische Abnormitäten, wie sie der Perowskit, Boracit, Analcim, Granat, Fluorit aufweisen, die trotz ihrer regulären Gestalt die Eigenschaft der doppelten Strahlenbrechung haben, indem diese und ähnliche Krystalle eigentlich Zwillingscomplexe von Krystallmoleculen sind, die in ihrer Grundform einem anderen, als dem regulären, allerdings aber vom regulären Hexaëder rational ableitbaren Hexaide angehören.

4. Nimmt man am Axinit die vorherrschenden Flächen (Siehe Zirkels Mineralogie 1855. Seite 599) ruP als Hexaidflächen an, so ist nach der Angabe von Des Cloizeaux, wenn $rP = X$, $ru = Y$, $uP = Z$ ist,

$$X = 134^0\,48',\ Y = 115^0\,30',\ Z = 135^0\,26'$$
$$\alpha = 128^0\,55',\ \beta = 81^0\,45',\ \gamma = 129^0\,42'.$$

Dieses Axinithexaid nähert sich in seinen Dimensionen einer meroëdrischen Combination des regulären Systemes mit den Flächen

$$P = \infty O \infty = 010,\ r = \infty O = 011,\ u = \infty O = 110,$$

indem bei dieser Combination

$$rP = uP = X = Z = 135^0,\ ru = Y = 120^0,\ \alpha = \gamma = 125^0\,16',$$
$$\beta = 90^0 \text{ ist.}$$

Durch eine verhältnissmässig nur geringe Abweichung der Hauptaxen des regulären Hexaëders von dem Winkel 90^0 erhält man, indem man $P = 010$, $r = 011$, $u = 101$ nimmt, für $x : y : z = 1 : 1 : 1$ ein triklines Hexaid mit den Kanten und Winkeln

$$X = 89^0\, 36', \ Y = 81^0\, 44^3/_4', \ Z = 90^0\, 52'$$
$$\alpha = 89^0\, 15', \ \beta = 81^0\, 45', \ \gamma = 90^0\, 54',$$

in welchem die Flächen ruP dieselben Winkel bilden wie am Axinithexaid.

Man könnte dieses dem Hexaëder ähnliche trikline Hexaid den Axinitkrystallen unterlegen, aber da hiebei keine besondere Eigenthümlichkeit des Axinites zum Vorschein kommt, so lohnt es nicht die Mühe, die Indices der Axinitkrystalle in Bezug auf dieses Hexaid umzurechnen.

Auch kann man das oben angenommene Axinithexaid, so wie ein jedes andere trikline Hexaid unmittelbar vom regulären Hexaëder ableiten und hiebei untersuchen, ob es von demselben mittelst rationaler Indices ableitbar ist.

Legt man nämlich in ein reguläres Hexaëder rechts eine verticale Dodekaidfläche $\infty On = n10$, so dass sie mit der vorderen Hexaëderfläche $\infty O\infty$ die Kante $Z = 135^0\, 26'$ bildet, und dann in die obere Hexaëderkante x eine Oktaidfläche $mOn = m'n'r'$, so dass sie mit der vorderen Hexaëderfläche $\infty O\infty$ die Kante $X = 134^0\, 48'$ einschliesst und hiebei diese Combinationskante mit Z unter dem Winkel $\beta = 81^0\, 45'$ zusammenstösst, so kann man aus diesen Winkeln die Fläche ∞On und mOn berechnen und man findet

$$\text{für } \infty On = n10, \ n = \tfrac{203}{300}, \text{ für } mOn = m'n'r,$$
$$m' : n' : r' = 1{\cdot}0102 : 7{\cdot}0610 : 6{\cdot}9898 \text{ oder annähernd}$$
$$100 : 698 : 692, \ mOn = \tfrac{698}{100} O \tfrac{698}{692},$$

also ein Adamantoid, welches sich dem Galenoid $7O = 771$ nähert.

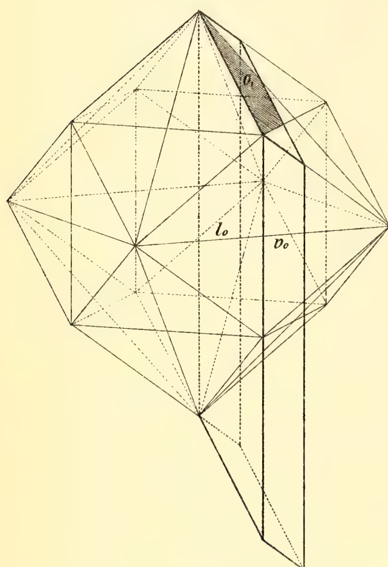
Diese Werthe sind zu den Hexaëderdimensionen rational, und demnach lässt sich auch für den Axinit eine regulär kubische Anordnung seiner Krystallmolecule annehmen.

Wäre $X = 135^0$, $\beta = 81^0\, 47'$, so würde man daraus in Bezug auf das reguläre Hexaëder für $m'n'r'$

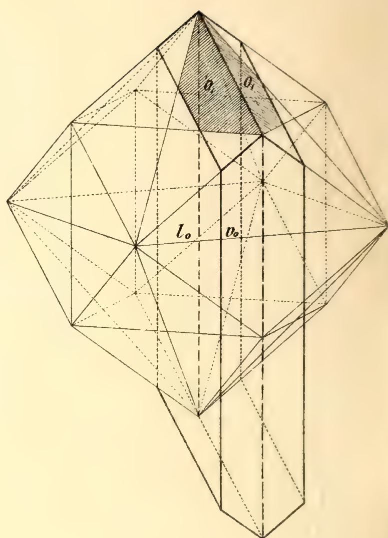
$$m' : n' : r' = 1{\cdot}00 : 7{\cdot}071 : 6{\cdot}9997 = 1 : \sqrt{50} : \sqrt{48{\cdot}99},$$

mithin einen irrationalen Werth finden, woraus man ersieht, dass bei solchen Ableitungen auch irrationale Werthe vorkommen können.

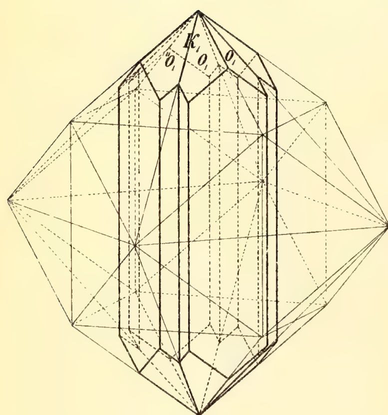
1



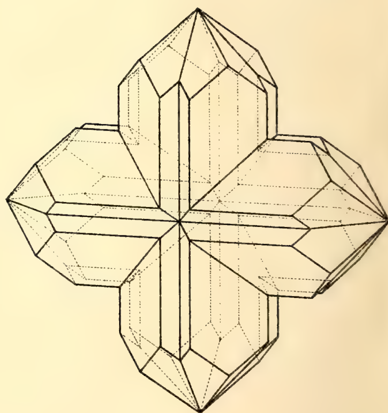
2



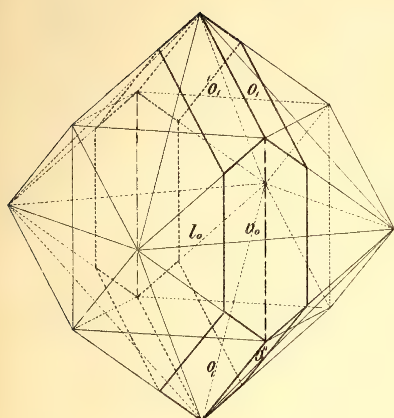
5.



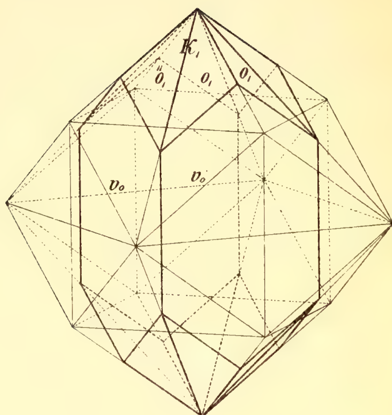
6.



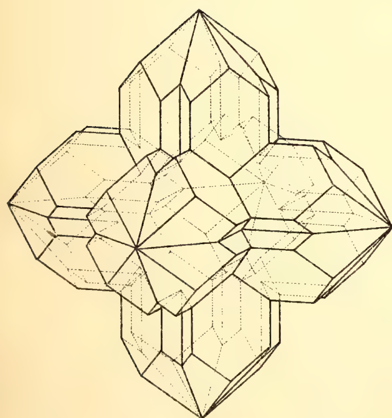
3.



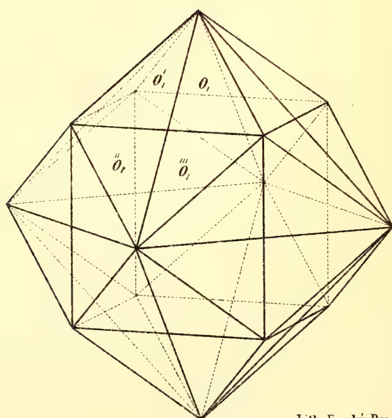
4.



7.



8.



Lith. Farský Prag

5. Nimmt man am Chalkanthit die vorherrschenden Flächen *PMT* (Siehe Zirkels Mineralogie 1885, Seite 495) als Hexaidflächen an, so hat diese hexaidische Grundgestalt die interessanten Dimensionen

$$X = 109^\circ 28', \; Y = 127^\circ 40', \; Z = 123^\circ 10',$$
$$\alpha = 90^\circ \quad , \; \beta = 122^\circ 51', \; \gamma = 117^\circ 21',$$

d. h. diese Grundgestalt ist in Bezug auf die Axen xyz diklin und die Kante X stimmt mit der Kante des regulären Oktaëders überein.

Betrachtet man dieses Hexaid als eine meroëdrische Combination von zwei Oktaëderflächen des regulären Systemes, so gehört die dritte Hexaidfläche einem Hexaëder- ähnlichen Adamantoide $mOn = m'n'r'$ an, welches die Oktaëderecken unter sehr stumpfen Winkeln achtflächig zuschneidet, indem man für die drei Kanten des Adamantoides O, H, D die Winkel $O = 173^\circ 58'$, $D = 175^\circ 14'$, $H = 91^\circ 54'$ findet.

Man berechnet aus diesen Kanten für $mOn = m'n'r'$

$$m' : n' : r' = 5210 : 53 : 25, \; mOn = \tfrac{5210}{25} O \tfrac{5210}{53}.$$

Wäre $X = 109^\circ 28'$, $Y = Z = 125^\circ 16'$, $\alpha = 90^\circ$, $\beta = \gamma = 120^\circ$, so möchte sich als Grundgestalt die Combination von vier Flächen O mit zwei Flächen $\infty O \infty$ ergeben.

Es lassen sich demnach aus Flächenelementen des regulären Systemes, und in analoger Weise auch aus Flächenelementen der anderen Systeme, trikline Hexaide construiren, so dass die aus ihnen abgeleiteten Gestalten dann eigentlich meroëdrische Flächenentwicklungen jener Systeme sind. Das Grundhexaid einer absolut triklinen Krystallform müsste solche Dimensionen haben, dass sie rational von keinem anderen als dem triklinen Systeme ableitbar sind.

Der Chalkanthit gehört also trotz seiner auffallend triklinischen Krystallform keineswegs dem absolut triklinen Systeme an, sondern er stellt eine triklin meroëdrische Entwicklung von regulären Flächenelementen dar.

Von einem allgemeinen Standpunkte ausgehend kann man überhaupt alle Krystallsysteme von einer kubisch angeordneten Gruppe von Molecularpunkten und also von einem regulären Hexaëder ableiten, indem jedweder vorkommende Längenwerth sich durch verticale oder diagonale Linien zwischen irgend welchen zwei Punkten des kubischen Molecularcomplexes darstellen lässt.

Hiedurch würden sich die Krystallgestalten der verschiedenen Systeme nur als specielle Ausbildungen, die einer und derselben An-

ordnung der Molecularpunkte, nämlich von dem regulär kubischen Hexaide ausgehen, darstellen lassen.

Man könnte sich diese Gestaltausbildung etwa so vorstellen, dass die ideellen Molecularpunkte, nach denen sich die Lage der Krystallmolecule richtet, nach drei auf einander senkrechten Richtungen in gleichen Distanzen angeordnet sind, wobei aber nicht alle jene ideellen Molecularpunkte von den eigentlichen Krystallmoleculen eingenommen werden, sondern dass nur bestimmte Punkte dieser kubischen Anordnung mit den Krystallmoleculen zusammenfallen, wobei die sich wiederholende Symmetrie nach einer, oder nach zwei oder nach drei Richtungen das Krystallsystem bestimmt.

Von diesem Standpunkte ausgehend, kann man für jeden Krystall aus dem regulär kubischen Hexaid eine seiner Flächenlänge entsprechende Grundgestalt ableiten und man kann hiebei das Gesetz der krystallographischen Rationalität im allgemeinen so auffassen, dass die Anordnung aller Krystallflächen überhaupt von der kubischen Anordnung der Molecularpunkte abhängig ist.

In diesem Sinne würden sich die krystallisirten Substanzen von den amorphen wesentlich nur durch die kubische Anordnung der Molecule unterscheiden, indem die amorphen aus einer regellosen Anhäufung von materiellen Punkten bestehen.

30.

Ueber schieferige Einlagen in den Kalken der Barrande'schen Etage Gg1.

Vorgetragen von **Friedrich Katzer** am 2. Juli 1886.

In den Kalksteinen der Barrande'schen Etage *Gg1* finden sich häufig schwache, gewöhnlich nur einige Centimeter mächtige, thonige Schichten eingelagert vor, die entweder allmälig aus den Kalken sich entwickeln, oder auch — und dies am häufigsten — von unveränderten Kalkschichten im Hangenden und Liegenden scharf begrenzt werden. Auch in den dunklen Kalken der Etagen *Ee1* und *Ff1* kommen derartige Einlagen vor und sind durch die spiegelartigen Gleitflächen, welche sie zu begrenzen pflegen, oft auffallend. Auch die schwarzen schieferigen Einlagen in den Kalken *Gg1* bilden Gleitflächen, welche jedoch den knolligen Charakter der Schichten dieser

Etage beibehalten und dadurch ein von den analogen Gebilden der Etage *Ff1* vollkommen verschiedenes Aussehen erlangen.

Man könnte meinen, dass diese Schiefer-Einlagen, eben weil sie Gleitflächen bilden, aus ursprünglich kalkigen Schichten entstanden sein könnten, und zwar durch physikalische Einwirkungen, welche eine Abnahme des Kohlensäuregehaltes und in Folge dessen eine relative Zunahme des Gehaltes an thonigen und amorphen Substanzen erzielten. — Auch ist die Ansicht ausgesprochen worden, dass diese Schiefer-Einlagen nichts anderes sein möchten, als vorzeitig zum Absatz gelangte Tentaculitenschiefer der Etage *Gg2*.

Um über die Entstehungsweise, sowie alle Eigenschaften dieser schieferigen Einlagen Aufschluss zu erlangen, unterzog ich dieselben, sowie die darüber und darunter anliegenden Kalksteine einer genaueren Untersuchung in physikalischer, chemischer und mikroskopischer Hinsicht und stelle nun in dieser kurzen Mittheilung die erlangten Ergebnisse einander gegenüber. Ferner verglich ich die schwarzen schieferigen Einlagen der Etage *Gg1* in Betreff ihres mikroskopischen Habitus mit den Tentaculitenschiefern der Etage *Gg2*. Aus beiden Vergleichungen zog ich dann meine Schlüsse.

Die Lagerungsverhältnisse und das Aussehen dieser schwarzen schieferigen Schichten, die sich in der nächsten Umgebung von Prag an vielen Stellen, besonders gut ausgebildet und zugänglich im Steinbruche unterhalb der Anhöhe Dívčí Hrady (Mägdeburg) bei Kuchelbad (in der Richtung gegen Sliwenetz), bei Bráník und in der weiteren Ausdehnung der Etage auch sonst überall vorfinden, sind an allen mir bekannten Fundorten nahezu identisch, so dass ich mich bei Beschreibung derselben auf eine Lokalität beschränken kann. Doch dürften die gemachten Schlüsse mit geringen Variationen allgemeine Geltung haben. — Das Material nun, welches ich zur Untersuchung wählte, stammt aus dem Steinbruch unterhalb der Mägdeburg.

1. Die dortigen deutlich geschichteten K a l k s t e i n e der Barrande'schen Etage *Gg1* sind von grauer Farbe, dicht, hie und da von Spalten und Rissen, welche mit neugebildetem krystallinischem Kalkspath ausgefüllt erscheinen, durchzogen.

Der Strich ist lichtgrau bis weiss.

Die Dichte, bestimmt mittelst Piknometer bei 17° C als Mittel von drei Bestimmungen beträgt 2·62.

Die Härte beträgt etwa 3, der Bruch ist muschelig und scharf. An den Bruchflächen erscheinen die ebenen Spaltflächen der in die

Grundmasse eingestreuten mikroskopischen Calcitkrystalle als glänzende Pünktchen, welche Kalksteinen überhaupt das charakteristische schimmernde Gepräge verleihen. Spaltbarkeit weder parallel zur Schichtenfläche noch in sonst welcher Lage erkennbar.

Die diesen Kalken eingelagerten schieferigen Schichten sind schwarz, an den Schichtenflächen spiegelig gepresst, zum Theil erdig oder faserig, sonst ziemlich homogen.

Der Strich ist russig schwarz.

Die Dichte, bestimmt wie bei den Kalken, beträgt 2·51.

Die Härte liegt zwischen 2 und 3, und ist an den Gleitflächen bedeutender als in der Masse selbst. Der Bruch ist uneben, erdig, die Spaltbarkeit parallel zu den Schichtenflächen ziemlich vollkommen, besonders wenn Gleitflächen die Einlagen durchziehen. Im Ganzen schmiegen sich diese Schichten genau an die darunter und darüber aufliegenden Kalke an, so dass alle Unebenheiten der knolligen Schichtenflächen der Kalke auch in den schieferigen Einlagen sich wiederholen.

2. Was die chemischen Eigenschaften beider Sedimente anbelangt, so wurden dieselben in der Weise bestimmt, dass die beiden Proben vorerst bei 120° C bis zu konstantem Gewicht getrocknet und dann erst der Analyse unterworfen wurden.

Es ergab die Analyse der Kalksteine folgendes Resultat:

CO_2	38·69%
CaO	47·34 „
Unlöslicher Rückstand	10·15 „

Ausserdem wurde im löslichen Theile konstatiert: MgO, Al_2O_3, Fe_2O_3, MnO und Alkalien, jedoch nicht quantitativ bestimmt.

Wie hieraus ersichtlich, sind diese Kalksteine verhältnismässig rein, da in den Schichtenzügen *Gg1* manche Kalkstein-Sorten auch 30% unlöslicher Beimengungen und darüber enthalten. Allerdings kann die gegebene Analyse nicht beanspruchen, als eine, die chemische Zusammensetzung des ganzen Schichtencomplexes unterhalb der Mägdeburg ausdrückende, betrachtet zu werden. Wohl aber hat sie hier den Werth, dass sie zur Beurtheilung der Thatsache, inwieweit die chemische Constitution der dicht unter dem analysierten Kalke anliegenden Schieferschicht von jener des Kalksteines abweicht, besser sich eignet, als eine aus möglichst grossem Schichtenumfang abgeleitete Bauschanalyse.

Was nun die Zusammensetzung der eingelagerten schwarzen

Schieferschichten betrifft, so enthielt die zur Analyse genommene Durchschnittsprobe:

CO_2	8·29%
CaO	9·93 „
Unlöslicher Rückstand	77·58 „

Im löslichen Theile wurde die Anwesenheit von Alkalien, MgO, Al_2O_3, Fe_2O_3 und MnO konstatiert, ihr Mengenverhältnis jedoch nicht bestimmt. Da nun der unlösliche Rückstand grösstentheils aus thonerdehaltigen Silikaten besteht, sind diese schwarzen Einlagen als kalkhaltige Thonschiefer zu bezeichnen.

3. Endlich was die mikroskopische Beschaffenheit beider in so engem Verbande stehenden Sedimente anbelangt, so gehen sie in dieser Hinsicht sehr weit auseinander.

Die Kalksteine sind ebenso wie viele andere derselben Etage und übrigens so ziemlich alle (nicht metamorphisierten) unseres Ober-Silur und Devon ein Gemenge von kalkigen Organismenresten und anorganischen Substanzen. Die mikroskopischen Organismenreste stammen hauptsächlich von niederen Thiergattungen und Mollusken her und sind, obwohl unsere Kalke zu den ältesten gehören, so dass eine Deformirung der Fossilien oder eine Umänderung der organischen Kalksubstanz wohl zu erwarten wäre, auffallender Weise meistentheils gut erhalten. In dem fabelhaften Reichthum des grössten Theiles der Silur- und Devonschichten Böhmens an mikroskopischen Organismen eröffnet sich dem Beschauer eine höchstes Interesse erregende Welt von Lebewesen, die manchen Aufschluss über die Genesis der Gesteine verspricht. Es gereicht mir deshalb zu besonderem Vergnügen hier bemerken zu können, dass ich mich mit petrographischen und mikropalaeontologischen Studien dieser Schichten beschäftige und interessante, vielleicht auch beachtenswerthe Ergebnisse derselben in Aussicht zu stellen vermag.

Die Kalke aus dem Liegenden und Hangenden der schwarzen Schieferschichten von Mägdeburg sind in mikroskopischer Hinsicht wie den äusseren Merkmalen nach ganz übereinstimmend, so dass ich mich auf die gemeinschaftliche Beschreibung beschränken kann. Sie enthalten in körniger, kalkiger, Thonerde- und Limonithaltiger Grundmasse Trümmer von kalkigen, zum geringsten Theile auch kieseligen Skelettheilchen von Mollusken, Korallen, Bryozoen, Spongien und Radiolarien, welche das Ganze als ein Gemisch von organischen Ueberresten mit mineralischem Material erscheinen lassen, wie wir

solches nur in den jüngeren und jüngsten Formationen zu finden gewöhnt sind. Es ist dies ein schlagender Beweis dafür, dass diese Devonkalke trotz ihres geologischen Alters weder einer Umkrystallisirung, noch bis in das innerste Gefüge eingreifenden Wirkungen ausgesetzt waren.

Beim Anschleifen treten auf den glatten Flächen einzelne nicht bestimmt begrenzte Partien durch ihre dunklere braune Färbung hervor. Unter dem Mikroskop findet man, dass diese Stellen reichlicher Thonerde und amorphe mineralische Substanzen enthalten als die lichten, grauen Partien, welch ihrerseits einen grösseren Gehalt an Krystallkörnern von Calcit und Mikropetrefakten aufweisen können. Wie aus der chemischen Analyse ersichtlich, nehmen die in schwachen Säuren unlöslichen Rückstände etwa ein Zehntel der ganzen Masse ein. Das Uebrige sind leicht lösliche kohlensaure Verbindungen Da nun die unlöslichen Bestandtheile beinahe gänzlich nur als erdige Grundmasse auftreten, welcher Calcitkörner blos in sehr untergeordneter Menge beigemengt sind, so ist leicht ersichtlich, dass der ganze Kalkgehalt dieser Gesteine beinahe nur in kalkigen Organismenresten besteht.

Wir verdanken also unsere mächtigen silurischen und devonischen Kalke, welche für Mittelböhmen einen unermesslichen Schatz vorstellen, hauptsächlich mikroskopischen Lebewesen, welche hier vor undenklichen Zeiten in den Wässern tiefer Meere hausten.

Ganz verschieden von den Kalken ist der mikroskopische Habitus der in dieselben eingelagerten schwarzen Schieferschichten. In erdiger, von einzelnen, zum Theil mit krystallinischem Kalkspath ausgefüllten, Rissen durchzogener, brauner bis schwarzer Grundmasse liegen hie und da Anhäufungen von Kalkkörnern eingebettet, die nur selten durch zellenartige Struktur auf organischen Ursprung hinweisen. Dagegen kann man manchmal auf nicht scharf umgrenzten Körnern die charakteristische polysynthetische Zwillingsstreifung des Calcits beobachten. Durchscheinende Dünnschliffe sind übrigens wegen der erdigen Grundmasse schwer herzustellen.

Herr J. Klvaňa, welcher wie ich glaube den schieferigen Einlagen in den Kalken der Etage *Gg1* zuerst einige Beachtung widmete, vertritt in einer Mittheilung an die k. k. geol. Reichs-Anstalt (Verhandl., 1883, Nro. 3) entschieden und ohne Ausnahmen zu machen die Ansicht, dass „die Tentaculitenschichten der Etage *Gg2* nichts Anderes seien, als eine mächtigere Ablagerung der schieferigen Zwi-

schenschichten in *Gg1*" (l. c. pag. 42), von welchen bemerkt wird, dass selbe „oftmals in den unteren Schichten der Etage auftreten und im mikroskopischen Habitus mit den Tentaculitenschiefern übereinstimmen" (l. c. pag. 41). Diese Angabe ist nicht ganz richtig.

Es ist wohl wahr, dass die schwarzen schieferigen Zwischenlagen in den u n t e r e n, den Kalken *Ff2* zunächst aufliegenden Schichten vorkommen, jedoch n i c h t h ä u f i g e r als in den höher hinauf den Tentaculitenschiefern näheren Schichten; und wäre übrigens, selbst wenn sie in den unteren Schichten wirklich zahlreicher auftreten möchten, daraus gewiss keine Andeutung einer Zusammengehörigkeit mit den Schiefern der Etage *Gg2* abzuleiten.

Die schieferigen Einlagen in den Kalken *Gg1* — wenigstens die, welche ich meine — sind aber auch thatsächlich von den Tentaculitenschiefern ganz verschieden. Diese sind nämlich in typischer Ausbildung ein verhärterter Pteropodenschlamm, in dem organische Reste h ä u f i g enthalten sind, während die Schiefer aus der Etage *Gg1* kaum eine Spur davon aufweisen. Gemeinschaftlich beiden Sedimenten ist blos die erdige, manchmal limonitfarbige Grundmasse, welche allerdings in beiden den sehr überwiegenden Bestandtheil ausmacht. Doch ist ein Dünnschliff der schwarzen Einlagen in *Gg1* von einem Dünnschliff der Tentaculitenschiefer auf den ersten Blick so leicht zu unterscheiden, dass es mir überhaupt nicht zulässig erscheint von einer Uebereinstimmung beider — besonders solange von eingelagerten Schiefern in den u n t e r e n Schichten die Rede ist — zu sprechen. Wirkliche Uebereinstimmung mit den Tentaculitenschiefern tritt erst beim allmäligen Uebergang der Kalke *Gg1* in die Schiefer ein, wobei jedoch gleich das typische Aussehen der Schiefer hervortritt, so dass man hier schon von Tentaculitenschiefern, nicht aber schlechtweg von schieferigen Einlagen in den Kalken *Gg1* sprechen müsste.

Wenn man nun die hauptsächlichsten Ergebnisse der im Vorstehenden kurz mitgetheilten physikalischen, chemischen und mikroskopischen Untersuchung der thonigen Schieferschichten und der sie einschliessenden Kalke einander gegenüber hält, so kann meiner Ansicht nach — da beide Schichten, die Schiefer und Kalke, unter einander vollkommen, und die schwarzen Schiefereinlagen in ihrer mikroskopischen Beschaffenheit auch von den Tentaculitenschiefern *Gg2* verschieden sind — kaum ein Zweifel darüber bestehen bleiben, dass sich die schieferigen Schichten in *Gg1* weder durch Druck aus

ursprünglichen Kalkschichten entwickelt haben können, noch auch dass sie unmittelbare Vorgänger und Anzeiger später zu erfolgender Niederschläge des Pteropodenschlammes der Schichten *Gg2* waren; sondern dass sie als erdige Schichten während Unterbrechungen des fortdauernden Absatzes des kalkigen Materiales der Etage *Gg1* direkt zum Niederschlag gelangten.

Mir will scheinen, dass die Schiefereinlagen gewissermassen Absätze in der Bildung der Kalke kennzeichnen, nämlich Absätze, die durch massenhafteres Zuströmen und Niederschlag jener thonigen Substanzen verursacht wurden, welche ja sonst auch in mehr oder minder grosser Menge in allen Kalken der Etage *Gg1* enthalten sind und deren ausgezeichnete Verwendbarkeit zur Bereitung von hydraulischem Kalk bedingen.

Wodurch dieses den fortdauernden Absatz von Kalkschlamm unterbrechende Anhäufen thoniger Substanzen im devonischen Meere verursacht worden sein mag, lässt sich an den angeführten Vorkommnissen der schieferigen Einlagen nicht mit erwünschter Sicherheit feststellen. Vielleicht ist für die Genesis derselben von Bedeutung, dass in diesen Schiefern erst neulich Algenabdrücke gefunden wurden (wahrscheinlich Chondrites), welche Herr Prof. O. Feistmantel näher zu bestimmen und zu beschreiben sich vorbehält. Im Ganzen erscheinen die schwarzen Schiefereinlagen nur als beschränkte lokale Bildungen, die jedoch den Schichtencomplex *Gg1* in allen Höhen von der untersten Grenze bis zur oberen zu durchsetzen scheinen, so dass das Gesetz ihrer Ausbildung nicht so leicht zu bestimmen ist. Doch werde ich der Sache meine Aufmerksamkeit auch fernerhin zuwenden und die aus möglichst zahlreichen Beobachtungen der Lagerungs- und Verbreitungsverhältnisse günstigenfalls abzuleitenden Resultate an diesem Orte veröffentlichen.

31.

Přehled sladkovodních hub Europských.[1])

Přednášel prof. **Fr. Vejdovský**, dne 2. července 1886.

Čilé účastenství, jakému se těšila fauna sladkovodních hub v Europě během posledního pětiletí, velmi vydatně přispělo k poznání

---

[1]) Anglický překlad hlavní části této práce vyjde současně v *Pottsově* monografii hub severoamerických.

forem řečené, dříve tak macešsky zanedbávané skupiny zvířecí. Pracemi *Cartera*,[1]) *W. Dybowského*,[2]) *Retzera*,[3]) *Wierzejského*,[4]) *Petra*,[5]) jakož i skromnými příspěvky,[6]) jimiž pisatel těchto řádků ku poznání sladkovodních hub českých dosavadní vědomosti rozšířiti se snažil, vylíčena fauna Spongillidů aspoň východní a střední Europy poněkud dokonaleji a počet druhů čilým zkoumáním rozmnožen téměř dvojnásobně, od dob, co *Lieberkühn* vytknul specifické znaky forem, jež r. 1856 pozoroval. Že výše řečení auktorové u vymezení druhů se liší, snadno lze vysvětliti z velké proměnlivosti nejen zevních vlastností, nýbrž i jemných částí skeletových u hub sladkovodních, jako jsou jehlice křemité a amfidisky. I zdá se mi býti záhodným, veškeré dosud získané vymoženosti o povaze druhové hub sladkovodních v jeden celek snésti a pokud možno, různosti mezi jednotlivými údaji osvětliti a na pravou míru uvésti.

---

[1]) *H. J. Carter*, History and classific. of the known Species of Spongilla. Ann. Mag. nat. hist. Ser. V. Vol. 7. 1881. pag. 77—101 Pl. V. VI.
Dále: Spermatozoa, Polygonal cell-structure etc. — Ibidem 1882.
Dále: The Branched and Unbranched Forms of the Freshwater Sponges considered generally. — Ibidem 1884.
Dále: Remarks on Freshwater Sponges. — Ibidem 1884. pag. 99.
Dále: On a Variety of the Freshwater Sponge Meyenia fluviatilis. — Ibidem 1885.

[2]) *W. Dybowski*, Studien über die Süsswasserschwämme des russ. Reiches. — Mém. Acad. St. Petersbourg. Tome XXX. Nro. 10. 1882.
Dále: Замѣтка о бадягахъ южной Россіи. Харьковъ. 1884.
Dále: Дополнительныя свѣдѣнія къ познанію прѣсноводной губки Dosilia Stepanovii. Харьковъ 1884.
Dále: Monographie d. Spongilla Sibirica. — Dorpat, Naturforscher-Gesellschaft 1884.
Dále: Mittheilung über die aus dem Fluss Niemen stammende Trochospongilla erinaceus. — Ibidem 1885.

[3]) *W. Retzer*: Die deutschen Süsswasserschwämme. Inaugural-Dissertation. Tübingen 1883.

[4]) *G. Wierzejski:* O rozwoju pąkow (gemmulae) gąbek słodkowodnych, europejskich, tudzież o gat. Spongilla fragilis. Krakow 1884.
Dále: O gąbkach słodkowodnych galicyjskich. Krakow 1885.

[5]) *F. Petr*: Spongilla fragilis v Čechách. Zprávy o zasedání král. spol. nauk v Praze. 1885.
Dále: Dodatky ku fauně českých hub sladkovodních. — Ibidem 1886.

[6]) *F. Vejdovský*: Die Süsswasserschwämme Böhmens. Prag 1883.
Dále: Příspěvky ku poznání hub sladkovodních. Zasedací zprávy král. spol. nauk. 1884. — Ann. Mag. nat. hist. 1884.
Dále: Bemerkungen über einige Süsswasserschwämme. — Ibidem 1885. Ann. mag. nat. hist. 1885.

Známo, že *Carter* ze všech téměř dílů světa srovnávaje houby sladkovodní, dle tvarů jich amfidisků rozdělil je na více rodů, hlavně Spongilla, Meyenia, Tubella, Parmula, kteréž v době nejnovější[1]) učinil representanty zvláštních skupin, Spongillina, Meyenina, Tubellina, Parmulina, jež dohromady tvoří čeleď Potamospongida a tudíž snad jako podčeledi vykládati se mohou.

Dybowski r. 1882. z Europy východní popsal druhy dvou rodů, Spongilla a Meyenia (Ephydatia), a brzy na to zvláštní houbu, již ztotožňuje s *Grayovým* rodem Dosilia (Stepanowii) a kteráž odpovídá asi americkému rodu Carterius, jak později vytknnto *F. Petrem*, jenž tutéž formu i v Čechách objevil.

Zcela jinou cestu k rozpoznávání forem hub volil *Retzer*, jenž současně se mnou pracoval o formě hub středoeuropských. Kdežto jsem vyložil veškeré druhy tehdy pozorované, za zástupce jednoho rodu, — Spongilla — a druhy k němu náležející na zvláštní podrody: Euspongilla, Ephydatia a Trochospongilla rozdělil, uznává taktéž *Retzer* jediný rod Spongilla, k němuž jen 2 druhy: Spongilla lacustris a Sp. fluviatilis náležejí. Avšak každý z těchto druhů obsahuje více variet, totiž

1. **Spongilla lacustris** rozděluje se na *a)* Var. Sp. lacustris ramosa (Sp. lacustris Linné) s diagnosou: „Gemmulaenadeln nur auf den Gemmulae".

b) Var. Sp. lacustris Lieberkühnii: „Gemmulaenadeln auf den Gemmulae und im Gewebe."

c) Spong. lacustris contecta: „Skeletnadeln fehlen, Gemmulaenadeln auf den Gemmulae und im Gewebe."

d) Spong. lacustris Rhenana: „Gemmulaenadeln glatt."

2. **Spongilla fluviatilis** s amfidisky:

a) „Scheiben glatt": 1. Var. Sp. fluv. erinaceus: „Scheiben der Amphidisken glatt, Nadeln höckerig."

b) „Scheiben gezackt." 2. Sp. fluv. Meyenii: „Skeletnadeln glatt."

c) Spong. fluv. Mülleri: „Skeletnadeln meist höckerig."

K tomu přidává *Retzer* ještě domněnku, že snad jím stanovenou formu „Sp. mirabilis" za třetí druh lze považovati.

Wierzejski, líče faunu hub haličských, připojuje se k mému rozdělení a rozeznává **řád** Potamospongia, Gray s čeledí Spongillidae a rodem Spongilla, kamž náleží 1. Subgenus: Euspon-

[1]) Descriptions of Sponges from the Neighbourhood of Port Phillip Heads, South Australia, continued. — Ann. Mag. nat. Hist. Jan. 1886. p. 49.

gilla Vejd. s jediným druhem Euspongilla lacustris Vejd., neboť forma, kterou jsem dříve jako zvláštní druh „Eusp. Jordanensis“ označil, souhlasí s „Eusp. lacustris“. Taktéž sem slučuje formy *Nollovou:* Sp. Lieberkühnii a Sp. Rhenana Retzer.

2. Subgenus Spongilla aut. s druhem Spongilla fragilis Leidy, kterou před tím *Dybowski* jako Sp. sibirica, a *Wierzejski* jako Sp. Lordii označil, kdežto jsem po příkladě *Carterově* současně tuto formu se Sp. fragilis ztotožnil, jakož i osvědčivší se domněnku vyslovil, že *Retzerova* Sp. contecta představuje druh *Leidy*-ho.

3. Subgenus Ephydatia Lam. s druhem Ephydatia fluviatilis Vejd.

4. Subgenus Meyenia Carter s druhem Meyenia Mülleri, Wierz, počítaje sem veškeré variety tohoto druhu, jež jsem stanovil, a z nichž jednu, „Ephydatia amphizona,“ na druh jsem povýšil. Taktéž *Retzerova* Spongilla mirabilis sem náleží, jakž jsem dříve se domníval.

5. Subgenus Trochospongilla Vejd. s druhem T. erinaceus Vejd.

V Čechách zatím pokračoval *F. Petr* zdatně u výzkumu fauny hub sladkovodních i děkujeme jemu za objev především 2 zajímavých druhů, jež označuje jako Carterius Stepanowii, souhlasící s Dosilia Stepanowii Dybowského a dále velmi důležitou formu Ephydatia bohemica, ukazující přechod mezi americkým rodem Carterius a Ephydatia. Neboť u ní někdy vystupuje trubice vzduchonosná jako u Carterius, kdežto ve většině případů úplně schází a hrdélko gemulové (mikrodioda č. omphalophorus, Marshall) týž tvar vykazuje, jako Ephydatia. Má také Eph. bohemica amfidisky dvojité délky jako Carterius i jako Heteromeyenia, americký to rod, jehož delší amfidisky zvláštním zobáčkovitým zakončením se honosí.

Jinak v klasifikaci hub počíná si *Petr* ve smyslu mém a *Wierzejského*, sjednotiv Eusp. Jordanensis s Eusp. lacustris a četné ty odrudy Ephyd. Mülleri, tudíž také Ep. amphizona spojuje v jediný druh „Eph. Mülleri“.

I vidno z tohoto přehledu historického, že sladkovodní houby europské dle svých značných proměn zevních taktéž rozdílně ve své hodnotě generické a druhové byly pojímány, a že výklad tento měnil se právě jen dle značnějšího srovnávacího materialu a pokud to možno

bylo s větším neb menším zřetelem na formy exotické. Díky laskavosti pp. *H. J. Cartera* v Budleigh (Salterton Devon) a *Edw. Pottse* ve Filadelphii dostalo se mi význačnějších druhů a hlavně zástupců rodových, jež dotyční badatelé popsali, takže mohl jsem z vlastního názoru souditi o příbuznosti forem europských a cizokrajných, zvláště severoamerických. I jest tudíž povinností mou, znovu vzíti zřetel na stav nynějších vymožeností bádání, a jakož z Europské fauny Čechy v ohledě hub sladkovodních nejlépe známy jsou, druhy ve vlasti naší se objevující, v systematický souhlas s faunami exotickými uvésti. Ale také druhy záhadné, v Německu objevené a *Retzerem* popsané, bylo dlužno znovu posouditi a z vlastního názoru jich druhovou povahu poznati. V té příčině zavázán jsem prof. *Th. Eimerovi* v Tubinkách, jenž laskavě mi propůjčil úlomky s gemulemi dvou záhadných hub Sp. Car. Lieberkühnii Noll a Sp. lac. Rhenana Retzer, o nichž jsem se přesvědčil, že prvá souhlasná jest se Sp. lacustris aut. a druhá za „dobrý“ druh vyložiti se musí. A tento moment má zvláštní význam pro uznání podčeledi Spongillina Carter, kdež nutno rozeznávati z Europské fauny rod Spongilla, jejž možno na 2 podrody rozděliti. V prvém podrodí rozeznáváme: 1. Euspongilla lacustris, a 2. Euspong. rhenana. Z druhého podrodu v Europě přichází Sp. fragilis, kdežto příbuzný její druh Spong. igloviformis v Sev. Americe nově objeven.

Druhá podčeleď *Meyenina* obsahuje více forem, jež v rody rozděliti nutno jest. I rozeznávám 1. rod Trochospongilla s europským druhem T. erinaceus, jehož nejblíže severoamerická forma, jak z vlastního názoru jsem se přesvědčil, samostatný druh představuje a jmenem Meyenia Leidyi se označuje. Tu tedy pod jmenem Trochospongilla Leidyi na dále uváděti nutno.

2. Rod Ephydatia Gray tyto druhy v Europě vykazuje:

a) Ephydatia fluviatilis, *b)* Eph. Mülleri, *c)* Ephydatia bohemica, jež činí přechod k rodu Carterius.

3. Rod Carterius Potts s druhem Cart. Stepanowii.

V následujících řádcích podám tudíž soustavný přehled veškerých druhů v Europě dosud známých, navrhuje diagnosy a karaktery rodův a druhův i sestaviv přehled všech synonym těchto posledních, jakož i poznámky o formách, dříve za variety neb samostatné druhy považovaných. Diagnosy druhové, jak je uvádím, pečlivě sestavil pan *Petr.*

Čeleď: **Spongillidae.**

Syn.: Spongillidae Gray
Spongillina Carter
Potamospongida Carter.

A) Podčeleď: *Spongillinae* Carter.

Gemmulae jednotlivě neb v brylkách složené, na mnoze zevní vrstvou vzduchonosnou a jehlicemi v ní se nalezajícími obložené.

I. Genus **Spongilla** auct.

Diagnosa:

S jehlicemi skeletovými hladkými, prodlouženými; s jehlicemi parenchymovými zkrácenými, buď prodlouženými, buď více méně obloučkovitě neb lomeně zahnutými, hladkými neb drsnými. Gemmulae buď úplně hladké, bez zevní vrstvy komůrkované (mladé?), aneb s více méně vysokou vrstvou vzduchonosnou, v níž uloženy buď tangentiálně, buď radiálně jehlice gemulové, co do tvaru parenchymovým se rovnající.

α) Podrod: *Euspongilla* Vejd.

Gemmule ojediněle v pletivu přicházející.

1. Euspongilla lacustris auct.

Syn.: Spongilla lacustris (?) Linné.
1782 „ canalium (?) Gmelin.
1816 „ ramosa (?) Lamarck.
1842 „ lacustris (?) Johnston.
1853 „ lacustris Lieberkühn.
1866 „ lacustris Bowerbank.
1870 „ Lieberkühnii Noll.
1877 „ lacustris Vejdovský.
1877 „ Jordanensis Vejdovský.
1881 „ lacustris Carter.
1882 „ lacustris Dybowski.
1883 Euspongilla lacustris et Jordanensis Vejdovský.
1883 Sp. lacustris Retzer.
Var. Sp. lacustris ramosa Retzer.
Var. Sp. lac. Lieberkühnii Retzer.
1885 Euspongilla lacustris Wierzejski.

Diagnosa:

Trsy větevnaté neb polštářovíté, travozelené, žlutavé neb hnědavé; oscula a pory nezřetelné, přečetné. Jehlice skeletové rovné neb poněkud zahnuté, ostře zakončité, hladké, po svazcích ve velmi zřetelném obalu rohovitém uzavřené. Jehlice parenchymové v množství velmi různém, obyčejně mírně zakřivlé, s pravidla hustě osténky pokryté, jindy též, když v menším počtu přítomné, téměř hladké. Gemmule někdy docela hladké, bez vnějšího obalu vzduchonosného, a jen sporými jehlicemi pokryté; jindy zase více méně vysokým obalem objaté, z malých komůrek vzduchonosných tvořeným, někdy jest tato vrstva objata zevní otočkou chitinovou, jež v mnohých případech schází. Do obalu vzduchonosného jsou zapuštěny buď paprskovitě buď tangentialně uspořádané jehlice rovněž tak i co do množství i co do tvaru nad míru různě. Nejobyčejněji jsou to zakřivlé a hustě ostnité jehlice pupenové, jež někdy jen velmi poskrovnu se objevují a docela i hladkými jehlicemi jsou zastoupené.

Poznámka:

Euspongilla lacustris uvádí se téměř ze všech zemí europských, jakožto obyvatel mírnětekoucích neb stojatých, rybničných vod. Jak diagnosa ukazuje, podlehá houba tato v ohledě hlavně tvaru a množství jehlic parenchymových a pupenových velmi značným proměnám, z kteréžto příčiny byla také na více druhů a odrud rozdělena; není pochybností, že zde máme co činiti s formou velmi proměnlivou, formou základní, z níž jiné nové druhy se tvořiti počínají. Pečlivá budoucí a hlavně na pokusech se zakládající badání jistě ukáží, na jaké příčině závislá jest ona výše vytčená schopnost proměny v zevním tvaru a množství jehlic parenchymových a pupenových. Prozatím zdá se mi pravdě podobným, že vytváření se těchto elementů spočívá na množství kys. křemičité ve vodách, v nichž houba naše žije a na schopnosti houby rozpuštěnou kyselinu upraviti ve stav pevný. Přehledněme nyní ony formy, jež dříve se za samostatné druhy považovaly. Typickou formou našeho druhu jest ona, jež v pletivech svých nese jen nepatrné množství parenchymových jehlic drsných a jejíž gemmule jsou úplně hladké, takřka beze všeho zevního obalu vzduchonosného s malým počtem zakřivlých, drsných jehlic pupenových. Takováto forma naší Eusp. lacustris sloužila dříve za podklad uznání druhu těchto vlastností, i jest také v starší době od Lieberkühna a z části i od Bowerbanka jako „Sp. lacustris“ uznávána. Tak jsem ji i popsal v prvých svých pracích o českých houbách sladkovodních a tak i *Retzer* líčí svou „Sp. lacustris“ u níž ale „Gemmulaenadeln

gekrümmt, höckerig, hie und da auf den Gemmulae liegend, im Gewebe fehlend.“ Ve své monografii vytkl jsem však i přicházení jiných poměrů jehlic drsných v parenchymu a na gemmulích v jednom a témže trsu a tudíž jakési naznačení přechodů k formám, jež za samostatné druhy byly považovány. Především jest to Spongilla Lieberkühnii, již *Noll* (Flussaquarien, Zoolog. Garten) r. 1870 popsal a již také *Retzer* (l. c.) pod týmže jmenem uvádí a takto charakterisuje: „Bildet Ueberzüge auf Holz und Steinen, erhebt sich dabei oft in fingerlangen, freiwachsenden, cylindrischen Zapfen von ihrer Grundlage. Skeletnadeln glatt, allmälig sich zuspitzend, zu starken Stäben verbunden, die entweder in langen Strängen oder netzförmig das Gewebe durchziehen. Höckerige Gemmulaenadeln zerstreut auf den Gemmulae liegend und sehr verbreitet im Gewebe . . . Lebt in Tümpeln und ruhig fliessendem Wasser und scheint in Deutschland die verbreitetste Art zu sein.“

Jakkoli již z popisu *Retzerova* vidno, že „Sp. Lieberkühnii“ málo se liší od jeho Sp. lacustris, předce vidělo se mi za vhodné, abych z vlastního názoru poznal povahu druhu Retzerova. Z malého úlomku, jejž jsem laskavostí prof. *Eimera* mohl zkoumati, poznal jsem totožnost „Sp. Lieberkühnii“ s naším druhem, jenž ovšem četným proměnám podléhá. Ve tvaru gemmulí a sporých jehlic na nich se nalezajících, nevidím nijakých rozdílů mezi „Sp. Lieberkühnii“ a „Sp. lacustris“; průřezy ukazují, že vzduchonosný obal jest více méně nízce vyvinutý, a na povrchu jeho jest u některých gemmulí vyvinuta, jindy docela schází chitinová otočka, právě tak střídavě, jako u Eusp. lacustris z rozličných nalezišť českých.

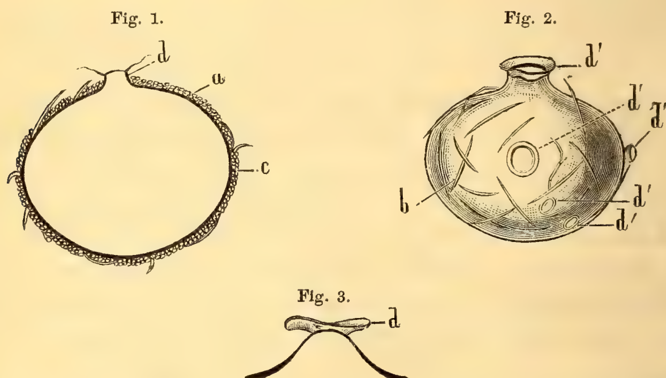
Ohromné, ba takřka převládající množství parenchymových, hrubě drsných jehlic, a dále rovněž takové množství jehlic a netvarů jich na povrchu gemmulí houby, kterou jsem poprvé z Jordánu u Tábora zkoumal, jakož i nedostatek zevní otočky gemmulové, zavdaly mi podnět tuto formu za zvláštní druh Eusp. Jordanensis považovati. Veškeré exempláře, které se mi z Jordánu dostaly, těmito zvláštnostm se honosily, takže nebylo příčiny pozastavovati se nad povahou druhovou této houby. Avšak četný srovnávací material, který se mi během nové doby z Čech do rukou dostal, přesvědčil mne o jiném. Na *některých* exemplářích z Labe u Králové Hradce a z vod od Počátek zjistil jsem ony poměry gemmulí a jehlic jejich, že souhlasí s oněmi za obyčejnou „Sp. lacustris auct.“ považovaného druhu. *Avšak v některých větvích a pletivu houby shledána totožná stavba gemmulí a množství jehlic na nich a v parenchymu*, jako dříve vytknuto pro „Eusp. Jordanensis“. I nutno tedy tento druh sjednotiti s „Eusp. lacustris“.

O varietě „Eusp. Jordanensis, var. druliaeformis“, která zvláštní štítky v chytinové vrstvě gemmulí má uložené, a kterou jsem jen na malém úlomku suchém zkoumati mohl, nemohu nic nového podati, neboť se mi nedostalo dosud nutného k poznání této důležité formy čerstvého materiálu. Co však se týče „Eusp. lacustris, var. macrotheca“, ta velice se blíží druhu Eusp. Rhenana, jak níže poznamenám.

2. Euspongilla Rhenana Retzer.

Syn.: 1883 Spongilla Rhenana Retzer.

Zajímavý druh tento popsal poprvé *Retzer* pod jmenem Spongilla Rhenana následovně: „Unterscheidet sich von den übrigen durch die glatten Gemmulaenadeln.



Euspongilla rhenana, Retzer. Fig. I. Podélný, mediální řez gemmulí *a,* vrstva vzduchonosná s jehlicemi *b.* — *c* otočka rohovitá, *d* nálevka polární. — Fig. 2. Gemmule s povrchu, *d* nálevka polární, *d'*, *d'*, *d'*, *d'*, vedlejší nálevky. — *b* jehlice. — Fig. 3. Nálevka polární.

Ueberzieht als dünne Kruste Holzstücke, Gesträuch und dergl. und sendet wenige kleine Fortsätze aus, oder wächst auch an manchen Stellen zu dicken Klumpen an. Die Skeletnadeln sind gerade oder leicht gebogen, gehen entweder plötzlich in eine scharfe, oder allmälig in eine weniger scharfe Spitze über. Sie bilden, zu Bündeln vereinigt, ein dichtes Netz. Die Gemmulaenadeln sind glatt, in gleichen, nicht sehr grossen Abständen von den Enden zweimal geknickt, und bilden eine dichte Lage um die Gemmulae, sind im Gewebe aber nur spärlich zerstreut. Die Gemmulae haben eine ziemlich dicke Wandung und liegen überall im Gewebe zerstreut.

Fundort:
Altrhein bei Eggenstein (in der Nähe von Karlsruhe).
Nach Angabe des Herrn Prof. Nüsslin, dem ich das vorliegende Exemplar zu verdanken habe, ist der Schwamm im Leben grün, und in den Wassern des Altrheins an Faschinengesträuch zu jeder Zeit zu finden."

Laskavostí prof. *Eimera* dostalo se mi malého úlomku exempláře *Retzerem* zkoumaného i mohu některé dodatky k popisu řečeného autora připojiti a hlavně podati popis ústrojnosti gemmulí. Tytéž mají tvar a velikost obyčejné Eusp. lacustris, avšak hrdélko (mikrodioda) polární jest širokou jasnou a teničkou nálevkou ohraničeno, jak výkresy přiložené ukazují. Na chitinové otočce leží obal vzduchonosný, z větší části velmi nízký, ze 2—3 vrstev dutinek vzdušných se skládající. Velmi zřídka nalezl jsem na gemmulích obal ten vyšší z 5—6 vrstev komůrek nad sebou sestavený. Tyto poslední gemmule jsou také větším počtem jehlic obložené než prvé. I leží jehlice pupenové na mnoze tangentialně na povrchu gemmulí, protkávajíce obal vzduchonosný, jen jednotlivě vynikají paprskovitě na venek. Tvar těchto posledních jest velmi proměnlivý a možno nalézti na každé gemmuli 3 tvary jich: V největším množství jsou přítomné obyčejné skeletové jehlice, mezi nimiž, ale vždy v nepatrném množství vystupují ony *Retzerem* popsané a vyobrazené dvakráte lomené jehlice, jež v nepatrném množství v parenchymu tělním přicházejí, jak již *Retzer* připomíná. Posléze také přicházejí tu jehlice slabě ohnuté s centrální uzlinou.

Zvláštností tohoto druhu jsou ještě vedlejší mikrodiody v chitinovém obalu gemmulí. Téměř na každé desáté gemmuli možno nalézti vedle hlavní veliké polární mikrodiody ještě postranní nálevky, jež v temné rohovité bláně jeví se z povrchu jako bílé, lesklé štítky, ohraničené ztlustlou obrubou. Z profilu pozorované jeví tyto nálevky jednoduché, manžetovité tenkostěnné trubice, vynikající dosti vysoko nad povrch rohovité blány. Takovéto vedlejší mikrodiody (otvory, kudy zdá se, že vychází zárodek z gemmule) byly pozorovány jako výjimka na některých houbách, ale jako charakter zvláštní připomíná je *Carter* pro jistý v Britické Columbii přicházející druh „Spongilla multiforis" Carter.

Na Euspongilla Rhenana velice upomíná, ba snad od Eusp. lacustris k prvě řečenému druhu přechod činí forma, kterou jsem popsal jakožto Eusp. lacustris var. macrotheca; neboť i její gemmule jsou tenkým obalem vzduchonosným opatřeny, v níž

nepatrný počet *hladkých*, avšak i ostnitých jehlic jest uložen. Taktéž široká nálevka zde jest charakteristickou. Naproti tomu jsou gemmule větší než u Eusp. Rhenana a parenchymové jehlice jsou ostnité vedle hladkých.

β) Podrod: *Spongilla* Wierzejski.

Diagnosa:

Gemmule z pravidla v brylkách po 2—30 skupené a dosti mohutnou vrstvou vzduchonosnou opatřené. V této zapuštěny jsou radiálně, tangentialně neb vůbec nepravidelně buď ostnité i hladké jehlice pupenové.

3. Spongilla fragilis Leidy.

Syn.: 1851 Spongilla fragilis Leidy.
1863 Spongilla Lordii Bowerbank.
1870 Spongilla contecta Noll.
1878—1884 Spongilla sibirica Dybowski.
1883 Spongilla contecta Retzer.
1884 Spongilla fragilis Vejdovský.
1884 Spongilla Lordii Wierzejski.
1885 Spongilla fragilis Wierzejski.
1885 Spongilla fragilis Petr.

Trsy nerozvětvené, barvy hnědavé, oscula poměrně velmi veliká, sestavená z pravidla pohromadě v značných prohlubeninách povrchu houby; pory malé, četné jehlice skeletové rovné, neb poněkud zahnuté, ostře zašpičatělé, hladké, u prostřed často uzlinaté. Jehlice pupenové četné rovné neb zakřivlé a četnými drobnými osténky pokryté. Zřídka i hladké tyčinkovité současně s drsnými jehlicemi. Gemmule malé, zakulacené, s polovou trubicí vzdušnou, obyčejně růžkovitě zahnutou, vynikající z vysokého obalu vzduchonosného. Tento jest velmi vysoký, an skládá se z velikých komůrek vzdušných, v radialní řady sestavených. Brylky dle spůsobu a místa svého vývoje dvojího druhu: basální ploché, v nichž gemmule hustě vedle sebe dlaždicovitě jsou uložené. Druhé, ve volném parenchymu se vyvíjející skupené po 2, 3—30 i více tvoří kulovité neb podlouhlé kolonie.

Spongilla fragilis nejprvé v Americe *Leidym* pozorována, později byla i v Sibíři a konečně v Europě nalezena; zde ji nejprvé *Noll* pod jmenem Sp. contecta popsal, načež v nové době objevena na Rusi, potom v Haliči, a konečně v Čechách a Anglii.

B) Podčeleď *Meyeninae* Carter.

Houby sladkovodní, jichž gemmule na mnoze ojediněle přicházející, obloženy jsou vrstvou vzduchonosnou, v níž uloženy amfidisky v jedné neb více vrstvách, celokrajné neb hvězdovité.

II. Genus. **Trochospongilla** Vejdovský.

Diagnosa:

S jehlicemi hladkými (T. Leidyi) neb drsnými (T. erinaceus). S amfidisky celokrajnými, nízkými, v jedné vrstvě ležícími na bási vysokého vzduchonosného obalu vnějšího. V Europě 1 druh.

4. Trochospongilla erinaceus Ehbr.

Syn: 1846 Spongilla erinaceus, Ehrenberg
1856 „ „ Lieberkühn
1877 „ „ Vejdovský
1881 Meyenia erinaceus Carter
1883 Trochospongilla erinaceus Vejdovský
1883 Spongilla erinaceus Retzer
1885 Trochospongilla erinaceus Wierzejski.

Diagnosa:

Trsy ploché, lupenité, bělavé, oscula i pory nepatrné. Jehlice skeletové mírně zahnuté neb rovné, ostny mohutnými opatřené. Jehlice parenchymové útlé, hladké, uprostřed někdy uzlinaté. Gemmule obdány vysokým obalem vzduchonosným, sestávajícím z radialně sestavených komůrek vzdušných. Na bási téhož obalu amfidisky v jediné vrstvě sestaveny, tvaru nízkého, s okrouhlými, mělce vchlipenými štítky polárními.

V Europě pozorována Trochospongilla erinaceus dosud v Německu, v Čechách, Haliči a Rusku. Nejhojněji v Haliči.

III. Genus. **Ephydatia** Gray nec Lam.

Diagnosa:

Jehlice skeletové buď jen hladké, buď jen ostnité, aneb obojí zároveň. Gemmulae nesou ve vrstvě vzduchonosné hned v jedné, hned ve 2—3 řadách amfidisky hvězdovité. V prvém případě mohou býti amfidisky stejně dlouhé, aneb délky rozdílné.

5. Ephydatia Mülleri Lieberkühn.

Syn.: 1816 Spongilla pulvinata (?) Lamarck
1856 Spongilla Mülleri, Lieberkühn
1877 „ „ Vejdovský
1878 Trachyspongilla Mülleri, Dybowski
1882 Meyenia Nro 2., Dybowski
1882 Ephydatia Nro 2., (Ephydatia Mülleri?) Dybowski
1883 Ephydatia Mülleri Vejdovský
Forma A, Forma B, var. astrodiscus Vejd.
1883 Ephydatia amphizona Vejdovský
1883 Spongilla mirabilis Retzer
1885 Meyenia Mülleri Wierzejski
1886 Ephydatia Mülleri Petr.

Diagnosa:

Trsy polštářkovité, zřídka rozvětvené, světle zelené, žluté, žlutavé, hnědé neb i bílé, oscula veliká, spoře vedoucí v systém užších kanálkův, pory malé. Jehlice skeletové buď jen hladké, buď jen ostnité aneb konečně obojí současně v témže trsu přicházející v poměrech číselných nejrůznějších. Drsnost rovněž tak proměnlivá, ježto ostny hned mohutně, hned nezřetelně vystupují. Jinak jsou jehlice buď rovné neb mírně zakřivlé, ostře špičaté, po svazcích v zřetelný obal rohovitý zavinuté. Gemmule v nízký cípek polární (mikrodiodu) vybíhající a z hora slabě sploštělé, obdány jsou různě vysokým obalem vzduchonosným, z četných drobných komůrek vzdušních složeným. Amfidisky v značném množství přítomné, urovnány buď v jediné buď ve 2 i ve třech vrstvách nad sebou ležících. Osy amfidisků nízké, asi téže délky jako průměr štítků nepravidelně neb pravidelně hvězdovitých, na okrajích buď hladkých, neb vroubkovaných a pilovaných.

Ephydatia Mülleri uvádí se v Europě dosud z Německa, Čech, Ruska, Haliče a Anglie.

6. Ephydatia fluviatilis auct.

Syn.: 1788 Spongilla fluviatilis (?) Linné
1788 „ canalium (?) Linné
1816 „ pulvinata (?) Lamarck
1842 „ fluviatilis (?) Johnston
1856 „ fluviatilis Lieberkühn
1863 „ „ Bowerbank
1867 Ephydatia fluviatilis Gray
1877 Spongilla fluviatilis Vejdovský
1881 Meyenia fluviatilis Carter

1882 Meyenia Dybowski
1882 Ephydatia fluviatilis Dybowski
1883 Ephydatia fluviatilis Vejdovský
1883 Spongilla fluviatilis Retzer
1885 Ephydatia fluviatilis Wierzejski
1886 Ephydatia fluviatilis Petr.

Diagnosa:

Trsy nerozvětvené, světle zelené neb žlutavé i žluté, oscula neveliká, hojná. Jehlice skeletové veskrze hladké, lehce zakřivlé, ostře zakončité. Parenchymové jehlice rovněž hladké, nepatrně zahnuté a útlé. Gemmule nejdrobnější ze všech evropských dobře známých druhů, žluté, jichž nepravidelně vykrojované štítky spojeny jsou osami dvakrát aneb skoro dvakrát tak dlouhými, co obnáší průměr štítků. Výška vrstvy vzduchonosné, zevně obdaná tuhou otočkou chitinovou, rovná se délce amfidisků.

Ephydatia fluviatilis pozorována v Europě: ve Francii, Anglii, Německu, Čechách, Haliči a na Rusi.

7. Ephydatia bohemica F. Petr.

Syn.: 1886 Ephydatia bohemica, F. Petr.

Diagnosa:

Trsy nepatrné, zelené, současně (cizopasně?) v trsech Euspongilla lacustris vegetující. Jehlice skeletové mírně zahnuté neb rovné, někdy i jemně ostnité. Jehlice parenchymové hojné, poněkud zakřivlé, neb přímé, s četnými ostnitými výrůstky, jako u Carterius Stepanowii, opatřené. Gemmule s mikrodiodami velikými, na jichž polu dosti široká, do vnitř vehnutá a nepravidelně laločnatá obruba jest vetknuta.

Ve vrstvě vzduchonosné zasazeny jsou amfidisky na zdání stejně dlouhé, z nich ale některé nad povrch gemmule vystupují. Osy amfidisků jsou štíhlé, delší než průměr štítků, a pokryté ostrými ostny; štítky samy jsou skoro pravidelně hvězdovité, s paprsky jemně pilovanými. Zřídka vychází mikrodiová nálevka v prodlouženou rourku.

Ephydatia bohemica nalezena dosud na jediném nalezišti v Europě, totiž u Kvasetic nedaleko Německého Brodu v Čechách.

Druh ten sám jest velmi karakteristický, anť ukazuje jistou příbuznost, ba přechod k rodu následujícímu Carterius, upomínaje naň předně dvojími amfidisky, jež, třeba nezřetelně, předce jsou nestejné délky a pak, že někdy polární obruba mikrodiodová vystupuje

v komolec, ba i v trubici vzdušnou, jež jest tak významná pro rod Carterius.

IV. Genus. **Carterius** Potts.

Syn.: Dosilia Dybowski.

Diagnosa:

Jehlice skeletové hladké, parenchymové ježaté. Gemmule opatřené vysokou, rovnou trubicí vzdušnou, jejíž svrchní pol nese korunku ve spůsobu různě laločnatého terčku. V obalu vzduchonosném ponořeny amfidisky zřetelně dvojí délky, kratší, ve výšce obalu vzduchonosného a delší, vystupující nad obal ten.

8. Carterius Stepanowii Petr.

Syn.: 1863 Spongilla Baileyi (?), Bowerbank.
1881 Meyenia Baileyi (?), Carter.
1884 Dosilia Stepanowii, Dybowski.
1886 Carterius Stepanowii, Petr.

Diagnosa:

Trsy útlé, polehavé, jemně až vláknitě rozvětvené, sytě zelené s nádechem modravým. Rozměry trsů malé. Jehlice skeletové hladké rovné, neb zakřivlé, ostře kopinaté. Jehlice parenchymové hojné, zahnuté, neb rovné a hustě ježaté následkem hojných ostnitých výrostků, jež zvláště uprostřed jehlic jsou největší, k oběma pak koncům menšími se stávají. Gemmule označeny jsou na hořením polu svém rovnou, neb zřídka mírně zahnutou vzdušnou trubicí. Tato jest na volném svém konci opatřena korunkou, totiž terčkem vlnovitě prohýbaným a na okraji laločnatým. Vzduchonosný obal gemmulí tvořen z četných, nevelikých komůrek vzdušných. Amfidisky jsou dvojí délky: kratší, jež ve vrstvě vzduchonosné úplně jsou ponořeny, a delší, jež třetinou neb i polovinou délky celé osy z obalu vzduchonosného volně vyčnívají. Štítky jich jsou hvězdovité, s četnými, jemně pilovanými paprsky a štíhlými, hojně ostnitými osami spojeny.

Carterius Stepanowii poprvé objeven v Rusku, v jezeře gubernie Charkovské a r. 1885 nalezen *F. Petrem* v Čechách v rybníku nedaleko Německého Brodu.

32.

Weitere Beiträge zur Kenntnis der Steinkohlenflora von Rakonitz.

Von Prof. **Joh. Kušta** in Rakonitz, vorgelegt v. Prof. J. Krejčí am 2. Juli 1886.

Mit 1 Tafel.

Das Folgende enthält als Fortsetzung meines Aufsatzes „Über die fossile Flora des Rakonitzer Steinkohlenbeckens", Sitzungsber. der königl. böhm. Gesellsch. d. Wiss. von 23. Februar 1883 p. 157—186, erstens eine Übersicht der für die einzelnen vier Schichtengruppen der carbonpermischen Formation bei Rakonitz neuen, im Laufe der letzten drei Jahre von mir gesammelten Pflanzenreste und ausserdem einige Notizen über seltene oder unvollkommen gekannte oder auch ganz neue Arten.

Von den vier carbonpermischen Etagen Mittelböhmens weisen bei Rakonitz auch diesmal die unteren Rakonitzer Schichten wieder die grösste Bereicherung hinsichtlich der Fossilien auf, namentlich der Fundort Moravia und zwar der ehemalige Abraum „na Kavanu", der nebst höchst interessanter Fauna *(Anthracomarti*, *Pedipalpi* und *Scorpiones)* auch ein reiches, prächtig erhaltenes Pflanzenmateriale *(Noeggerathien*, *Rhacopteriden*, seltene Fruchtstände von *Calamarien*, *Noeggerathien* und *Sigillarien*, fertile *Farne* u. a.) wieder geliefert hat.

Die unteren Radnitzer Schichten erscheinen hinsichtlich ihrer Fauna und Flora *(Noeggerathien, Rhacopteriden* und *Sphenopteriden)* von den oberen Radnitzer Schichten der Art abweichend, dass beide als selbstständige Gruppen und nicht als Unterabtheilungen der Radnitzer Schichten überhaupt aufgefasst werden müssen, zumal da die untere Gruppe sowohl in der Flora als auch in der Fauna manches mit den noch älteren Carbonstufen anderer Länder gemeinschaftlich besitzt.

Unter den Pflanzen sind es vornehmlich die *Noeggerathien* und *Rhacopteriden*, welche an mehreren Orten Böhmens: Stradonitz, Pilsen, Petrovic bei Rakonitz, insbesondere aber bei Rakonitz selbst, in der unteren Radnitzer Stufe und zwar in dem sogenannten Schleifsteinschiefer und in der denselben unterlagernden gelblichen, thonigen Sandsteinschichte mit 9 Arten und grosser Individuenmenge vor-

kommen, in der oberen Gruppe dagegen bedeutend an Artenzahl und namentlich an Individuenmenge abnehmen, ganz geeignet diesen Schichten den passenden Namen Noeggerathienschichten (Noeggerathienschiefer) zu geben.

Dieser Name ist auch deswegen der bisherigen Bezeichnung „Schleifsteinschiefer" vorzuziehen, weil ein ganz ähnliches Gestein in einem viel höheren Horizonte, unter den bituminösen Schichten des Lubná-Nýřaner Kohlenflötzes noch einmal auftritt.

Auch scheint es, dass einige ältere Angaben über das Vorkommen der Noeggerathien in den oberen Radnitzer Schichten auf Verwechslung dieser Etage mit der unteren beruhen.

Eine für die Erklärung der Entstehungsweise der Kohlenflötze der beiden Radnitzer Schichtengruppen wichtige und bereits bei Radnitz beobachtete Erscheinung sind die nicht seltenen, aufrecht stehenden Baumstämme, namentlich die armdicken Calamiten, welche die 3 *m* mächtigen Noeggerathienschichten des Johannschachtes in Moravia durchsetzen und mit ihren beiden Enden in die Kohle selbst übergehen.

In aufrechter Stellung kam da vor: *Calamites approximatus*, *Calamites Suckowi*, *Megaphytum musaeforme Corda sp.*, *Sigillaria diploderma*, *Sigillaria alternans* und *Sigillaria sp.*

Die oberen Radnitzer Schichten, deren Kohlenflötz bei Rakonitz nicht mehr gebaut wird, erfuhren diesmal keine palaeontologische Bereicherung.

Von den Lubnaer (Nýřaner) Schichten sei da wiederholt, was ich in meinem Aufsatze „Příspěvky k rozčlenění uhelnopermského souvrství". Zprávy spolku geolog. 1885 und bereits früher behauptet habe, nämlich dass die vorherrschend rothe Färbung derselben von den eruptiven Porphyrtuffen herrührt, weiter dass die Lubnaer Schichten grosse Complexe, welche früher für die Kounower Schichten angesehen wurden, bilden und zwar in der Umgebung von Rakonitz: bei Lubná, Hostokrej, Šanov, Senomat, Přílep, Lužná, Krušovic, sowie in der Umgegend von Kladno, von Pilsen, Nýřan etc. und endlich dass zu ihren bisher als permisch erklärten, vegevegetabilischen Einschlüssen, die ich schon früher in den Lubnaer Schichten nachgewiesen habe, wie: *Walchia piniformis* (aus dem Steinbruche von Přílep), *Odontopteris obtusiloba* (dto.), *Araucarites Schrollianus* (von Lubná, Lužná, Rakonitz usw.) noch *Annularia sphenophylloides* (Eisenbahndurchschnitt unter Hlaváčov) hinzutritt.

Der fast einzige Fundort dieser Etage ist jetzt Lubná.

Von den Kounower Schichten ist die untere, das Kounower Kohlenflötz unterlagernde, bisher wenig bekannte Abtheilung beachtenswerth. In dem Vilencer Sandsteine (m. cit. Abhandlung) kam vor: *Calamites cannaeformis*, *Sigillaria denudata*, *Carpolithes crassus* und *Trigonocarpus sp.*

In den Jordania-Schichten: *Jordania moravica* (ausser bei Mutějovic auch bei Herrendorf nicht selten), *Cordaites borassifolius*, *Walchia piniformis* (?), *Dictyopteris Brongniarti*, *Neuropteris sp.*, *Alethopteris pteroides*, *Volkmannia cf. gracilis* und *Calamites Suckowi* (nicht approximatus). Bei Milostín wurde endlich auf einer Kohlenhalde *Sigillaria sp.* und bei Herrendorf *Stachannularia tuberculata* gefunden.

Die nachstehende Tabelle enthält eine Ergänzung meines früheren Verzeichnisses (cit. Abh. 1883) der von mir gesammelten Steinkohlenpflanzen von Rakonitz.

Nach meinem früheren Verzeichnisse vom J. 1883 (l. c.) enthält: das ganze „Becken" von Rakonitz 164, die untere Radnitzer Gruppe 101, die obere 82, die Lubnaer Schichtengruppe 78 und die Kounower Schichtengruppe 41 Arten.

Mit Einbeziehung der im Folgenden aufgezählten Arten und nach Weglassung einiger unselbständigen Species, die sich in meinem ersten Verzeichnisse befinden, wie *Bergeria*, *Knorria*, *Aspidiaria*, zwei *Noeggerathiaestrobi*, *Rhacopteris elegans* (= Noeggerathia speciosa), *Schizodendron* und *Zamites*, ist der Stand der fossilen Flora von Rakonitz ein folgender:

Das ganze Becken hat geliefert	200	Arten
Die unteren Radnitzer Schichten . . .	131	„
Die oberen Radnitzer Schichten	82	„
Die Lubnaer (Nýřaner) Schichten . . .	86	„
Die Kounower Schichten	46	„

Die Steinkohlenflora von Rakonitz ist im Vergleich zu der fossilen Flora des ganzen mittelböhmischen Steinkohlengebietes, welches eine grosse Reihe von Fundorten: von Kralup bis Merklin besitzt, als sehr artenreich zu bezeichnen.

Nach der Schrift „Die mittelböhmische Steinkohlenablagerung" von K. Feistmantel, 1883 enthielt:

das ganze Steinkohlengebiet Mittelböhmens	283	Arten
die unteren Radnitzer Schichten	163	„
die oberen Radnitzer Schichten	194	„
die Nýřaner Schichten	92	„
die Kounower Schichten	77	„

Arten	I Untere Radnitzer Schich.	II Obere Radnitzer Schich.	III Lubnaer Schichten	IV Kounower Schichten	Anmerkung
I. Farne.					
a) Blätter.					
Diplotmema elegans Bgt. sp. . . .	+	.	.	.	Auch in II bei Rakonitz.
Diplotmema acutilobum Stb. sp. . .	+	.	.	.	Auch in II u. III bei Rakonitz.
Diplotmema obtusilobum Bgt. sp. .	.	.	+	.	Auch in I u. II bei Rakonitz.
Diplvtmema trifoliatum Bgt. sp. . .	+	.	.	.	
Sphenopteris Dubuissonis Bgt. . . .	+	.	.	.	
Sphenopteris cf. linearis Stb. . . .	+	.	.	.	
Sphenopteris spinosa Göp.	+	.	.	.	
Sphenopteris stricta Stb.	+	.	.	.	Neu für I.
Sphenopteris coralloides Gutb. . . .	.	.	+	.	Auch I u. II bei Rakonitz.
Sphenopteris Hönighausi Bgt. . . .	+	.	.	.	Auch II Rakonitz.
Sphenopteris rutaefolia Gutb. . . .	+	.	.	.	dto. , neu für I.
Sphenopteris tridactylites Bgt. . . .	.	.	+	.	Auch I Rakonitz.
Sphenopteris sporangifera K. Fst. .	+	.	.	.	
Hymenophyllites Partschi Ett. . . .	+	.		.	Neu für I.
Cyatheites Candolleanus Bgt. . .	+	.		.	Auch II, III Rakonitz. Neu für I.
Odontopteris Reichiana Gutb. . . .	+	.	.	.	
Odontopteris Schlottheimi Gutb. . .	+	.	.	.	
Dictyopteris Brongniarti Gutb. . .	.	.	.	+	Auch I, II, III. Rakonitz.
Neuropteris heterophylla Bgt. . . .	+	.	.	.	
Neuropteris Loshi Bgt.	+	.	.	.	
Neuropteris sp.	.	.	.	+	
b) Stipulargebilde.					
Schizopteris gigantea Göp. sp. . .	.	.	+	.	*Megaphytum giganteum Göp.*
c) Farnstämme.					
Megaphytum musaeforme Cord. sp. .	+	.	.	.	*Psaronius musaeformis Corda*
Megaphytum sp.		.	+		
II. Noeggerathien.					
Noeggerathia flabellata L. & H. . .	+	.	.	.	Bis jetzt nur in den Schatzlarer Schichten.
Rhacopteris n. sp.	+	.		.	Eine neue, schön erhaltene Art.
III. Calamarien.					
a) Axentheile und Blätter.					
Calamites Cisti Bgt.	+	.	.	.	
Calamites tenuifolius Ett.	+	.	.	.	

Arten	I Untere Radnitzer Schich.	II Obere Radnitzer Schich.	III Lubnaer Schichten	IV Kounower Schichten	Anmerkung
Calamites cf. ramosus Bgt.	.	.	+	.	Neu für Böhmen.
Asterophyllites grandis Stb.	+	.	.	.	
Annularia sphenophylloides Zenk. .	.	.	+	.	Neu für III. Sonst in IV.
b) Fruchtähren.					
Calamostachys cf. germanica Weiss .	+	.	.	.	Neu für Böhmen.
Calamostachys n. sp.	+	.	.	.	Neu.
Palaeostachys Schimperiana Weiss .	+	.	.	.	Neu für Böhmen.
Palaeostachys n. sp.	+	.	.	.	Neu.
Stachannularia tuberculata W. sp. .	.	.	.	+	In allen Etagen.
IV. Dichotomeen.					
a) Axentheile.					
Sigillaria subrotunda Bgt.	+	.		.	
Sigillaria diploderma Corda . . .	+	.	.	.	Mit Blättern: *Lepidophyllum horridum. O. Fst.*
Sigillaria alveolaris Bgt.	+	.	.	.	
Sigillaria sp.	.		.	+	
b) Fruchtzapfen.					
Lepidostrobus lycopoditis O. Fst. . .	+	.	.	.	Neu für I.
Lepidostrobus lepidophyllaceus Gutb.	+	.	.	.	Neu für I.
Lepidostrobus Goldenbergi Schim. .	.	.	+	.	Ad *Lepidodendron laricinum Stb.* und *Lepidophyllum horridum O. Fst.* Neu für III.
Sigillariaestrobus n. sp.	+	.	.	.	Neu.
V. Cordaiten.					
Cordaites principalis Germ.	+	.	.		Auch III Rakonitz.
Cordaites graminifolius n. sp. . . .	+	.	.		Eine neue Art. Wahrscheinlich gehört hieher auch *Antholithes glumaceus Kšt.*
VI. Coniferen.					
Walchia piniformis Schl.	.	.	.	+	? Bereits in III bei Přílep.
VII. Carpoliten.					
Cardiocarpus Gutbieri Gein.	+	.	.	.	
Carpolithes ellipticus Stb.	+	.	.	.	Neu für I.
Carpolithes corculum Stb.	+	.	.	.	

Berücksichtigt man noch die neueren, in obiger Tabelle und in meiner letzten Übersicht vom J. 1883 (l. c.) aufgezählten Funde bei Rakonitz, so erhält man für das ganze mittelböhmische Steinkohlengebiet, für die Nýřaner Schichten und namentlich für die unteren Radnitzer Schichten eine grössere Artenzahl und zwar:

Insgesammt	297	Arten
Untere Radnitzer Schichten	190	„
Obere Radnitzer Schichten	194	„
Nýřaner Schichten	106	„
Kounower Schichten	81	„

Die Arten, um welche die Flora der gesammten Steinkohlenablagerung Mittelböhmens vermehrt wird, sind diese:

Diplotmema cf. distans Stb.
Sphenopteris Bronni Bgt.
Noeggerathia flabellata L. & H.
Rhacopteris n. sp.
Calamites ramosus Bgt.
Asterophyllites radiiformis Weiss.
Calamostachys cf. germanica Weiss.
Calamostachys n. sp.
Palaeostachys Schimperiana Weiss.
Palaeostachys n. sp.
Sigillariaestrobus n. sp.
Cordaites graminifolius Kšt.
Antholithes glumaceus Kšt.
Carpolithes crassus Kšt.

Die unteren Radnitzer Schichten Mittelböhmens werden um folgende Arten bereichert:

Diplotmema cf. distans Stb.
Sphenopteris Bronni Bgt.
Sphenopteris rutaefolia Stb.
Sphenopteris stricta Stb.
Sphenopteris artemisiaefolia Stb.
Hymenophyllites Partschi Ett.
Hymenophyllites quercifolia Göp.
Cyatheites Candolleanus Bgt.
Hawlea pulcherrima Corda (im Sinne Stur's).
Megaphytum giganteum Goldb.
Megaphytum cf. majus Weiss.
Noeggerathia flabellata L. & H.

Rhacopteris n. sp.
Calamites tenuifolius Ett.
Calamostachys cf. germanica Weiss.
Calamostachys n. sp.
Palaeostachys Schimperiana Weiss.
Palaeostachys n. sp.
Sagenaria microstigma O. Fst.
Lepidostrobus lycopoditis O. Fst.
Sigillaria angusta Bgt.
Sigillariaestrobus sp.
Lepidostrobus lepidophyllaceus Gutb.
Cordaites principalis Germ. *)
Cordaites graminifolius Kšt.
Antholithes glumaceus Kšt.
Carpolithes ellipticus Stb.

Die Nýřaner Schichten weisen folgenden weiteren Zuwachs auf:

Sphenopteris irregularis Stb.
Odontopteris obtusiloba Naum.
Psaronius cf. radnicensis Cor.
Calamites cf. ramosus Bgt.
Asterophyllites radiiformis Weiss.
Annularia sphenophylloides Zenk.
Hawlea pulcherrima Corda.
Megaphytum sp.
Lepidostrobus Goldenbergi Schimp.
Cordaites palmaeformis Göp.
Graminites Volkmanni Ett.
Araucarites Schrollianus Göp.
Walchia piniformis Schl.
Carpolithes sp.

Die Kounower Schichten endlich:

Neuropteris sp.
Dictyopteris Brongniarti Gutb.
Lepidodendron cf. laricimum Stb.
Carpolithes crassus Kšt.

Die meisten dieser und anderer Pflanzenreste aus der Steinkohlenablagerung bei Rakonitz verdienten detailierte Abbildungen und

*) Auch bei Dibří Dr. Feistmantel (Zprávy geol. 1885).

Beschreibungen; ich muss mich jedoch vorläufig auf folgende wichtigere Anmerkungen beschränken.

Farne.

Sphenopteris cf. sporangifera K. Fst. Von den verschiedenartigen, fructificierenden Farnen, die mir namentlich Moravia geliefert hat, sei da ein an *Sphen. sporangifera* K. Feistmantel, mittelböhm. Steink. Textfigur pag. 67 erinnernder Farn erwähnt.

Sphenopteris stricta Stb. Von dieser Art, welche mehr einer *Rhacopteris*, etwa *transitionis* Stur ähnlich ist und bei Sternberg, Flora der Vorwelt, I., Taf. LVI, 3 abgebildet wird, kamen in dem Noeggerathienschiefer einige grössere Bruchstücke zum Vorschein.

Schizopteris gigantea Göp. sp. Diese von Göppert unter dem Namen *Adiantites giganteus* gegründete Art, die sich bei Lubná in einigen Exemplaren vorgefunden hat, gibt sich durch die Unregelmässigkeit des Blattrandes und der Nervatur als ein echtes Stipulargebilde kund und kann eher mit dem Namen Schizopteris gigantea bezeichnet werden.

Noeggerathien.

Noeggerathia foliosa Stb. Meine in dem letzten Aufsatze (l. c.) ausgesprochene Vermuthung, diese Art besitze einen doppeltgefiederten Wedel, fand keine Bestätigung, obwohl mir viele Exemplare derselben vorgekommen sind. Ein Fragment hatte eine Länge von einem halben Meter.

Noeggerathia flabellata L. & H., welche auch in den Schatzlarer Schichten nach Stur, Carbonflora d. Schatzlarer Schichten 1885 vorkommt, wurde auch in den unteren Radnitzer Schichten (Johannschacht in Moravia) gefunden.

Noeggerathia foliosa Stb. und *N. intermedia* K. Fst. wurden nicht selten mit ganz erhaltener Basis und Spitze gefunden. Namentlich ist in letzter Zeit auch der Blattgrund von *N. intermedia* bekannt geworden: die radiaer zerschlitzten Blättchen werden dabei gegen die Basis kleiner, die Nervatur ärmer, bis sich die untersten Blättchen auf nur wenige, zwei bis eins, fadenförmige, schizopterisartige Zipfel reducieren Länce der Exemplare über 60 *cm*.

Von beiden (und anderen?) Arten wurden wieder sehr schöne Fructificationen gesammelt. Vergl. auch meine Mittheilungen über Noeggerathien etc. (l. c.).

Noeggerathia speciosa Ett. und *Rhacopteris elegans* Ett. sp. Das prächtige, auf diese Arten sich beziehende Materiale zeigt erstens, dass die *Rhacopteris elegans* nicht einfach, sondern doppelt gefiedert ist, wie die *Noeggerathia speciosa* und dass vor Allem beide Arten (Gattungen): die Rhacopteris elegans und Noeggerathia speciosa einer und derselben Art angehören und zwar so, dass die bisherige *Rhacopteris elegans* die Spitze und die *Noeggerathia speciosa* die Basis eines grossen, über 1 *m* langen, zusammengesetzten Blattes darstellt.

Bereits früher habe ich „die Polymorphie" von *Noeg. speciosa* erwähnt und Stücke von derselben entdeckt, von denen einige an *Rhacopteris elegans* erinnerten und einige sich sogar den *Schizopteriden* näherten. Nun fand ich Exemplare von *Rhac. elegans*, die oben einen normalen Bau haben, nach unten aber an den Secundaerabschnitten mehr und mehr gelappt, zwei- drei- und mehrfach dichotomisch zerschlitzt sind, ganz wie die Exemplare von *Noeggerathia speciosa,* deren Spindel an der Basis, wie bei allen Noeggerathien überhaupt, mit verkümmerten Fiederchen besetzt ist, etwas höher sechs- und mehrfach dichotomisch zerschlitzte, noch höher aber dieselben Blattabschnitte wie die grösseren Exemplare von *Rhacopteris elegans* besitzt. Übrigens hat die *Noeg. speciosa* in der Regel eine dicke, oft über 1 *cm* starke Spindel, wogegen die *Rhacopteris elegans* immer mit einer viel dünneren oft ganz dünnen Rhachis versehen ist.

Ausserdem hat Ettingshausen in seiner Flora von Stradonitz auch ein Exemplar von *Asplenites elegans* Ett. (*Rhacopteris elegans* Ett. sp.) abgebildet, das sich der *Noeggerathia speciosa* etwas nähert.

Zu dieser Pflanze (*Noeggerathia speciosa* + *Rhacopteris elegans*) gehört auch die neue, von Stur in der Carbonflora der Schatzlarer Schichten 1885 und Sitzungsberichte d. kais. Acad. 1883 aufgestellte *Rhacopteris raconicensis Stur n. sp. (nec olim).*

Auch eine Fruchtähre, die jener von *N. intermedia* sehr ähnlich ist, fand ich in naher Gesellschaft mit *Rhac. elegans*, so dass diese Ähre zu der letztgenannten Noeggerathie anzugehören scheint. Dieselbe ist von der Form eines *Noeggerathiaestrobus* ährenförmig (und nicht rispenförmig, wie die Fructificationen der Rhacopteriden). Aus diesem Grunde und mit Rücksicht auf die noeggerathienartige Basis des Wedels *schlage ich für diese beiden, resp. drei Pflanzen*, die nur Theile einer und derselben Art sind, *nicht den Namen Rhacopteris elegans, sondern Noeggerathia speciosa* Ett. vor.

Rhacopteris n. sp. Eine neue, schön erhaltene Rhacopteris von der Grösse und vom Habitus der *Noeggerathia speciosa*, von der sich dieselbe jedoch dadurch unterscheidet, dass ihre Rhachis geflügelt, die sitzenden Tertiaerabschnitte an ihrer Spitze und Basis einfach, sonst nur gegabelt sind.

Calamarien.

Im Johannschachte kamen *Calamiten* vor, die eine bedeutend entwickelte, verkohlte Zolzzone besitzen (m. Notizen 1883). Ein Exemplar hatte eine 25 *mm* im Durchmesser mächtige Zolzzone und einen bloss 5 *mm* dicken gerieften Kern.

Asterophyllites equisetiformis Bgt. Einmal fand ich am Johannschacht eine ährenartige Misbildung, ähnlich jener bei Weiss, Steinkohlen-Calamarien 1876, X, 2—3, jedoch dicht beblättert. Nach Weiss könnte dies (an dem Exemplare aus Deutschland) auch durch einen Insectenstich entstanden sein.

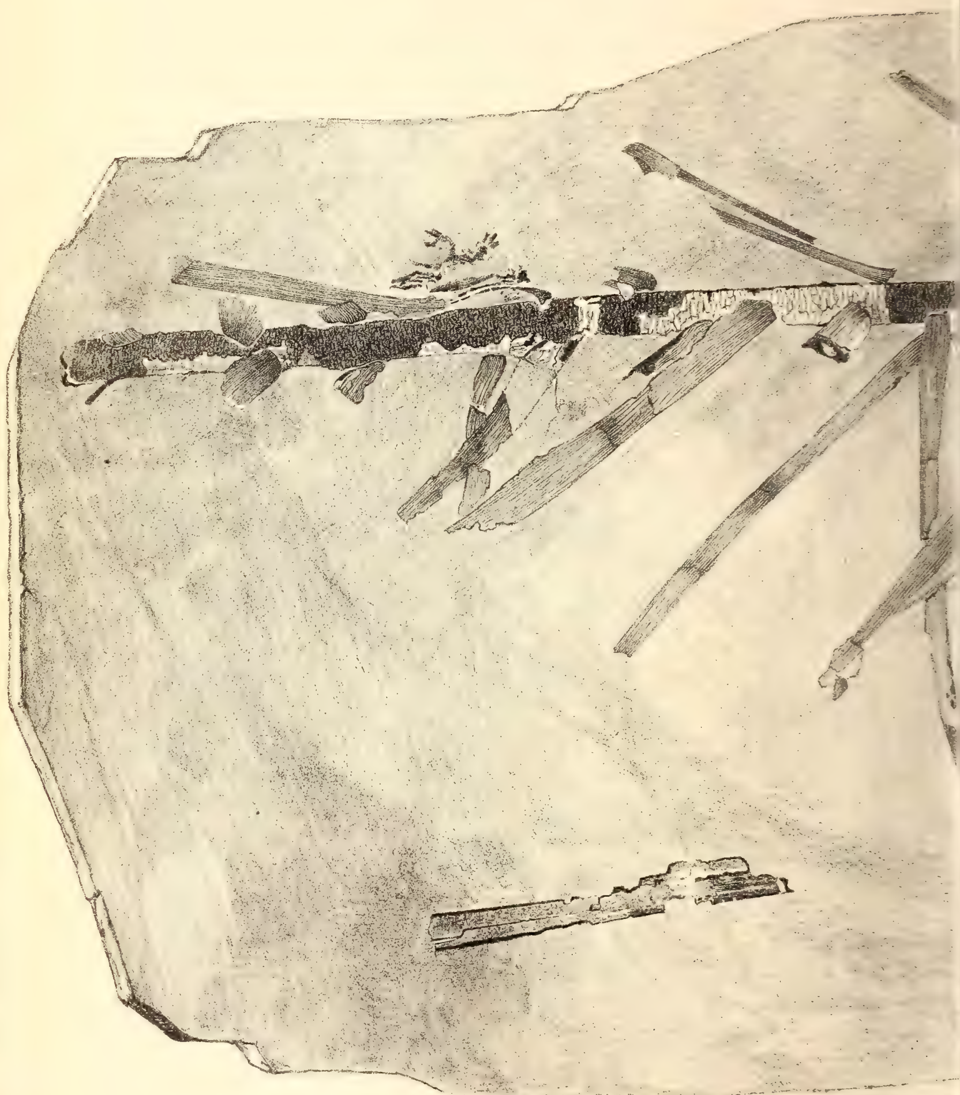
Calamostachys cf. germanica Weiss, schöne, einseitige, für Böhmen neue Rispe, in mehreren Exemplaren vorgekommen, ähnlich jener bei Weiss, Calam. XVI, 3—4, jedoch grösser.

Paleostachys Schimperiana Weiss. Eine für die böhm. Kohlenablagerung neue Ähre, 12 *cm* lang, fast 3 *cm* breit, ganz übereinstimmend mit der seltenen, von Weiss in Calam. V. 1—4 abgebildeten Calamarienähre.

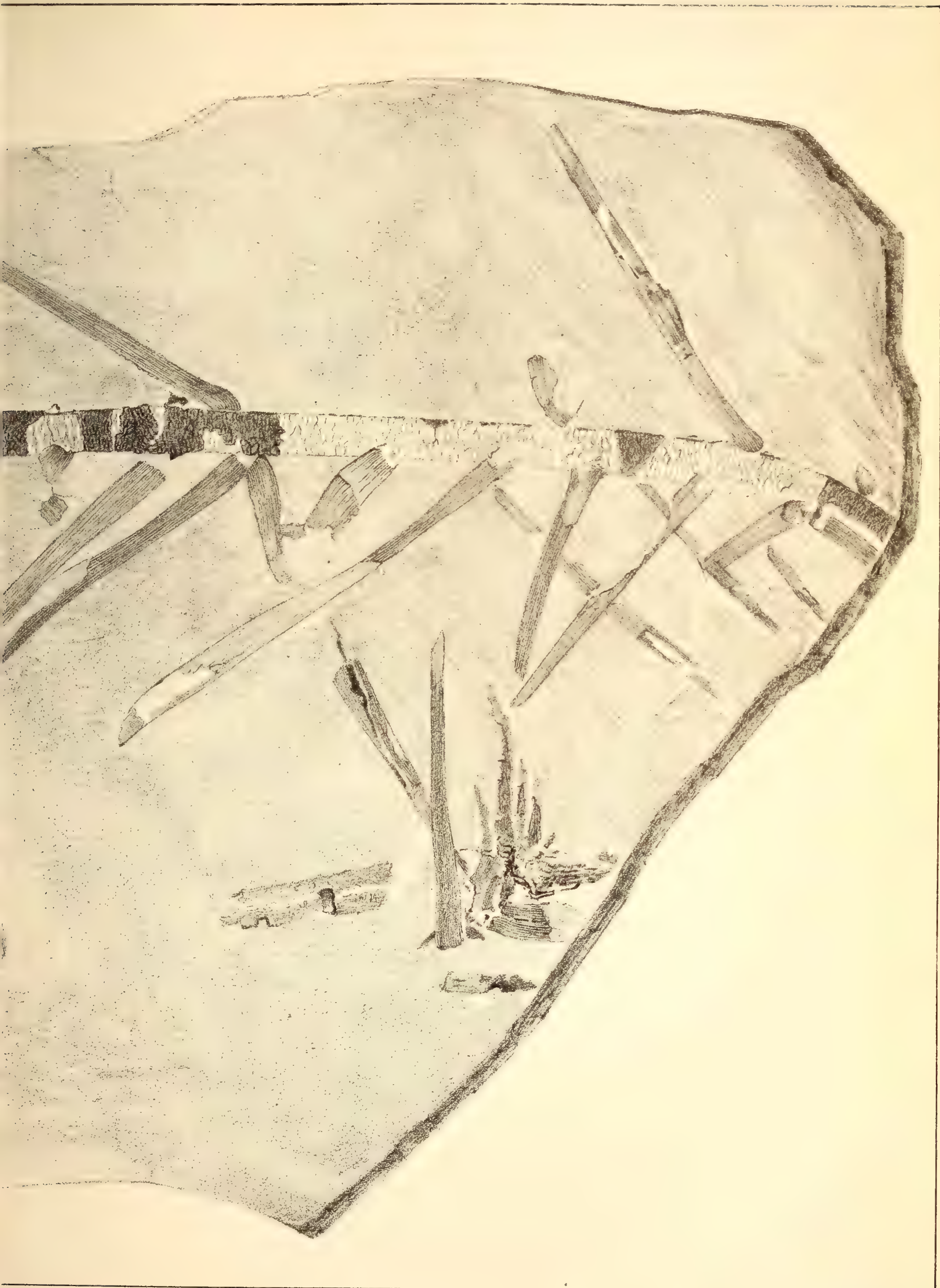
Ausserdem wurden auch andere Calamarien-Ähren, die ich nicht kenne, gefunden.

Dichotomeen.

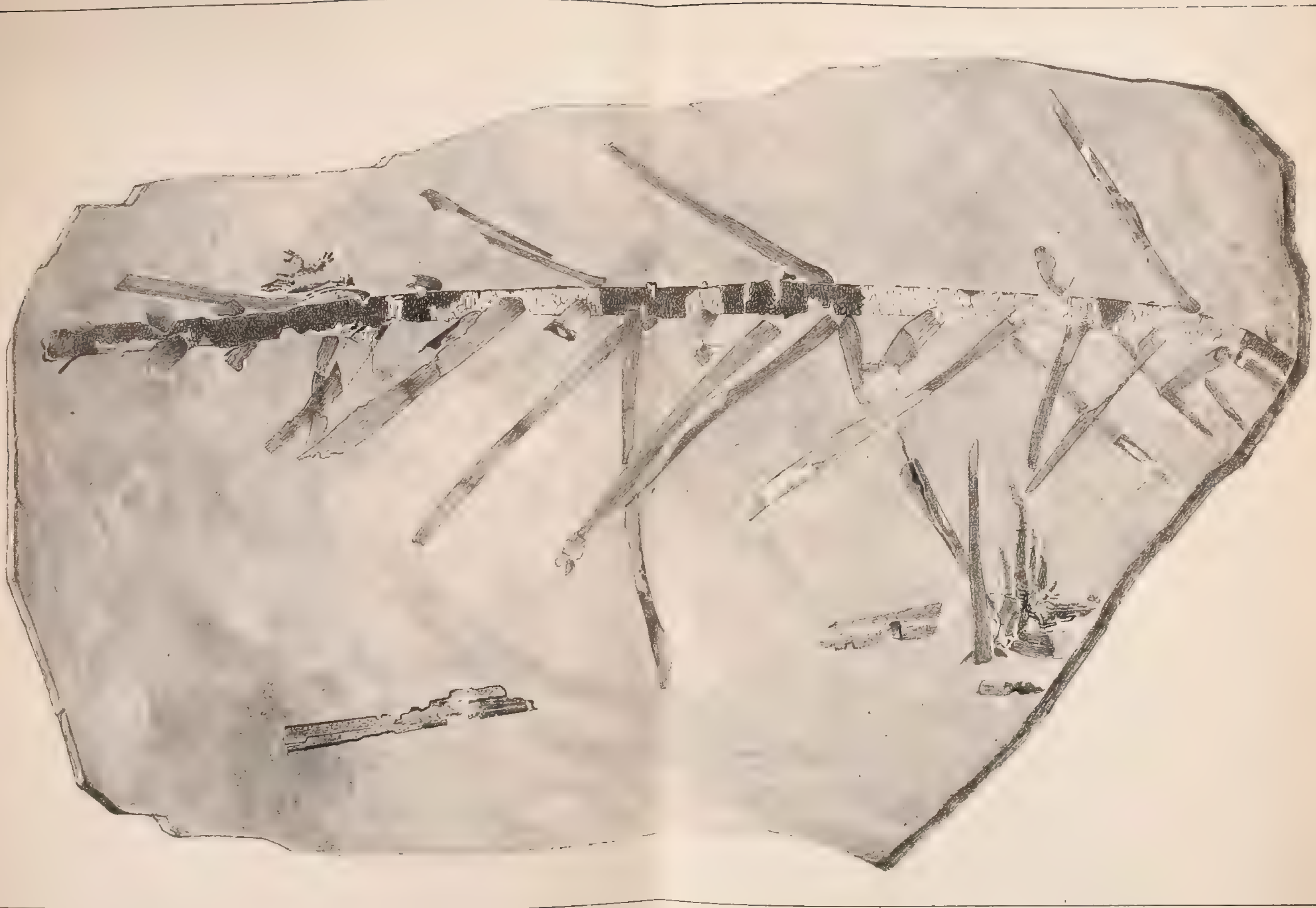
Sigillaria diploderma Corda. Diese bisher mit dem Fundorte Radnitz angeführte Art kam in Moravia (na Kavanu und am Johannschacht) in mehreren meist blatttragenden, auch aufrechtstehenden Exemplaren vor, und stellt somit die Spitze eines Sigillariastammes vor. Die Sigillarienblätter sind eine ziemlich seltene Erscheinung. Meiner Ansicht nach sind die Blätter, die aus den meisten Radnitzer Schichten unter dem Namen *Lepidophyllum horridum* O. Fst. angeführt werden, nichts anderes als Blätter dieser Sigillaria und sind von jenem *Lepidophyllum horridum* O. Fst., das man oft in den Lubnaer Schichten, wohl als Blätter von *Lepidodendron laricinum* Stb. antrifft, zu unterscheiden. Übrigens ist das Lubnaer *Lepidophyllum horridum* etwas breiter. Über ein mit *Lepidophyllum horridum* besetztes Exem-



Fr. Macák del. Šolta lith. 1886.



Druck Farský Prag.



Fr. Macák del. Šolta lith. 1886

Druck Farský Prag.

plar von *Lepidodendron laricinum* Stb. von Lubná habe ich bereits berichtet.

Lepidostrobus Goldenbergi Schimp. Grosse bis 60 *cm* lange, in Gesellschaft von *Lepidodendron laricinum* und *Lepidophyllum horridum* bei Lubná vorkommende Fruchtzapfen, die den Abbildungen Schimper's in Traité de Paléontologie vég. LXI, 3 und namentlich 4 entsprechen und höchst wahrscheinlich Fruchtstände von *Lepidodendron laricinum* sind.

Lepidostrobus lepidophyllaceus Gutb. Diese bei Geinitz in Flora von Sachsen abgebildete, mit breiten Bracteen versehene, charakteristische Ähre kam mir in Moravia zweimal und zwar einmal in einer schön erhaltenen rosettenförmigen Form vor. Bisher wurde dieselbe bloss mit der Lagerstätte der unteren Radnitzer Schichten erwähnt. Bemerkenswerth ist endlich eine neue Cordaites-Art.

Cordaites graminifolius n. sp.

(Tafel.)

Ziemlich oft sind mir im Noeggerathienschiefer und zwar na Kavanu, am Johannschacht und endlich in Petrovic Reste einer charakteristischen Cordaites-Art und zwar meist lose Blätter, einigemal in Verbindung mit Stengel, vorgekommen, der ich den Namen *Cordaites graminifolius* beilegen will. Auf den ersten Anblick erinnert unser Cordaites an eine Monocotyledone, eine Grasart, unterscheidet sich jedoch von den Gramineen durch den völligen Abgang von Knoten. Übrigens sind nach den neueren Untersuchungen die Gramineen und überhaupt die Monocotyledonen im Carbon noch nicht vertreten und die Cordaiten werden unter die *Gymnospermen* eingereiht. Auch Stur zweifelt sehr an der Selbstständigkeit der Grasart *Graminites Feistmanteli* Geinitz aus dem böhmischen Carbon und hält dieselbe für den Stamm von *Diplotmema acutilobum Ett. sp.* (Culm-Flora, p. 233.)

Cordaites graminifolius besitzt 2 bis 5 *mm* breite Blätter mit dichten, parallellaufenden Nerven, zwischen denen man hie und da auch Queräderchen wahrnimmt. Die Nerven sind meist von gleicher Dicke, werden jedoch gegen die Basis ungleich dick, so dass da 2 bis 4 (und 5 ?) schwächere zwischen 2 stärkeren vorkommen. Die Blätter stehen abwechselnd in einer Entfernung von cca. 4 *mm* von einander auf dem gerieften bis 8 *mm* (an unserem Exemplare fast 6 *mm*) starken Stengel unter einem spitzen Winkel.

An dem abgebildeten Exemplare ist der Stengel 2—4 *cm*, die Blattfragmente 7 *cm* lang. Doch scheinen auch über 12 *cm* lange Blätter gewesen zu sein.

Links von unserem abgebildeten Exempl. (s. Taf.) ist auch eine Stengelspitze mit zusammengedrängten Blättern erhalten.

Cordaites graminifolius, der auch einer *Ullmannia* nicht unähnlich ist, wird wohl mit *Cordaites microstachys Goldb.* (Weiss, Flora Steinkohlenform. und Rothlieg., Textfig. pag. 195) verwandt sein. Bei der letztgenannten Art wechseln jedoch stärkere Nerven mit den schwächeren regelmässig ab.

Bei Petrovic fand ich auf einer Platte, in der Gesellschaft von Blättern, die wohl zu *Cordaites graminifolius* gehören, einen ährenförmigen Blüthenstand, der aus kleinen, vollkommen erhaltenen Ährchen zusammengesetzt war und den ich *Antholithes glumaceus* benannt habe (diese Berichte 1883) und die höchst wahrscheinlich den Blüthenstand dieser neuen Cordaites-Art vorstellen. Dieser Blüthenstand, der nicht aus den oberen, sondern den unteren Radnitzer Schichten von Petrovic stammt, ist im böhm. Museum aufbewahrt.

Antholithes glumaceus besteht aus mehreren, 4 *mm* langen, starrblättrigen Ährchen (nicht Perigonen) und erscheint mit *Noeggerathiaeanthus pauciflorus Weiss* verwandt. Die Blättchen der letzteren sind jedoch kleiner, mit zahlreichen und dachziegelartig angeordneten, gekielten Deckblättchen versehen.

Tafelerklärung.

Cordaites graminifolius n. sp. aus den Noeggerathienschichten der unteren Radnitzer Schichtengruppe „na Kavanu“ bei Rakonitz. Natürliche Grösse. Gezeichnet von *Fr. Macák,* Realschüler in Rakonitz.

33.

Note sur Phasganocaris, nouveau Phyllocaride de l'étage F-f2, en Bohême.

Par **Ottomar Novák**. Lu, le 15. Octobre 1886.

(Avec une Planche).

Dans son *Supplt au Vol. I, Pl. 26, fig.* 25—34 et *Pl. 34, fig.* 7—9, p. 564, *Barrande* décrit et figure plusieurs fragments isolés d'un Crustacé, qu'il range parmi les Euryptérides, et qu'il nomme *Eurypterus pugio.*

L'auteur avait été induit à rapporter ces fragments au genre *Eurypterus*, d'un côté, par l'ornementation analogue du test; de l'autre côté, par la forme générale du telson, auquel il avait adjoint le dernier segment abdominal, dans l'opinion que ces deux parties formaient une seul pièce, *(voir l. c. fig. 25—26, Pl. 26.)*

En réalité, les deux fragments, dont se compose cette figure, au lieu d'être soudés, représentent deux segments mobiles, joints par une articulation analogue à celle qui unit le dernier segment abdominal au bulbe du telson, dans les genres *Aristozoe*, *Ceratiocaris*, *Dithyrocaris*, etc. *(Voir. Pl. I. fig. 12—14.)*

Nous allons démontrer que ces segments n'ont rien de commun avec le genre *Eurypterus*, mais au contraire, qu'ils doivent être placés dans le groupe des *Ceratiocaridae.*

Nous ne connaissons, jusqu'à ce jour, que les 2 derniers segments abdominaux. Le segment antérieur, fig. 1—3, est de forme cylindrique et légèrement courbé vers le côté ventral, fig. 3.

L'articulation du bout antérieur de ce segment est formée par le bord légèrement rentré, et par deux impressions, visibles au côté dorsal, fig. 1, et dont nous ne pouvons indiquer la destination, à cause de l'absence du segment précédent, jusqu'ici inconnu.

Le bout postérieur montre, au côté dorsal, deux sillons longitudinaux, enfermant un bourrelet. Il est muni d'une doublure, qui rentre à 1 m. m. dans l'intérieur du segment. L'extrême ténuité du test rend cette doublure transparente, fig. 2 et 3.

Le dernier segment abdominal de *Aristozoe regina*, (*Bactropus Barr.*), offre une doublure analogue*).

Le second et dernier segment représente réellement un *telson*, dont la conformation générale ressemble à celui de *Ceratiocaris.*

Entre autres détails non indiqués par Barrande**), nous citerons:

1°, l'articulation du bulbe du gouvernail. Elle consiste en un reploiement du test, plus fort sur le côté dorsal, que sur le côté ventral, fig. 13.

2°, de chaque côté, une apophyse en forme de crochet, destinée probablement à l'adaptation des pointes secondaires du gouvernail.

Ces apophyses nous amènent à conclure que le gouvernail se composait de 3 pointes, comme dans les genres *Ceratiocaris*, *Dithyrocaris*, etc.

---

*) *Novák* Remarques sur le genre Aristozoe, Pl. I. fig. 17 et 20. (Sitzungsberichte k. böhm. G. d. Wiss. 1885).

**) l. c. Vol. I. Suppl^{t}, p. 564—565.

Cependant, jusqu'à ce jour, nos recherches pour trouver les deux pointes secondaires, ont été infructueuses.

3°, une rainure longitudinale, située au sommet des arêtes latérales, et portant des perforations destinées à l'insertion des épines mobiles, fig. 5, 7, 9, 10.

Les analogies, qui existent entre l'abdomen, connu sous le nom de *Eurypterus pugio* Barr., et celui de *Ceratiocaris*, nous indiquent donc que les fragments, figurés sur notre Planche, appartiennent à un genre de la famille des *Ceratiocaridae*.

Les autres parties du corps, telles que, les segments abdominaux précédents(?) et la carapace thoracique, nous sont inconnues.

Cependant, il pourrait se faire, que ces parties qui nous font défaut, aient déjà été découvertes dans la même roche et qu'elles soient représentées par les carapaces thoraciques, attribuées par Barrande aux Ostracodes.

Dans nos publications antérieures*), nous nous sommes efforcé de prouver que les carapaces de *Aristozoe* Barr., *Callizoe* Barr., *Orozoe* Barr., *Ptychocaris* Nov., appartiennent à l'ordre des *Phyllocaridae*, Packard.

Tous ces fossiles se trouvent associés dans la même couche de calcaire blanc de *Koněprusy*, — bande f2. Nous ne pouvons distinguer à laquelle de ces formes doivent être rapportés les segments abdominaux, nommés par Barrande, *Eurypterus pugio*.

Nous proposons donc le nom provisoire de *Phasganocaris***), en conservant toutefois le nom spécifique, *Ph. pugio*, donné par *Barrande*.

Explication des figures.

Phasganocaris pugio, Barr. sp.

(Tous les spécimens figurés proviennent de la même couche de calcaire blanc de la bande f2 — Environs de *Koněprusy*).

Fig. 1. Dernier segment abdominal, grossi 2 fois — vu par le côté dorsal.

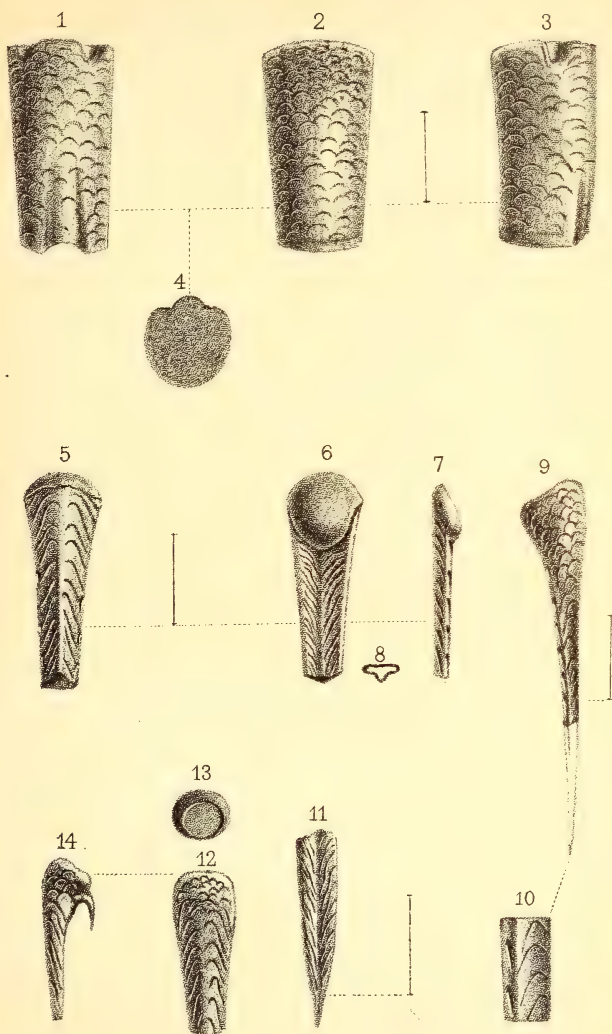
„ 2. *id.* . . . . côté ventral, montrant l'extension de la doublure à l'extrémité postérieure.

„ 3. *id.* . . . . face latérale.

---

*) Remarques sur le genre Aristozoe et Nouveau crustacé Phyllocaride. (Sitzungsb. d. k. b. Gesell. d. Wiss. 1885).

**) Φάσγανον = épée, Καρίς = crabe.



O. Novák delin: Šolta lith. Druck Farský Prag.

Fig. 4. *id.* . . . . Section transverse, prise à l'extrémité postérieure, orientée d'après la fig. 1.
„ 5. Partie antérieure du telson dépourvu du bulbe, vue par le côté dorsal.
„ 6. *id.* côté ventral.
„ 7. face latérale, montrant la série des cavités où s'adaptaient les épines.
„ 8. Section transverse, orientée d'après la fig. 6.
„ 9. Pointe principale du gouvernail, dépourvue de l'apophyse, face latérale, grossie 3 fois.
„ 10. *id.* Grossissement pour montrer les points d'insertion des épines.
„ 11. Pointe terminale du *telson*, face ventrale, grossie 2 fois.
„ 12. Partie antérieure du telson, conservant le bulbe, face dorsale. (Grandeur naturelle).
„ 13. *id.* vue par l'extrémité antérieure.
„ 14. *id.* face latérale, montrant l'échancrure destinée à l'insertion d'une des pointes secondaires du gouvernail.

34.

Beiträge zu den Eigenschaften des Axencomplexes der Flächen zweiten Grades und des allgemeinen tetraedralen Complexes.

Von **F. Machovec** vorgelegt von Prof. Dr. Eduard Weyr am 15. October 1886.

In der zweiten Abtheilung seiner „Geometrie der Lage“ nennt Herr Reye jede Gerade, die zu ihrer reciproken Polare in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades F_2 rechtwinklig ist, eine Axe dieser F_2. Fällt man folglich aus einem beliebigen Punkte P ein Loth p auf seine Polarebene π bezüglich einer F_2, so bekommt man eine von ihren Axen. Die Punkte P und $p\pi$ heissen Pol, resp. Fusspunkt der Axe p.

Alle Axen einer F_2 bilden einen speciellen tetraedralen Complex, dessen Eigenschaften sowohl in diesem speciellen als auch im allgemeinen Falle zuerst vom Herrn Reye und zwar synthetisch untersucht wurden.*) Die in seinem oben genannten Werke angeführten Eigen-

*) Siehe den 18., 19., 21., 22. und 23. Vortrag in der zweiten Auflage des angeführten Werkes.

schaften des Axencomplexes und die geometrischen Örter der Pole von Axen, welche bestimmten Bedingungen genügen, wurden im Wintersemester 1885—1886 bei den Übungen im math. Seminar der k. Universität in Strassburg einer analytischen Behandlung unterzogen.

Theils bei diesen sehr anregenden Übungen, theils später bewies ich die nachfolgenden Eigenschaften durch Einführung der Begriffe „reciproke Axen", „reciproke Pole" und „reciproke Polarebenen." Einige von diesen Eigenschaften sind neu, andere sind zwar bekannt, aber erscheinen hier in einem neuen Zusammenhange.

I.

Wir beschränken uns bei unseren Untersuchungen zuerst auf die centrischen Flächen zweiten Grades.

Schreibt man die Gleichung einer solchen Fläche F_2 im rechtwinkligen Coordinatensysteme in der Form

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=D$$

und die Gleichung einer beliebigen Geraden in der Form

$$\lambda x-\mu y=a,$$
$$\lambda x-\nu z=a_1,$$

so ist

$$a_1=\frac{A-C}{A-B}a$$

die Bedingung dafür, dass jene Gerade Axe der F_2 ist. Die Gleichungen einer beliebigen Axe p' von F_2 sind folglich

$$\lambda x-\mu y=a, \tag{1}$$
$$\lambda x-\nu z=\frac{A-C}{A-B}a^{*}),$$

worin λ, μ, ν und a beliebige Werte annehmen können. Weil die Gleichungen

*) In einer von dieser sehr wenig verschiedenen Form wurden die Gleichungen der Axe bei jenen Seminarübungen geschrieben.

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\frac{m}{A}x + \frac{n}{B}y + \frac{p}{C}z = D, \\ &\frac{m}{A+\varrho}x + \frac{n}{B+\varrho}y + \frac{p}{C+\varrho}z = D \end{aligned}$$

für beliebige Werte von m, n, p und ϱ immer auf die Form (1) gebracht werden können, so repräsentiren sie auch eine beliebige Axe p' der F_2.

Die Coordinaten des Poles P' dieser Axe sind

$$(3)\qquad \begin{aligned} &x' = \frac{DA^2(A+\varrho)}{(A-B)(A-C)m}, \quad y' = \frac{DB^2(B+\varrho)}{(B-C)(B-A)n}, \\ &z' = \frac{DC^2(C+\varrho)}{(C-A)(C-B)p} \end{aligned}$$

und die Gleichung seiner Polarebene π' bezüglich der F_2 lautet

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\frac{A(A+\varrho)}{(A-B)(A-C)m}x + \frac{B(B+\varrho)}{(B-C)(B-A)p}y + \\ &+ \frac{C(C+\varrho)}{(C-A)(C-B)p}z = 1. \end{aligned}$$

Die reciproke Polare p_1 der Axe p' hat die Gleichungen

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{m(A-B)(A-C)}{DA^2}x + \frac{n(B-C)(B-A)}{DB^2}y + \frac{p(C-A)(C-B)}{DC^2}z = D, \\ &\frac{m(A-B)(A-C)}{DA(A+\varrho)}x + \frac{n(B-C)(B-A)}{DB(B+\varrho)}y + \frac{p(C-A)(C-B)}{DC(C+\varrho)}z = D, \end{aligned}$$

ihr Pol P_1 hat die Coordinaten

$$(6)\qquad x_1 = \frac{mA}{A+\varrho}, \quad y_1 = \frac{nB}{B+\varrho}, \quad z_1 = \frac{nC}{C+\varrho}$$

und seine Polarebene π_1 ist durch die Gleichung

$$(7)\qquad \frac{m}{A+\varrho}x + \frac{n}{B+\varrho}y + \frac{p}{C+\varrho}z = D$$

bestimmt.

II.

Die Axe $\frac{p_1}{p'}$, den Pol $\frac{P_1}{P'}$ und die Ebene $\frac{\pi_1}{\pi'}$ wollen wir im folgenden „reciproke Axe" resp. „reciproker Pol" und „reciproke Polarebene" sowohl der Axe $\frac{p'}{p_1}$ als auch ihres Poles $\frac{P'}{P_1}$ und seiner Polarebene $\frac{\pi'}{\pi_1}$ in Bezug auf die Fläche F_2 nennen.

Aus den Gleichungen (3) und (6) folgt, dass die Coordinaten zweier reciproken Pole durch die Gleichungen

$$\text{(A)} \quad x'x_1 = \frac{DA^3}{(A-B)(A-C)}, \quad y'y_1 = \frac{DB^3}{(B-C)(B-A)}, \quad z'z_1 = \frac{DC^3}{(C-A)(C-B)}$$

verbunden sind.

Ähnlich bekommt man aus den Gleichungen (4) und (7) für die Coordinaten zweier reciproken Polarebenen die Beziehungen

$$\text{(B)} \quad \xi'\xi_1 = \frac{A}{D(A-B)(A-C)}, \quad \eta'\eta_1 = \frac{B}{D(B-C)(B-A)}, \quad \zeta'\zeta_1 = \frac{C}{D(C-A)(C-B)}$$

und endlich aus (3) und (7) für die Coordinaten eines Poles und seiner reciproken Polarebene

$$\text{(C)} \quad x'\xi_1 = \frac{A^2}{(A-B)(A-C)}, \quad y'\eta_1 = \frac{B^2}{(B-C)(B-A)}, \quad z'\zeta_1 = \frac{C^2}{(C-A)(C-B)}.$$

Zu diesen Gleichungen können noch die bekannten Gleichungen

$$\text{(D)} \quad x' = AD\xi', \quad y' = BD\eta', \quad z' = CD\zeta',$$

welche zwischen den Coordinaten eines beliebigen Punktes und seiner Polarebene in Bezug auf F_2 stattfinden, hinzugefügt werden. Die Grössen, welche auf den rechten Seiten der Gleichungen (A) vorkommen, werden wir im weiteren Verlaufe unserer Untersuchung kurz mit α^2, β^2 und γ^2 bezeichnen. Wir werden sogleich sehen, dass einige von ihnen immer negativ sind.

Ist die gegebene F_2 ein Ellipsoid, so können wir voraussetzen, dass

$$A > B > C > 0 \text{ ist.}$$

Dann ist

$$x'x_1 > 0, \quad y'y_1 > 0, \quad z'z_1 < 0.$$

Für ein einschaliges Hyperboloid kann

$$A > B > 0 > C$$

angenommen werden. Folglich ist in diesem Falle

$$x'x_1 > 0, \quad y'y_1 < 0, \quad z'z_1 < 0.$$

Endlich für ein zweischaliges Hyperboloid sei

$$A > 0 > B > C.$$

Dann ist

$$x'x_1 > 0, \quad y'y_1 > 0, \quad z'z_1 < 0.$$

In allen diesen Fällen setzen wir D als positiv voraus.

III.

Die Gleichungen (A) und (B) in II. sind Grundgleichungen zweier speciellen cubischen Transformationen, deren einfache geometrische Bedeutung aus jenen Gleichungen ersichtlich ist.*)

Es sind nämlich

jede zwei reciproken Pole conjugiert bezüglich aller Flächen des F_2-Bündels, welcher durch die drei Paare von Ebenen

$$x^2 = \alpha^2, \quad y^2 = \beta^2, \quad z^2 = \gamma^2$$

bestimmt ist.

Alle Flächen dieses Bündels haben das Haupt-

jede zwei reciproken Polarebenen conjugiert bezüglich aller Flächen der Φ_2-Schaar-Schaar, welche durch die drei Paare von Punkten

$$\xi^2 = \frac{\alpha^2}{A^2D^2}, \quad \eta^2 = \frac{\beta^2}{B^2D^2}, \quad \zeta^2 = \frac{\gamma^2}{C^2D^2}$$

bestimmt ist.

Alle Flächen dieser Schaar-Schaar haben das

---

*) Vergl.: Noether „Über die eindeutigen Raumtransformationen etc." Math. Annalen, II. B.

tetraeder der gegebenen F_2 zu ihrem gemeinschaftlichen Poltetraeder.

Haupttetraeder der gegebenen $\Phi_2(\equiv F_2)$ zu ihrem gemeinschaftlichen Poltetraeder.

Zu den Flächen der Schaar-Schaar gehört auch der unendlich ferne imaginäre Kugelkreis, weil je zwei reciproke Polarebenen zu einander normal sind*). Der links angeführte Bündel ist Polare jener Schaar-Schaar bezüglich der F_2.

Jeder Fläche n^{ter} Ordnung, die keinen Hauptpunkt A_k (Eckpunkt des Haupttetraeders) enthält, entspricht durch die Transformation (A) eine Fläche von der Ordnung $3n$, welche durch jede Kante des Haupttetraeders n-mal geht und in seinen Eckpunkten $2n$-fache Punkte hat.**)

Geht die Fläche n^{ter} Ordnung durch einen Hauptpunkt, z. B. A_1, r-mal, so zerfällt ihre Transformierte in eine Fläche $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung $F_{(n-r)}$ und in die r-mal zu zählende Seite $A_2A_3A_4$ des Haupttetraeders. Die Fläche $F_{(n-r)}$ geht durch jede der Kanten A_2A_3, A_3A_4, A_4A_2 $(n-r)$-mal, durch jede der übrigen Kanten n-mal, hat im Punkte A_1 einen $2n$-fachen und in den übrigen Hauptpunkten $(2n-r)$-fache Punkte. — Einer Curve n^{ter} Ordnung, die durch keinen Hauptpunkt geht und keine Kante des Haupttetraeders schneidet, entspricht durch die Transformation (A) eine Curve von der Ordnung $3n$, welche durch jeden Hauptpunkt n-mal geht. Schneidet die gegebene Curve n^{ter} Ordnung eine Kante, z. B. A_1A_2, r-mal, ohne durch einen der Punkte A_k zu gehen, so zerfällt die ihr entsprechende Curve in die r-mal zu zählende Kante A_3A_4 und in eine Curve von der Ordnung $(3n-r)$, welche in den Punkten A_1 und A_2 n-fache, in den Punkten A_3 und A_4 $(n-r)$-fache Punkte hat und ausserdem die Kante A_3A_4 $(n-r)$-mal schneidet.

Geht die gegebene Curve durch einen Hauptpunkt, z. B. A_1, s-mal, ohne die Kanten des Haupttetraeders in anderen Punkten zu schneiden, so entspricht ihr durch (A) eine Curve von der Ordnung $(3n-2s)$, welche im Punkte A_1 einen n-fachen und in den übrigen Hauptpunkten $(n-s)$-fache Punkte hat.

Ähnliches gilt von der Transformation (B).

---

*) Man bekommt durch Addition der rechtsstehenden Gleichungen

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=0$$

als Gleichung dieses Kreises.

**) Vergl. Geiser „Zur Theorie der Flächen zweiten und dritten Grades", Cr. J. 69.

IV.

1. Aus den Gl. (A) und (B) in II. folgen die Sätze:

Die Paare von Ebenen, durch welche je zwei reciproke Pole aus einer Kante des Haupttetraeders der F_2 projiciert werden, bilden eine quadratische Involution, in welcher die durch jene Kante gehenden Hauptebenen ein Paar conjugierter Ebenen bilden.

Jeder Ebene eines beliebigen Paares dieser Involution entspricht durch die Transformation (A) seine zweite Ebene (III).

Die Paare von Punkten, in welchen je zwei reciproke Polarebenen von einer Kante des Haupttetraeders der F_2 geschnitten werden, bilden eine quadratische Involution, in welcher die auf jener Kante liegenden Hauptpunkte ein Paar conjugierter Punkte bilden.

Jedem Punkte eines beliebigen Paares dieser Involution entspricht durch die Transformation (B) sein zweiter Punkt (III).*)

Man bekommt auf diese Weise links 6 Involutionen von Ebenen. Die Doppelelemente σ jeder von diesen Involutionen entsprechen sich durch die Transformation (A) selbst. Ausser diesen 6 Paaren von Ebenen σ gibt es keine anderen sich selbst entsprechenden Ebenen, weil jede solche Ebene durch eine Kante des Haupttetraeders gehen muss (III).

Zwei von den drei Paaren der Ebenen σ, die durch einen Hauptpunkt gehen, schneiden sich in vier Geraden g, von denen jede sich selbst entspricht. Und weil jede sich selbst entsprechende Gerade mit jeder Kante des Haupttetraeders, von welcher sie geschnitten wird, eine sich selbst entsprechende Ebene bestimmt, so liegen jene vier Geraden g zu zweien auch in den Ebenen des dritten Paares. Die sechs durch einen Hauptpunkt gehenden Ebenen σ schneiden sich somit zu dreien in vier sich selbst entsprechenden Geraden g. Solcher Geraden bekommt man im Ganzen 16.

Drei, verschiedenen Paaren angehörende Ebenen σ schneiden sich in einem Punkte T, der sich selbst entspricht. Weil sowohl jede Ebene, welche durch einen sich selbst entsprechenden Punkt und

*) Vergl.: Salmon-Fiedler „Anal. Geom. des Raumes", I. Theil.

eine Kante des Haupttetraeders bestimmt ist, als auch jede Gerade, welche diesen Punkt mit einem Hauptpunkte verbindet, sich selbst entspricht, so gehen durch jeden Punkt T sechs von den Ebenen σ und vier von den Geraden g. Weil ferner jeder von den Hauptpunkten verschiedene Punkt $g\sigma$ sich selbst entspricht, so müssen auf jeder Geraden g zwei und nur zwei von den Punkten T liegen. Es gibt folglich im Ganzen 8 sich selbst entsprechende Punkte T. Sie sind Grundpunkte des in III beschriebenen Bündels.*)

Diese acht Punkte bilden mit den vier Hauptpunkten und mit den zwölf Ebenen σ eine Configuration von 12 Punkten und 12 Ebenen von der Eigenschaft, dass in jeder Ebene σ 6 von jenen 12 Punkten liegen und durch jeden von diesen 12 Punkten 6 Ebenen σ gehen. Die Ebenen σ gehen zu dreien durch 16 Gerade g und auf jeder Geraden g liegen 3 von jenen 12 Punkten. Folglich ist diese Configuration eine sogenannte hexaedrale $(12_6, 16_3)$.**)

Die 12 von den Kanten des Haupttetraeders verschiedenen Diagonalen h dieser Configuration entsprechen sich durch die Transf. (A) ebenfalls selbst, weil sich in jeder von ihnen zwei durch verschiedene Kanten des Haupttetraeders gehende Ebenen σ schneiden.

Man hat somit die Sätze:

Es gibt 12 Ebenen σ und 8 Punkte T, die sich durch die Transformation (A) selbst entsprechen. Sie bilden mit den vier Hauptpunkten eine hexaedrale Configuration $(12_6, 16_3)$, deren 16 Geraden g und 12 von den Kanten des Haupttetraeders verschiedene Diagonalen h sich selbst entsprechen.

Es gibt 12 Punkte S und 8 Ebenen τ, die sich durch die Transformation (B) selbst entsprechen. Sie bilden mit den vier Hauptebenen eine hexaedrale Configuration $(12_6, 16_3)$, deren 16 Geraden g' und 12 von den Kanten des Haupttetraeders verschiedene Diagonalen h' sich selbst entsprechen.

Wir werden im folgenden die links angeführte Configuration als die erste, die rechts angeführte als die zweite bezeichnen.

Die Verbindungslinie zweier beliebigen reciproken Pole schneidet jedes der sechs Paare von Ebenen σ in zwei Punkten, welche von jenen Polen harmonisch getrennt sind. Daraus folgt:

*) Vergl.: Sturm „Über die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandtschaften." Math. Annalen, XIX Band.

**) Vergl.: Reye „Über Hexaeder- und Octaeder-Configurationen." Acta mathematica I.

Die 6 Paare von Punkten, in denen die Verbindungslinie zweier beliebigen rec. Pole die 6 Paare von Ebenen σ schneidet, liegen in einer Involution, welche jene Pole zu ihren Doppelpunkten hat.

Die 6 Paare von Ebenen, welche die Durchschnittslinie zweier beliebigen rec. Polarebenen mit den 6 Paaren von Punkten S bestimmt, liegen in einer Involution, welche jene Polarebenen zu ihren Doppelebenen hat.

Weil jede zwei reciproken Polarebenen zu einander normal sind, so ist die rechts angeführte Involution eine symmetrische. Der Satz: Die Winkel jedes Paares von Ebenen, welche eine beliebige Normale der F_2 mit den 6 Paaren von Punkten S bestimmt, werden von den Hauptnormalebenen der F_2, die durch jene Normale gehen, halbiert, ist also nur ein specieller Fall des rechts angeführten Satzes.

Die Punkte S sind Focalcentra und die Ebene σ Directorebenen der F_2.*)

2. Auf Grund der Bemerkung, dass die Geraden g und g' zum Axencomplexe gehören, beweist man leicht, dass die Geraden g' Normalen der F_2 sein müssen.

Jede Ebene nämlich, die durch g' geht, hat zur reciproken Polarebene wieder eine durch g' gehende Ebene. Jedes Paar solcher Ebenen, z. B. π' und π_1, wird von der reciproken Polare g der Geraden g' in den Polen P' resp. P_1 dieser Ebenen geschnitten und construiert man durch P' eine Gerade $p' \perp \pi'$ und durch P_1 eine Gerade $p_1 \perp \pi_1$, so sind p' und p_1 reciproke Axen der F_2. Weil aber $\pi' \perp \pi_1$ und $g \perp g'$ ist, so schneiden sich p' und p_1 in einem Punkte M der Geraden g' und bestimmen eine zu g' senkrechte Ebene-Polarebene des Punktes M in Bezug auf F_2. Daraus folgt aber, dass der Punkt M auf der Fläche F_2 liegt und dass g' Normale der F_2 im Punkte M ist.**)

*) Vergl.: Salmon-Fiedler „Anal. Geom. des Raumes", I. Th.

**) *Bemerkung.* Dass die Axen p' und p_1 sich schneiden, folgt schon daraus, dass ihre Pole auf einer Axe von F_2 (in diesem Falle auf g) liegen. Aus der in der Einleitung angegebenen Construction der Axe folgt nämlich, dass alle Axen der F_2, die ihre Pole auf einer beliebigen Axe a haben, eine Parabel umhüllen, welche in der reciproken Polarebene der Axe a liegt und diese Axe in ihrem Pole berührt und ferner, dass alle Axen der F_2, die ihre Pole auf einer nicht zum Axencomplexe gehörenden Geraden haben, die Regelschaar eines hyp. Paraboloides bilden.

Weil jede zwei durch g' gehenden zu einander senkrechten Ebenen in Bezug auf F_2 conjugiert sind, so sind die Punkte M Kreispunkte der F_2.

Alle Axen der F_2, die ihre Pole auf einer der Diagonalen h haben, bilden die Regelschaar eines hyp. Paraboloides, denn keine der Diagonalen gehört dem Axencomplexe an. Weil jede von diesen Axen zu ihrem reciproken Pole einen Punkt hat, der wieder auf derselben Diagonale h liegt, so ist jene Regelschaar ihre eigene Polare in Bezug auf F_2. Man bekommt für jede der 12 Diagonalen h eine solche Regelschaar und alle Strahlen jeder von diesen Regelschaaren werden auch von der zugehörigen Diagonale h' der zweiten Configuration $(12_6, 16_3)$ geschnitten.

Jede von den Axen t der F_2, deren Pol in einem der Punkte T liegt, ist ihre eigene reciproke Axe und folglich liegt sie auf F_2. Man bekommt 8 solche Doppelaxen. Denkt man sich eine von ihnen, z. B. t_1, deren Pol der Punkt T_1 ist, so wird sie von 4 der übrigen 7 Doppelaxen geschnitten, nämlich von derjenigen, deren Pole T auf den vier durch diesen Punkt gehenden Geraden g liegen, denn diese Geraden sind Axen der F_2. Die übrigen drei Doppelaxen t sind zu t_1 windschief, weil die Verbindungslinien ihrer Pole mit T_1 als Diagonalen h der Configuration zum Axencomplexe nicht gehören. Es liegen folglich 4 von den Geraden t in einer und 4 in der anderen Schaar der Geraden von F_2.

3. Von den Ebenen σ sind im Falle des Ellipsoides 6 reell (II). Ein Paar von ihnen ist zu der längsten, ein Paar zu der kürzesten Symmetrieaxe normal und das dritte Paar besteht aus Diagonalebenen des durch die zwei ersten Paare gebildeten prismatischen Raumes. Daraus folgt, dass in diesem Falle 6 von den Punkten S, je 4 von den Geraden g und g' und 4 von den Kreispunkten M reell sind.

Ähnliches gilt vom zweischaligen Hyperboloide.

Im Falle des einschaligen Hyperboloides sind nur zwei von den Ebenen σ und folglich auch nur zwei von den Punkten S reell. Diese zwei Ebenen σ sind zu der grösseren reellen Axe normal. Die Geraden g und g' und die Kreispunkte M sind in diesem Falle imaginär.

Die Punkte T, die Ebenen τ und die Geraden t sind in allen diesen Fällen imaginär.

V.

Drei von den Flächen des in III angeführten Bündels eignen sich besonders zur Construction des reciproken Poles eines gegebenen Punktes.

Wir gelangen zu diesen Flächen auf folgende Weise:

Denken wir uns eines der drei räumlichen Vierecke, von denen jedes durch zwei Paare Gegenkanten des Haupttetraeders gebildet ist, z. B. das Viereck $A_1A_2A_3A_4$, und ausserdem ein Paar reciproker Pole P und P_1. Durch einen von diesen Punkten, z. B. durch P_1, construieren wir zwei Geraden, von denen jede die zwei Gegenkanten jenes Viereckes schneidet. Die durch diese zwei Transversalen bestimmte Ebene π ist Polarebene des Punktes P bezüglich einer bestimmten Fläche G_2 des Bündels.*)

Es lässt sich nun beweisen, dass man den reciproken Pol Q_1 zu jedem beliebigen Punkte Q bekommt, wenn man die Polarebene des Punktes Q bezüglich G_2 construiert und die Verbindungslinien der Punkte, in welchen jene Polarebene die Gegenkanten des Viereckes $A_1A_2A_3A_4$ schneidet, zum Durchschnitte bringt.

Denkt man sich nämlich, dass sich der Punkt P auf der Geraden $PQ \equiv q$ bewegt und führt man für jede seine Lage die eben beschriebene Construction durch, so bekommt man eine durch P_1 und durch die Hauptpunkte gehende Curve dritter Ordnung k_3, welche der Geraden q durch jene Construction entspricht, und zwar erscheint diese k_3 als ein Theil des Durchschnittes zweier Flächen zweiter Ordnung, dessen übriger Theil von der reciproken Polare q' der Geraden q in Bezug auf G_2 gebildet wird. Die Gerade q' ist demnach eine Sehne der k_3.

Anderseits sind den Punkten der Geraden q bezüglich aller Flächen des Bündels, also auch bezüglich der G_2 die Punkte einer Curve k_3' conjugiert, die auch durch den Punkt P_1 und durch alle Eckpunkte des Haupttetraeders geht. Man kann sie als Erzeugnis dreier projectivischen Büschel von Polarebenen betrachten, von denen einer aus den Polarebenen aller Punkte der Geraden q in Bezug auf G_2 besteht. Alle diese Ebenen gehen durch die Gerade q' und diese Gerade ist folglich auch eine Sehne der Curve k_3'. Weil aber durch 5 Punkte (in diesem Falle A_1, A_2, A_3, A_4 und P_1) nur eine Curve 3ter Ordnung möglich ist, die eine beliebige Gerade zur Sehne hat,**) so sind die Curven k_3 und k_3' identisch.

---

*) Vergl.: Geiser „Zur Theorie der Flächen zweiten und dritten Grades" Cr. J. 69.

**) Dieser Satz folgt durch die Transf. (A) aus dem Satze: Durch einen beliebigen Punkt geht nur eine Sehne einer Raumcurve 3ter Ordnung. (Vergl. XIII., 2a und 2b).

Jedem auf P folgenden Punkte der Geraden q entspricht also durch die früher angegebene Construction derselbe Punkt, welcher mit ihm bezüglich des Bündels conjugiert ist, d. h. sein reciproker Pol.

Die Fläche G_2 enthält jene 8 Diagonalen h der ersten Configuration $(12_6, 16_3)$, welche die Gegenkanten des Viereckes $A_1A_2A_3A_4$ schneiden. Denn nimmt man auf einer von diesen 8 Diagonalen einen beliebigen Punkt an, so entspricht ihm als reciproker Pol ein Punkt derselben Diagonale (IV, 2) und eine von den durch diesen Punkt gezogenenen Transversalen, welche die Gegenkanten des Viereckes $A_1A_2A_3A_4$ schneiden, fällt mit jener Diagonale zusammen. Daraus aber folgt, dass die Polarebene jedes Punktes dieser Diagonale in Bezug auf G_2 durch diese Diagonale geht, d. h. diese Diagonale liegt auf G_2. Für jedes der drei Vierecke $A_1A_2A_3A_4$, $A_1A_2A_4A_3$ und $A_1A_3A_2A_4$ bekommt man eine solche Fläche G_2.

Ähnliche Betrachtungen könnte man für die polaren Gebilde aufstellen.

VI.

Die Gleichungen (A), (C) und (D) ermöglichen uns aus den Gleichungen geometrischer Örter der Pole bestimmter Axen die Gleichungen geometrischer Örter ihrer rec. Pole, resp. ihrer rec. Polarebenen und Polarebenen zu finden und zwar durch eine einfache Substitution.

Wir führen im Folgenden einige Beispiele dieser Substitutionen an, wobei wir die in II. eingeführte Bezeichnung festhalten.

Aus dem Satze:

„Der Ort der Pole aller Axen, die durch einen Punkt P' (x', y', z') gehen, ist eine Curve dritter Ordnung c_3, deren Gleichungen sind

$$(1)\qquad \begin{aligned}(A-B)\,xy + By'x - Ax'y &= 0,\\ (B-C)\,yz + Cz'y - By'z &= 0,\text{“}\end{aligned}$$

folgt durch die Substitution (A):

„Die reciproken Pole aller Axen, die durch einen Punkt P' (x', y', z') gehen, d. h. die Pole aller Axen einer Ebene, deren reciproker Pol der Punkt P_1 (x_1, y_1, z_1) ist, liegen auf der Geraden

$$(2)\qquad \begin{aligned}(A-B)\,x_1y_1 + Byx_1 - Axy_1 &= 0,\\ (B-C)\,y_1z_1 + Czy_1 - Byz_1 &= 0,\text{“}\end{aligned}$$

mit Hilfe der Subst. (D):

„Die Polarebenen aller Axen, die durch einen Punkt P' (x', y', z') gehen, umhüllen eine entwickelbare Fläche dritter Classe, welche die Symmetrieebenen XY und YZ der F_2 in den Curven zweiter Classe

$$(3) \qquad \begin{aligned} (A-B)\,\xi\eta + B\eta'\xi - A\xi'\eta &= 0, \\ (B-C)\,\eta\zeta + C\zeta'\eta - A\eta'\zeta &= 0 \end{aligned}$$

schneidet" und endlich durch (C):

„Die reciproken Polarebenen aller Axen, die durch einen Punkt P' (x', y', z') gehen, bilden einen Ebenenbüschel erster Classe, welcher die Symmetrieebenen XY und YZ in den Strahlenbüscheln erster Classe

$$(4) \qquad \begin{aligned} (A-B)\,\xi_1\eta_1 + B\eta\xi_1 - A\xi\eta_1 &= 0, \\ (B-C)\,\eta_1\zeta_1 + C\zeta\eta_1 - B\eta\zeta_1 &= 0 \end{aligned}$$

schneidet."

Jede Sehne u der Curve c_3 (1) gehört zum Axencomplexe, denn ihre Polare bezüglich der F_2 ist zu u normal. Die Curve c_3 und überhaupt jede Curve 3[ter] Ordnung, welche der Ort der Pole aller durch einen Punkt gehenden Axen ist, ist folglich Ordnungscurve des Axencomplexes.

Umgekehrt kann jede Ordnungscurve c_3 des Axencomplexes als geom. Ort der Pole aller Axen, die durch einen bestimmten Punkt dieser Curve gehen, betrachtet werden. Denkt man sich nämlich zwei beliebige Punkte U und V dieser Curve, von welchen keiner mit einem Hauptpunkte zusammenfällt, so schneiden sich die Axen, deren Pole U und V sind, in einem Punkte P, weil die Gerade UV zum Axencomplexe gehört. (Vergl. die Bemerkung zu IV.) Alle durch diesen Punkt gehenden Axen der F_2 bilden eine Kegelfläche zweiter Ordnung und die Pole dieser Axen liegen auf einer Ordnungscurve c_3' des Complexes, die auch durch den Punkt P geht. Weil aber diese Ordnungscurve mit c_3 sechs Punkte gemein hat (4 Hauptpunkte und die Punkte U und V), so fällt sie mit ihr zusammen. Fügt man noch hinzu, dass die Gl. (2) eine Axe der F_2 repräsentieren, so ist aus den Gleichungen (1) und (2) klar, dass jeder Ordnungscurve des Axencomplexes durch die Transf. (A) eine Axe entspricht und umgekehrt. Dem Pole P_1 (x_1, y_1, z_1) der Axe entspricht dabei der Punkt P' (x', y', z') der Ordnungscurve, durch welchen alle Axen, deren Pole auf jener Ordnungscurve liegen, gehen. Wir werden diesen Punkt „Pol der Ordnungscurve" nennen.

Projiciert man eine Ordnungscurve des Axencomplexes aus einem beliebigen ihrer Punkte (x'', y'', z''), so bekommt man in den Projectionsstrahlen alle durch diesen Punkt gehenden Axen. Ihre Pole liegen nach (1) auf der Curve

$$(A-B)\,xy + By''x - Ax''y = 0,$$
$$(B-C)\,yz + Cz''y - By''z = 0,$$

wobei x'', y'', z'' den Gleichungen

$$(A-B)\,x''y'' + By'x'' - Ax'y'' = 0,$$
$$(B-C)\,y''z'' + Cz'y'' - By'z'' = 0$$

genügen. Eliminiert man aus diesen Gleichungen die Coordinaten x'', y'', z'', so bekommt man die Gleichung

$$(5)\qquad \begin{aligned}(A-B)(B-C)(C-A) + A^2(B-C)\frac{x'}{x} + B^2(C-A)\frac{y'}{y} + \\ + C^2(A-B)\frac{z'}{z} = 0\end{aligned}$$

als Gleichung der Fläche, auf welcher die Pole aller Sehnen einer Ordnungscurve, deren Pol der Punkt (x', y', z') ist, liegen.

Daraus folgt der Satz:

„Die Pole aller Sehnen einer Ordnungscurve liegen auf einer Fläche dritter Ordnung (5), die die Hauptpunkte zu ihren Doppelpunkten hat“, und durch die Transformation (A):

„Die Pole aller Ordnungscurven, die eine Axe, deren Pol der Punkt x_1, y_1, z_1 ist, zur gemeinschaftlichen Sehne haben, liegen in der Ebene

$$(6)\qquad \begin{aligned}(A-B)(B-C)(C-A) + A^2(B-C)\frac{x}{x_1} + B^2(C-A)\frac{y}{y_1} + \\ + C^2(A-B)\frac{z}{z_1} = 0.\text{“}\end{aligned}$$

Weil z. B. die erste von den Gleichungen (1) von z_1 unabhängig ist, so gelten die Sätze:

„Die Pole aller Axen, die eine zur Z-Axe parallele Gerade schneiden, liegen auf der Cylinderfläche

$$(A-B)\,xy + By'x - Ax'y = 0$$

und ihre reciproken Pole, d. h. die Pole aller Axen, die eine in der XY Ebene liegende Gerade schneiden, liegen in der Ebene

$$(A-B)\,x_1 y_1 + B y x_1 - A x y_1 = 0."$$

Ähnliches gilt für die übrigen Symmetrieebenen und Symmetrieaxen der F_2.

Die Curve (1) wird aus dem Mittelpunkte der F_2 durch die Kegelfläche

$$A\,(B-C)\,x'yz + B\,(C-A)\,y'xz + C\,(A-B)\,x'xy = 0$$

projiciert. Weil diese Gleichung in Bezug auf x', y' und z' homogen ist, so folgt daraus:

„Die Pole aller Axen, die einen Durchmesser der F_2 schneiden liegen auf der Kegelfläche

$$A\,(B-C)\,x'yz + B\,(C-A)\,y'xz + C\,(A-B)\,x'yz = 0$$

und ihre reciproken Pole, d. h. die Pole aller Axen, die zu einer Ebene parallel sind, liegen in der Ebene

$$A\,(B-C)\,x y_1 z_1 + B\,(C-A)\,y z_1 x_1 + C\,(A-B)\,z x_1 y_1 = 0."$$

VII.

Die letzten Sätze in VI. sind nur specielle Fälle des Satzes:

„Die Pole aller Axen p, welche eine beliebige Gerade a schneiden, liegen auf einer durch a gehenden Regelfläche zweiter Ordnung A_2, deren Regelschaar, zu welcher a nicht gehört, aus lauter Axen besteht."

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt daraus, dass alle Axen, die in irgend einer durch a gelegten Ebene liegen, ihre Pole auf einer Axe haben. (Vergl. VI. oder die Bemerkung zu IV.) Es ist auch klar, dass diese Fläche durch alle Hauptpunkte gehen muss.

Die reciproken Pole der Axen p, d. h. die Pole aller Axen, welche die reciproke Polare a' der Geraden a schneiden, liegen ebenfalls auf einer Fläche zweiter Ordnung A_2', die der Fläche A_2 durch die Transformation (A) entspricht (III).

Fallen die beiden Geraden a und a' zusammen, — was nur dann eintreten kann, wenn die Gerade a auf F_2 liegt — so vereinigen sich auch die Flächen A_2 und A_2' und die Fläche A_2 entspricht in

diesem Falle durch die Transformation (A) sich selbst. Für jede Gerade von F_2 bekommt man eine solche Fläche A_2.

Aus den in IV. abgeleiteten Eigenschaften der Doppelaxen t folgt, dass jede von den sich selbst entsprechenden Flächen A_2, die man für die Geraden einer Schaar von F_2 bekommt, durch vier von den Punkten T geht.

Weil jede von diesen Flächen ausserdem alle Hauptpunkte enthält, so gilt der Satz:

Alle Flächen A_2, die zu den Geraden einer Schaar der F_2 gehören, liegen in einem Bündel, dessen Grundpunkte die vier Hauptpunkte und ausserdem diejenigen vier von den Punkten T sind, deren gegenseitige Lage in IV., 2. angegeben ist.

Für die Geraden der zweiten Schaar von F_2 gehen die Flächen A_2 durch die vier Hauptpunkte und durch die vier übrigen Punkte T.*)

Man kann die Fläche A_2 für eine beliebige Gerade a der F_2 folgendermassen construieren:

Sei M ein beliebiger Punkt der Geraden a. Durch diesen Punkt gehen zwei Axen der F_2, die sie in M berühren. Man bekommt sie, indem man die Winkel, welche die Gerade a mit der durch M gehenden Geraden der zweiten Schaar von F_2 bildet, halbiert. Verbindet man die Pole dieser zwei Axen, so bekommt man eine Gerade b, welche der Fläche A_2 angehört. Denn sie hat mit ihr drei Punkte gemein: jene zwei Pole und den Punkt $\dot{ab}$. Wiederholt man dieselbe Construction für alle Punkte der Geraden a, so bekommt man eine Regelschaar der Fläche A_2.

In der Ebene (ab), welche die Fläche A_2 im Punkte $\dot{ab}$ berührt, liegen alle Axen der F_2, welche ihre Pole auf der Geraden b haben, folglich auch die Normale der F_2 im Punkte $\dot{ab}$. Daraus ersieht man dass die Fläche A_2 die gegebene Fläche F_2 in allen Punkten der Geraden a rechtwinklig schneidet.

*) Es ist nicht schwer zu beweisen, dass jede durch die Transformation (A) sich selbst entsprechende Fläche zweiter Ordnung, welche keinen der Hauptpunkte zum Doppelpunkte hat, durch alle diese Hauptpunkte (III) und ausserdem durch vier von den Punkten T, deren gegenseitige Lage im IV., 2. angegeben ist, gehen muss. Und umgekehrt entspricht jede Fläche II. Ordnung, die diesen Bedingungen genügt, durch die Transf. (A) sich selbst. Alle sich selbst entsprechenden Flächen zweiter Ordnung, die keinen der Hauptpunkte zum Doppelpunkte haben, bilden folglich zwei Bündel.

Die Polare B_2 von A_2 in Bezug auf F_2 ist ein hyperbolisches Paraboloid, auf welchem die reciproken Polaren aller Geraden b, d. h. die Normalen der F_2 längs a liegen. Dieses Normalenparaboloid entspricht sich selbst durch die Transformation (B).

Aus der früher abgeleiteten Eigenschaft der Flächen A_2 folgt: Alle Normalenparaboloide einer Regelfläche II. Ordn. längs aller ihren Geraden einer Schaar liegen in einer Schaar-Schaar von Flächen zweiter Classe, deren Grundebenen die vier Hauptebenen und vier bestimmte von den acht Ebenen τ (IV., 1.) sind.

Die Flächen A_2 und B_2, die zu derselben Geraden a gehören, berühren sich längs dieser Geraden.*)

VIII.

1. Unter den durch die Transformation (A) sich selbst entsprechenden Flächen ist die Fläche F_4 besonders hervorzuheben, auf welcher die Pole aller Axen liegen, die die gegebene F_2 berühren.

Durch jeden Punkt der F_2 gehen zwei solche Axen, nämlich die Tangenten der beiden Hauptnormalschnitte der F_2 in diesem Punkte. Weil jede von diesen Tangenten reciproke Polare der anderen ist, so bilden sie ein Paar reciproker Axen und ihre Pole sind reciproke Pole. Die Fläche, auf welcher die Pole aller solchen Axen liegen, entspricht folglich durch die Transformation (A) sich selbst.

Wir beweisen nun, dass sie von der vierten Ordnung ist.

Zu diesem Zwecke denken wir uns eine beliebige Gerade a und alle Axen, die ihre Pole auf a haben. Diese Axen bilden die Regelschaar eines hyperb. Paraboloides, welches die Fläche F_2 in einer Curve vierter Ordnung c_4 schneidet, die die Gerade a zur Sehne hat. Aus dem letzten Umstande folgt, dass ausser den zwei Tangenten der c_4 in den zwei Punkten $\dot{a}c_4$ nur noch vier Tangenten jener Curve die Gerade a schneiden können und diese vier Tangenten sind die einzigen Axen der F_2, die diese Fläche berühren und deren Pole auf a liegen. Die Fläche F_4 kann somit von einer beliebigen Geraden höchstens in vier Punkten geschnitten werden, d. h. sie ist von der vierten Ordnung.

---

*) Einige von den in den Abschn. II., III., IV., VII. und namentlich in VI. mit Hilfe der reciproken Pole abgeleiteten Resultaten habe ich schon bei den in der Einleitung erwähnten Übungen mitgetheilt.

Im IV. Abschn. haben wir gesehen, dass der reciproke Pol jedes Punktes, der auf einer der Geraden g liegt, wieder derselben Geraden angehört und dass die zugehörigen reciproken Axen die F_2 in ihren Kreispunkten berühren. Daraus folgt, dass die 16 Geraden der ersten Configuration $(12_6, 16_3)$ auf der Fläche F_4 liegen und weiter, dass diese Fläche in allen 12 Punkten jener Configuration (nämlich in den 4 Hauptp. und 8 Punkten T) Doppelpunkte haben muss. Ausser diesen 12 Doppelpunkten hat sie keine anderen, weil in jedem Doppelpunkte wenigstens zwei die Fläche F_2 berührende Axen ihre Pole haben müssten, was nur in jenen 12 Punkten stattfindet (IV., 2.). Die Fläche F_4 ist demnach eine Fläche zwölfter Classe. Auf eine weitere Eigenschaft dieser Fläche werden wir später hinweisen. (Siehe XV., 2.)

Ihre Gleichung in Punktcoordinaten kann folgendermassen abgeleitet werden:

Aus der Symmetrie dieser Fläche in Bezug auf die Symmetrieebenen der F_2 folgt, dass ihre Gleichung die Form

$$a_{11}x^4 + a_{22}y^4 + a_{33}z^4 + 2\,a_{12}x^2y^2 + 2\,a_{23}y^2z^2 + 2\,a_{31}z^2x^2 + 2\,a_{14}x^2 + \\ + 2\,a_{24}y^2 + 2\,a_{34}z^2 + a_{44} = 0$$

haben muss.

Soll sie durch die Transformation (A) in sich selbst übergehen, so müssen

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0$$

sein, so dass jene Gleichung in

$$a_{12}x^2y^2 + a_{23}y^2z^2 + a_{31}z^2x^2 + a_{14}x^2 + a_{24}y^2 + a_{34}z^2 = 0$$

übergeht.

Durch die Subst. (A) bekommt man aus der letzten Gleichung

$$a_{34}\gamma^4x^2y^2 + a_{14}\alpha^4y^2z^2 + a_{24}\beta^4z^2x^2 + a_{23}\beta^4\gamma^4x^2 + a_{31}\gamma^4\alpha^4y^2 + \\ + a_{12}\alpha^4\beta^4z^2 = 0.$$

Soll diese Gleichung mit der vorhergehenden identisch sein, so müssen die Coeff. a_{ik} folgenden Gleichungen genügen:

$$a_{34} = \pm\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2}a_{12}, \quad a_{14} = \pm\frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^2}a_{23}, \quad a_{24} = \pm\frac{\gamma^2\alpha^2}{\beta^2}a_{31},$$

so dass die gesuchte Gleichung von der Form

$$a_{12}x^2y^2 + a_{23}y^2z^2 + a_{31}z^2x^2 \pm \frac{\beta^2\gamma^2}{\alpha^2} a_{23}x^2 \pm \frac{\gamma^2\alpha^2}{\beta^2} a_{31}y^2 \pm$$
$$\pm \frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2} a_{12}z^2 = 0$$

sein muss.

Endlich kann man die Gleichungen der Schnitte der Fläche F_4 mit den Symmetrieebenen der F_2 bestimmen.

Die Fläche F_4 wird nämlich z. B. von der Ebene $z = 0$ in einer Curve geschnitten, auf welcher die Pole aller Normalen der Curve zweiter Ordnung (zF_2) in Bezug auf diese Curve liegen. Weil die Gleichungen dieser und der zwei Curven (xF_4) und (yF_4)

$$(A-B)^2x^2y^2 - D(A^3y^2 + B^3x^2) = 0 \text{*)}$$
$$(B-C)^2y^2z^2 - D(B^3z^2 + C^3y^2) = 0 \text{ etc.}$$

sind, so ist die Gleichung der Fläche F_4

$$(A-B)^2C^3x^2y^2 + (B-C)^2A^3y^2z^2 + (C-A)^2B^3z^2x^2 - D(B^3C^3x^2 +$$
$$+ C^3A^3y^2 + A^3B^3z^2) = 0.\text{**)}$$

2. Für die Polare Φ_4 der Fläche F_4 in Bezug auf F_2, d. h. für die Fläche, die von allen Hauptnormalebenen der F_2 umhüllt wird, ergibt sich aus den angeführten Eigenschaften der Fläche F_4 Folgendes:

Die Fläche Φ_4 ist von der vierten Classe; sie enthält alle Geraden g' der zweiten Configuration $(12_6, 16_3)$

---

*) Die Gleichungen dieser Curven, z. B. der Curve (zF_4) lassen sich auf folgende Weise leicht ableiten: Die Coordinaten der Pole je zweier auf einander senkrechten Geraden, die in Bezug auf

(1) $$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = D$$

conjugiert sind, sind durch die Gleichungen

(2) $$x'x_1 = \frac{DA^2}{A-B}, \quad y'y_1 = \frac{DB^2}{B-A}$$

verbunden. Man bekommt folglich die Gleichung der Curve (zF_4), wenn man in der Gl. (1) x und y durch $\frac{DA^2}{(A-B)x}$ resp. $\frac{DA^2}{(A-B)y}$ ersetzt.

**) Bei der Ableitung der Gleichung von F_4 könnte man auch eine früher bewiesene Eigenschaft dieser Fläche benützen, dass nämlich diese Fläche alle 16 Geraden g enthält. Daraus folgt zunächst, dass auf den rechten Seiten der Gleichungen für a_{14}, a_{24} und a_{34} nur die oberen Vorzeichen zu nehmen sind und weiter, dass $a_{12}\alpha^2\beta^2 + a_{23}\beta^2\gamma^2 + a_{31}\gamma^2\alpha^2 = 0$ ist. Ein Coefficient a_{ik} bleibt dabei noch unbestimt.

und wird von jeder der 12 Ebenen dieser Configuration längs eines Kegelschnitts berührt. Sie entspricht sich selbst durch die Transformation (B), d. h. sie ist sich selbst conjugiert bezüglich der Schaar-Schaar von Flächen zweiter Classe, die durch 8 Ebenen τ bestimmt ist. Ihre Ordnungszahl ist 12.

Die Gleichung der Fläche Φ_4 in Ebenencoordinaten bekommt man aus der Gleichung der Fläche F_4 mit Hilfe der Subst. (D) in der Form

$$(A-B)^2CD\xi^2\eta^2+(B-C)^2AD\eta^2\zeta^2+(C-A)^2BD\zeta^2\xi^2-BC\xi^2-$$
$$-CA\eta^2-AB\zeta^2=0.^{*)}$$

Ihre Gleichung in Punktecoordinaten (die Gl. der Fläche der Hauptkrümmungscentra) kann unabhängig vom vorhergehenden mit Hilfe der reciproken Pole folgendermassen abgeleitet werden:

Denken wir uns einen beliebigen Punkt A auf F_2 und beide durch ihn gehenden Krümmungslinien k und k' der F_2. Die Normale n der F_2 im Punkte A wird von den Normalen, die in den zu A benachbarten Punkten der beiden Krümmungslinien zu F_2 construiert sind, in den zwei Hauptkrümmungsmittelpunkten H und H' des Punktes A geschnitten.

Betrachten wir nun zuerst nur die zu den einzelnen Punkten A, B, C . . . der Krümmungslinie k gehörigen Hauptkrümmungscentra H, I, K . . . und nebstdem die Tangenten t_a', t_b' . . . der zweiten Krümmungslinien in Punkten A, B . . . Jede von diesen Tangenten ist eine Axe der F_2 und ihre Pole — zugleich Pole der Hauptnormalebenen, die durch einzelne Tangenten t_a, t_b . . . der Krümmungslinie k gehen, — liegen auf einer Curve v. Die Tangenten s_a, s_b . . . dieser Curve sind als reciproke Polaren der Normalen n_a, n_b . . . der F_2 in den Punkten A, B . . . Axen der F_2 und ihre Pole A', B'. . . sind reciproke Pole der Punkte A, B . . .

Jede zwei auf einander folgenden Tangenten s_a, s_b . . . der Curve v liegen in der Polarebene des zugehörigen Hauptkrümmungsmittelpunktes H, I . . . und die Verbindungslinien h_1, i_1 . . . ihrer Pole A_1, B_1 . . . sind folglich reciproke Axen der Punkte H, I . . . oder, was dasselbe ist, die Punkte H, I . . . sind reciproke Pole der Geraden h_1, i_1 . . . Ähnliches gilt für die zweite durch A gehende Krümmungs-

*) Vergl.: Salmon-Fiedler „Anal. Geom. des Raumes“, I. Th.

linie k'. Erwägt man nun, dass die Punkte A_1, B_1 . . . auf einer Curve liegen, die der Krümmungslinie k durch die Transformation (A) entspricht und folglich auf einer Fläche sechster Ordnung liegt, die aus F_2 durch jene Transformation entsteht, so ist folgende Construction der Hauptkrümmungscentra H und H' im Punkte A begründet: Man construiert die Berührungsebene der Fläche sechster Ordnung F_6, welche der Fläche F_2 durch die Transformation (A) entspricht, im Punkte A_1, der zu A conjugiert ist, und in dieser Ebene die beiden durch A gehenden Axen h_1 und h_1' der F_2. Ihre reciproken Pole sind dann die verlangten Hauptkrümmungsmittelpunkte H und H'.*)

Die Gleichung der Fläche F_6 ist

$$(1)\qquad \frac{\alpha^4}{Ax^2}+\frac{\beta^4}{By^2}+\frac{\gamma^4}{Cz^2}=D$$

und die Gleichung ihrer Berührungsebene im Punkte $A_1(x_1, y_1, z_1)$

$$(2)\qquad \frac{\alpha^4}{Ax_1^3}x+\frac{\beta^4}{By_1^3}y+\frac{\gamma^4}{Cz_1^3}z=D.$$

Diese Gleichung und

$$(3)\qquad \frac{\alpha^4}{(A+\varrho)x_1^3}x+\frac{\beta^4}{(B+\varrho)y_1^3}y+\frac{\gamma^4}{(C+\varrho)z_1^3}=D$$

(siehe die Gleichungen (2) in I) repräsentieren alle Axen der Ebene (2). Für die zwei durch den Punkt A_1 gehenden Axen h_1 und h_1' treten zu den Gleichungen (2) und (3) noch die Bedingungsgleichungen

$$(4)\qquad \frac{\alpha^4}{Ax_1^2}+\frac{\beta^4}{By_1^2}+\frac{\gamma^4}{Cz_1^2}=D,$$

$$(5)\qquad \frac{\alpha^4}{(A+\varrho)x_1^2}+\frac{\beta^4}{(B+\varrho)y_1^2}+\frac{\gamma^4}{(C+\varrho)z_1^2}=D \text{ hinzu.}$$

Die Coordinaten der reciproken Pole der Axen h_1 und h_1' sind ann nach I.

---

* Dasselbe Resultat folgt einfacher aus der Bemerkung, dass die Ordnungscurven des Axencomplexes, deren Pole in den Punkten H und H' sind, die Fläche F_2 im Punkte A berühren.

$$(6)\qquad X = \frac{\alpha^4 A}{(A+\varrho)x_1^3}, \quad Y = \frac{\beta^4 B}{(B+\varrho)y_1^3}, \quad Z = \frac{\gamma^4 C}{(C+\varrho)z_1^3},$$

worin für ϱ die zwei aus (4) und (5) bestimmten Werte zu setzen sind. Durch Elimination von x_1, y_1, z_1 und ϱ aus den Gleichungen (4), (5) und (6) bekommt man die Gleichung der Fläche der Hauptkrümmungscentra.

Wir deuten nur noch kurz an, wie diese Gleichungen vereinfacht werden können.

Führt man in die Gleichungen (4), (5) und (6) statt der Coordinaten des Punktes A_1 die Coordinaten x', y' und z' des Punktes A ein, so nehmen diese Gleichungen die Form

$$(a)\qquad \frac{x'^2}{A} + \frac{y'^2}{B} + \frac{z'^2}{C} = D,$$

$$(b)\qquad \frac{x'^2}{A+\varrho} + \frac{y'^2}{B+\varrho} + \frac{z'^2}{C+\varrho} = D,$$

$$(c)\qquad X = \frac{\alpha A'^3}{(A+\varrho)\alpha^2}, \quad Y = \frac{By'^3}{(B+\varrho)\beta^2}, \quad Z = \frac{Cz'^3}{(C+\varrho)\gamma^2} \text{ an.}$$

Aus (a) und (b) bekommt man durch Subtraction die Gleichung

$$(d)\qquad \frac{x'^2}{A(A+\varrho)} + \frac{y'^2}{B(B+\varrho)} + \frac{z'^2}{C(C+\varrho)} = 0 \text{ oder}$$

$$ABCD\varrho^2 + [BC(B+C)x'^2 + CA(C+A)y'^2 + AB(A+B)z'^2]\varrho + \\ + B^2C^2x'^2 + C^2A^2y'^2 + A^2B^2z'^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich zwei Werte ϱ_1 und ϱ_2 für ϱ, welche in (c) eingesetzt die Coordinaten X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 der beiden Hauptkrümmungscentra H und H' liefern.

Es ist

$$X_1 = \frac{Ax'^3}{(A+\varrho_1)\alpha^2}, \quad Y_1 = \frac{By'^3}{(B+\varrho_1)\beta^2}, \quad Z_1 = \frac{Cz'^3}{(C+\varrho_1)\gamma^2}$$

$$X_2 = \frac{Ax'^3}{(A+\varrho_2)\alpha^2} \text{ etc.}$$

Aus der Gleichung (d) folgt aber, dass

$$(A + \varrho_1)(A + \varrho_2) = \frac{A^2 x'^2}{\alpha^2}, \text{ folglich ist}$$

$$X_1 = \frac{(A + \varrho_2)x'}{A} \text{ etc. und } X_2 = \frac{(A + \varrho_1)x'}{A} \text{ etc.,}$$

also allgemein

$$(e) \quad X = \frac{(A + \varrho)x'}{A}, \quad Y = \frac{(B + \varrho)y'}{B}, \quad Z = \frac{(C + \varrho)z'}{C}.$$

Eliminiert man nun aus den Gleichungen (a), (d) und (e) die Grössen x', y', z' und ϱ, so bekommt man die gesuchte Gleichung.*)

Beiläufig ergeben sich noch die Beziehungen

$$X_1 X_2 = \frac{x'^4}{\alpha^2}, \quad Y_1 Y_2 = \frac{y'^4}{\beta^2}, \quad Z_1 Z_2 = \frac{z'^4}{\gamma^2}.$$

IX.

Aus den Gleichungen (e) in VIII. geht die bekannte Eigenschaft hervor, dass der Hauptkrümmungsmittelpunkt H, der dem Werte ϱ_1 entspricht, Pol der Berührungsebene der F_2 im Punkte A in Bezug auf die mit F_2 confocale Fläche F_2'

$$\frac{x^2}{A + \varrho_1} + \frac{y^2}{B + \varrho_1} + \frac{z^2}{C + \varrho_1} = D \text{ ist.}$$

Sowohl diese Eigenschaft, als auch die Sätze von Lamé und Bertrand über die gegenseitige Abhängigkeit der Hauptkrümmungsradien dreier confocalen Flächen in ihrem gemeinschaftlichen Punkte, kann man folgendermassen synthetisch beweisen.

Denken wir uns alle drei durch den Punkt A gehenden confocalen Flächen F_2, F_2' und F_2'' und ihre Normalen n, n' und n'' in diesem Punkte. Je zwei von ihnen sind Tangenten der Krümmungslinien einer von den drei Flächen im Punkte A. Construieren wir weiter die sechs Normalen jener drei Flächen in den drei zum Punkte A benachbarten Punkten der drei Krümmungslinien, so wird jede der Normalen n, n' und n'' von zweien jener sechs Normalen geschnitten in den Hauptkrümmungsmittelpunkten H_1 und H_2, resp. H_2' und H', H'' und H_1'' der Flächen F_2, F_2' und F_2'' im Punkte A.

*) Vergl.: Salmon-Fiedler „Anal. Geom. des Raumes“ I. Theil.

In jeder der Ebenen nn', $n'n''$ und $n''n$ bekommt man auf diese Weise vier Normalen, die zum gemeinschaftlichen Axencomplexe der Flächen F_2, F_2' und F_2'' gehören*) und in jeder von diesen Ebenen eine Parabel bestimmen, deren alle Tangenten zum Axencomplexe gehören.

Die in nn' liegende Parabel berührt n u. n' in den Punkten H_2 resp. H'_2,
„ „ $n'n''$ „ „ „ n' „ n'' „ „ „ H' „ H'',
„ „ $n''n$ „ „ „ n'' „ n „ „ „ H_1'' „ H_1.

Betrachten wir nun z. B. nur die Ebene nn'. Alle in ihr liegenden Axen, d. h. die Tangenten der früher angeführten Parabel, haben ihre Pole in Bezug auf F_2' in der Axe n und diese Axe wird von jener Parabel in ihrem Pole bezüglich F_2' berührt.**) Weil aber nach dem vorangehenden diese Berührung im Punkte H_2 stattfindet, so ist dieser Punkt Pol der Axe n also auch der Ebene $n'n''$ bezüglich der Fläche F_2.

Ähnlich beweist man, dass der Punkt H_1 Pol der Ebene $n'n''$ in Bezug auf F_2'' ist etc.

Die Geraden H_1H', $H_2'H_1''$ und $H''H_2$ sind reciproke Polaren der Geraden n'', resp. n und n' in Bezug auf die Flächen F_2'', resp. F_2 und F_2'. Aus diesem Grunde gehören auch sie zum Axencomplexe und jede von ihnen berührt eine der drei in nn', resp. $n'n''$ und $n''n$ liegenden Parabeln.

Daraus folgen die Relationen:

a) Für die in nn'' liegende Parabel

$$\frac{AH_2}{AH_1} = \frac{H''H_1''}{AH_1''}$$

oder, wenn man die Hauptkrümmungsradien mit R_1, R_2, R_2', R', R'' und R_1'' bezeichnet,

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_1''-R''}{R_1''} \quad \text{oder} \quad \frac{R_2}{R_1} + \frac{R''}{R_1''} = 1,$$

b) für die in $n'n''$ liegende Parabel

*) Die confocalen Flächen haben einen gemeinschaftlichen Axencomplex (siehe die 1. Gl. in I); jede Axe hat für alle diese Flächen denselben Fusspunkt, aber verschiedene Pole. Vergl. Reye: „Geometrie der Lage“ II. Abth., 23. Vortrag.

**) Vergl. die Bemerkung zu IV., Seite 11.

$$\frac{AH_2'}{AH'} = \frac{H''H_1''}{H''A} \quad \text{oder} \quad \frac{R_2'}{R'} = -\frac{R_1''-R''}{R''}.$$

Die letzte Gleichung in (a) mit den zwei entsprechenden Gleichungen für die Ebenen $n''n$ und nn' enthält den Satz von Bertrand. Eliminiert man aus der vorletzten Gleichung (a) und der letzten Gleichung (b) die Differenz $(R_1''-R'')$, so bekommt man die zuerst von Lamé aufgestellte Gleichung

$$\frac{R_1\,R_2'\,R''}{R_2\,R'\,R_2''} = -1.\text{*)}$$

X.

Die Coordinaten des Mittelpunktes einer Kugel E_2, welche die Verbindungslinie zweier beliebigen rec. Pole $P\,(x', y', z')$ und $P_1\left(\frac{\alpha^2}{x'}, \frac{\beta^2}{y'}, \frac{\gamma^2}{z'}\right)$ zu ihrem Durchmesser hat, sind

$$\frac{1}{2}\left(x' + \frac{\alpha^2}{x'}\right),\quad \frac{1}{2}\left(y' + \frac{\beta^2}{y'}\right),\quad \frac{1}{2}\left(z' + \frac{\gamma^2}{z'}\right)$$

und das Quadrat ihres Radius ist durch

$$\frac{1}{4}\left[\left(x' + \frac{\alpha^2}{x'}\right)^2 + \left(y' + \frac{\beta^2}{y'}\right)^2 + \left(z' + \frac{\gamma^2}{z'}\right)^2 - 4\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\right]$$

ausgedrückt.

Daraus folgt, dass die Potenz dieser Kugel im Mittelpunkte der F_2 gleich

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \quad \text{ist.}$$

Alle Kugeln E_2 liegen folglich in einem linearen Complexe Γ, dessen beliebige Kugel die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\,lx - 2\,my - 2\,nz + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \text{ hat.}$$

Auf jeder Kugel E_2 befinden sich ausser den reciproken Polen P und P_1 noch drei Paare reciproker Pole, deren Verbindungslinien

*) Vergl.: Salmon-Fiedler a. a. O.

durch den Mittelpunkt von E_2 gehen, nämlich die drei übrigen Paare von gegenüberliegenden Eckpunkten des Parallelopipedes, dessen zwei gegenüberliegende Eckpunkte P und P_1 sind und dessen Seiten zu den drei Symmetrieebenen der F_2 parallel laufen.

Umgekehrt ist leicht einzusehen, dass auf jeder Kugel des Complexes Γ vier Paare reciproker Pole liegen, deren Verbindungslinien durch den Mittelpunkt jener Kugel gehen, denn es lassen sich immer vier und nur vier Paare von Punkten bestimmen, deren Coordinaten den Gleichungen

$$\frac{1}{2}\left(x' + \frac{\alpha^2}{x'}\right) = l, \quad \frac{1}{2}\left(y' + \frac{\beta^2}{y'}\right) = m \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\left(z' + \frac{\gamma^2}{z'}\right) = n$$

genügen. Daraus schliessen wir:

Alle Kugeln, welche die Verbindungslinien je zweier reciproken Pole zu ihren Durchmessern haben, bilden einen linearen Kugelncomplex von der Potenz $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt von F_2 ist.“

Erwägt man, dass jede von diesen Kugeln dem durch die beiden zugehörigen reciproken Pole und die Fusspunkte ihrer Axen gebildeten Poltetraeder von F_2 umschrieben ist, so ist der Zusammenhang des eben bewiesenen Satzes mit dem Faure'schen Satze, nach welchem alle den Poltetraedern von F_2 umschriebenen Kugeln im Mittelpunkte der F_2 gleiche Potenz haben, klar.

XI.

Es erübrigt uns noch, die Beziehungen zwischen den Coordinaten reciproker Pole resp. reciproker Polarebenen bei den nichtcentrischen Flächen zweiten Grades zu untersuchen.

Schreibt man die Gleichung einer solchen Fläche in der Form

$$2x + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0,$$

so sind die Gleichungen einer beliebigen Axe dieser Fläche

$$x + m + \frac{ny}{B} + \frac{pz}{C} = 0,$$

$$x + m - \varrho + \frac{ny}{B+\varrho} + \frac{pz}{C+\varrho} = 0$$

und die Coordinaten ihres Poles

$$x' = B + C - m + \varrho, \quad y' = \frac{B^2 (B+\varrho)}{n (C-B)}, \quad z' = \frac{C^2 (C+\varrho)}{p (B-C)}.$$

Die Gleichungen (A) nehmen die Form

$$x' + x_1 = B + C, \quad yy_1 = \frac{B^3}{C-B}, \quad z'z_1 = \frac{C^3}{B-C}$$

und die Gleichungen (B) die Form

$$\frac{1}{\xi'} + \frac{1}{\xi_1} = -(B+C), \frac{\eta'\eta_1}{\xi'\xi_1} = \frac{B}{C-B}, \quad \frac{\zeta'\zeta_1}{\xi'\xi_1} = \frac{C}{B-C}$$

an.

Aus diesen Gleichungen folgt, dass je zwei reciproke Pole conjugiert sind in Bezug auf alle Flächen des Bündels

$$\lambda (2x - B - C) + \mu \left(y^2 - \frac{B^2}{C-B}\right) + \gamma \left(z^2 - \frac{C^3}{B-C}\right) = 0$$

und dass je zwei reciproke Polarebenen conjugiert sind bezüglich aller Flächen der Schaar-Schaar

$$\lambda \left(\frac{2}{\xi} + B + C\right) + \mu \left(\frac{\eta^2}{\xi^2} - \frac{B}{C-B}\right) + \nu \left(\frac{\zeta^2}{\xi^2} - \frac{C}{B-C}\right) = 0 \text{ oder}$$

$$\lambda\xi \left[2 + (B+C)\xi\right] + \mu \left(\eta^2 - \frac{B}{C-B}\xi^2\right) + \nu \left(\zeta^2 - \frac{C}{B-C}\xi^2\right) = 0.$$

Für das elliptische Paraboloid sind von den Ebenen σ ausser der unendlich fernen Ebene noch 3 reell, nämlich die Ebene

$$x = \frac{B+C}{2}$$

und entweder das Paar von Ebenen

$$y^2 = \frac{B^3}{C-B} \text{ oder } z^2 = \frac{C^3}{B-C},$$

je nachdem $C > B$ oder $C < B$ ist.

Daraus folgt weiter, dass in diesem Falle vier von den Geraden g reell sind, aber nur zwei von ihnen liegen in endlicher Entfernung. Die Punkte T sind imaginär.

Für das hyp. Paraboloid ist von den Ebenen σ neben der unendlich fernen Ebene nur die Ebene

$$x = \frac{B + C}{2}$$

reell und von den Geraden g keine.

Der in X. beschriebene lineare Kugelncomplex geht in einen symmetrischen über und zwar ist die Ebene

$$x = \frac{B + C}{2}$$

seine Symmetrieebene.

XII.

1. Wir gehen jetzt daran, den Begriff reciproker Pole und Polarebenen auch beim allgemeinen tetraedralen Complexe einzuführen.

Es seien F_2 und F_2' zwei beliebige Flächen zweiten Grades und p ein Strahl des tetraedralen Complexes, der mit Hilfe dieser Flächen erzeugt wird.*) Die reciproken Polaren p_1 und p_1' des Complexstrahles p in Bezug auf F_2 resp. F_2', — die auch Complexstrahlen sind, — schneiden sich in einem Punkte P_1. Sei ferner p' die reciproke Polare des Complexstrahles p_1 bezüglich der Fläche F_2'. Die Complexstrahlen p und p' müssen sich dann als reciproke Polaren des Complexstrahles p_1 in Bezug auf F_2 resp. F_2' in einem Punkte schneiden, den wir mit P bezeichnen wollen.

Die Punkte P und P_1 werden wir im folgenden „Pole der Complexstrahlen p resp. p_1 bezüglich F_2" nennen und diese beiden Strahlen als „reciproke Complexstrahlen" und ihre Pole als „reciproke Pole in Bezug auf F_2" bezeichnen. Später werden wir zeigen, dass sie im speciellen Falle in die reciproken Axen und Pole der F_2 übergehen.

---

*) Vergl.: Reye „Geom. der Lage" II. Abth., 19. Vortrag in der zweiten Aufl. und für die weiteren Entwickelungen: Sturm „Über die reciproke und mit ihr zusammenhängende Verwandschaften." Math. Annalen, XIX. B.

Ehe wir weiter gehen, sei darauf hingewiesen, dass die Polarebenen π und π' des Punktes P bezüglich F_2 resp. F_2' durch p_1 gehen und ähnlich gehen die Polarebenen π_1 und π_1' des Punktes P_1 bezüglich F_2 resp. F_2' durch p und weiter, dass die Punkte P und P_1 in Bezug auf beide Flächen F_2 und F_2' conjugiert sind. — Bewegt sich der Punkt P auf einer beliebigen Geraden r, die kein Complexstrahl ist, so dass er nacheinander in die Lagen $B, C \dots$ kommt, so drehen sich seine Polarebenen π und π' um die reciproken Polaren r_1 und r_1' der Geraden r bezüglich F_2 resp. F_2' und die Durchschnittslinien entsprechender Ebenen π und π' bilden eine aus Complexstrahlen bestehende Regelschaar $b_1, c_1 \dots$, deren sämmtliche Strahlen von r_1 und r_1' geschnitten werden. Die Polare $b, c \dots$ dieser Regelschaar in Bezug auf F_2 ist wieder eine Regelschaar, die aus Complexstrahlen besteht, deren Pole die Punkte $B, C \dots$ sind.

Die reciproken Polaren $b_1', c_1' \dots$ der Geraden $b, c \dots$ bezüglich F_2' bilden eine Regelschaar, deren Strahlen die Gerade r_1' schneiden. Je zwei Complexstrahlen b_1 und b_1', c_1 und c_1' etc. schneiden sich — als reciproke Polaren der Complexstrahlen $b, c \dots$ — in den Punkten $B_1, C_1 \dots$, welche reciproke Pole von $B, C \dots$ oder Pole von $b_1, c_1 \dots$ in Bezug auf F_2 sind. Weil aber alle Strahlen der Regelschaaren $b_1, c_1 \dots$ und $b_1', c_1' \dots$ von der Geraden r_1' geschnitten werden, so liegen die Punkte $B_1, C_1 \dots$ auf einer Curve dritter Ordnung c_3, welche die Gerade r_1' zur Sehne hat.

Bewegt sich also ein Punkt auf einer beliebigen Geraden, so beschreibt sein reciproker Pol in Bezug auf F_2 eine Curve dritter Ordnung. Diese Curve geht durch alle Eckpunkte des gemeinschaftlichen Poltetraeders $A_1A_2A_3A_4$ von F_2 und F_2' (des Haupttetraeders des Complexes), weil jedem Schnittpunkte der Geraden r mit einer Seite dieses Tetraeders sein gegenüberliegender Eckpunkt als reciproker Pol entspricht.

Es lässt sich nun beweisen, dass die Punkte P und P_1, B und B_1, C und C_1 bezüglich aller Flächen eines Bündels conjugiert sind, zu welchem auch die Flächen F_2 und F_2' gehören.

Zu diesem Zwecke denken wir uns eine Fläche F_2'', welche mit den Flächen F_2 und F_2' das gemeinschaftliche Poltetraeder $A_1A_2A_3A_4$ hat und bezüglich welcher die Punkte P und P_1 conjugiert sind. Bewegt sich dann der Punkt P auf derselben Geraden r wie früher, so beschreibt der mit ihm bezüglich der drei Flächen F_2, F_2', F_2'' conjugierte Punkt P_1 eine Curve dritter Ordnung c_3', die dem Haupttetraeder $A_1A_2A_3A_4$ umschrieben ist und die Gerade r_1' zur Sehne

hat. Daraus folgt aber, dass sie mit der Curve c_3 identisch ist. Alle auf P und P_1 folgende Punkte der Geraden r resp. der Curve c_3, demnach auch — weil die Gerade r eine beliebige durch P gehende Gerade ist — je zwei reciproke Pole, sind conjugiert in Bezug auf alle Flächen des Bündels, welcher durch die drei Flächen F_2, F_2' und F_2'' bestimmt ist. Alle diese Flächen haben das Haupttetraeder des Complexes zu ihrem gemeinschaftlichen Poltetraeder.

Die Polarebenen π und π_1 der Punkte P und P_1 bezüglich der Fläche F_2 sind conjugiert in Bezug auf alle Flächen $\Phi_2 \equiv F_2$, Φ_2', Φ_2'' etc. der Schaar-Schaar von Flächen zweiter Classe, welche aus den Polaren der Flächen jenes Bündels in Bezug auf F_2 besteht. Jedes Paar solcher Ebenen werden wir als „reciproke Polarebenen bezüglich Φ_2“ bezeichnen.

Die Gerade p_1 der Ebene π ist conjugiert zur Ebene π_1 bezüglich der Flächen Φ_2 und Φ_2' und ähnlich ist die Gerade p der Ebene π_1 conjugiert zur Ebene π in Bezug auf beide diese Flächen.

Nimmt man als die Fläche Φ_2' den unendlich fernen imaginären Kugelkreis an, so ist $\pi \perp \pi'$, $p \perp \pi$, $p_1 \perp \pi_1$ und der allgemeine tetraedrale Complex geht in den Axencomplex der F_2 über.

2. Ist die Gerade r ein Complexstrahl, so schneiden sich ihre reciproken Polaren r_1 und r_1' im reciproken Pole R_1 von r, die Regelschaar b_1, $c_1 \ldots$ geht in den Complexkegel vom Mittelpunkte R_1 über und die Curve c_3 ist eine Ordnungscurve des Complexes. Es ist folglich zu jedem Complexstrahle bezüglich aller Flächen des Bündels $F_2 F_2' F_2''$ eine Ordnungscurve des Complexes conjugiert.

Umgekehrt kann man auf dieselbe Weise wie in VI. beweisen, dass jede Ordnungscurve des Complexes als Ortscurve der Pole aller Complexstrahlen angesehen werden kann, die durch einen bestimmten Punkt R_1 dieser Ordnungscurve gehen. Diesen Punkt werden wir auch hier Pol der Ordnungscurve nennen (VI.).

Jeder durch diesen Pol R_1 gehende Complexstrahl schneidet die Ordnungscurve c_3 ausser in diesem Pole noch in einem im Allgemeinen von R_1 verschiedenen Punkte, nämlich im Pole dieses Complexstrahles; nur für einen von diesen Complexstrahlen r_1, der in R_1 seinen Pol hat, fallen diese beiden Durchschnittspunkte zusammen, d. h. die Gerade r_1 ist Tangente der Ordnungscurve c_3 im Punkte r_1.

3. Aus 1. und 2. ersieht man, dass alle Complexstrahlen b, $c \ldots$, die ihre Pole auf einem beliebigen Complexstrahle r haben, eine Curve zweiter Classe c_2 umhüllen, die in der reciproken Polar-

ebene ϱ_1 von r liegt und die Seiten des Haupttetraeders berührt. Weil die Ebene ϱ_1 im voraus als eine beliebige Ebene des Raumes angenommen werden konnte, so ist klar, dass der letzte Satz umkehrbar ist, d. h. dass alle in einer Ebene ϱ_1 liegenden Complexstrahlen (die wie bekannt, eine Curve zweiter Classe c_2 umhüllen), ihre Pole auf dem reciproken Complexstrahle r dieser Ebene haben.

Durch jeden Punkt P von r gehen zwei Tangenten der Curve c_2, nämlich die Gerade r und der Complexstrahl, der in P seinen Pol hat. Diese zwei Tangenten sind im Allgemeinen von einander verschieden, nur für den Punkt, in welchem die Gerade r die Curve c_2 berührt, fallen beide zusammen, d. h. die Curve c_2 berührt den Complexstrahl r in seinem Pole R.

4. Denkt man sich nun eine beliebige Ordnungscurve c_3, so bilden alle Complexstrahlen, die ihre Pole auf ihr haben, einen Complexkegel, dessen Mittelpunkt der Pol R_1 von c_3 ist (2). Die reciproken Polaren aller dieser Complexstrahlen liegen in einer Ebene, — in der Polarebene ϱ_1 des Punktes R_1 — und die Pole dieser Complexstrahlen, d. h. die reciproken Pole der auf c_3 liegenden Punkte, sind auf dem reciproken Complexstrahle der Ebene ϱ_1 (3).

Es ist demnach jeder Ordnungscurve des tetraedralen Complexes bezüglich des Bündels $F_2 F_2' F_2''$ ein Complexstrahl conjugiert.

Fasst man dieses Resultat mit dem in 2. angeführten zusammen, so hat man die Sätze:

Die Complexstrahlen und Ordnungscurven eines tetraedralen Complexes gehen durch eine specielle cubische Transformation in einander über, nämlich: Zu jedem Complexstrahle und zu jeder Ordnungscurve des tetraedralen Complexes ist bezüglich eines bestimmten Bündels von Flächen zweiter Ordnung, die das Haupttetraeder des Complexes zu ihrem gemeinschaftlichen Poltetraeder haben, eine Ordnungs-

Die Complex-Ebenenbüschel und die Ordnungs-Ebenenbüschel eines tetraedralen Complexes gehen durch eine specielle cubische Transformation in einander über, nämlich: Zu jedem Complex- oder Ordnungs-Ebenenbüschel des tetraedralen Complexes ist bezüglich einer bestimmten Schaar-Schaar von Flächen zweiter Classe, die das Haupttetraeder des Complexes zu ihrem gemeinschaftlichen Poltetra-

curve resp. ein Complexstrahl conjugiert.

eder haben, ein Ordnungs- resp. ein Complex-Ebenenbüschel conjugiert.

Dabei versteht man (rechts) unter einem Complex-Ebenenbüschel einen Büschel erster Classe, dessen Axe ein Complexstrahl ist.

Die links angeführte Transformation werden wir wieder mit (A), die rechts angeführte mit (B) bezeichnen.

5. Aus 1. folgt, dass die Complexstrahlen, deren Pole auf einer c_3 liegen, die dem Haupttetraeder umschrieben, aber keine Ordnungscurve ist, eine Regelschaar bilden, die durch alle Hauptpunkte geht und dass alle Axen, deren Pole auf einer Geraden liegen, die kein Complexstrahl ist, eine Regelschaar bilden, die alle Seiten des Haupttetraeders berührt. Beide diese Sätze entsprechen einander durch die Transformation (A).

6. Wir beweisen nun, dass die Pole aller Sehnen und Tangenten einer Ordnungscurve c_3 auf einer Fläche dritter Ordnung F_3 liegen (VI.).

Denkt man sich nämlich einen beliebigen Complexstrahl r, so bilden alle Complexstrahlen, die ihre Pole auf r haben, die Tangentenschaar einer in der reciproken Polarebene ϱ_1 von r liegenden Curve zweiter Classe (3). In der Ebene ϱ_1 liegen höchstens drei Sehnen der Curve c_3 und nur diese Sehnen von c_3 haben ihre Pole auf r. Die Fläche, auf welcher die Pole aller Sehnen von c_3 liegen, kann demnach von einem beliebigen Complexstrahle r höchstens in drei Punkten geschnitten werden, d. h., sie ist von der dritten Ordnung.

Diese Fläche enthält auch die Curve c_3, weil auf dieser Curve jene Sehnen von c_3 ihre Pole haben, welche durch den Pol R_1 von c_3 gehen. Sie hat ferner die Hauptpunkte zu ihren Doppelpunkten, weil die Pole aller durch einen Hauptpunkt gehenden Sehnen von c_3 sich in diesem Hauptpunkt vereinigen.

Es gelten folglich die Sätze:

Die Pole aller Sehnen einer Ordnungscurve c_3 liegen auf einer Fläche dritter Ordnung, die auch die Curve c_3 enthält und in den Hauptpunkten Doppelpunkte hat.

Die Pole aller Axen eines Ordnungs-Ebenenbüschels liegen in einer Ebene.*)

*) Vergl. Reye „Geom. der Lage“ II. Abth. S. 146.

7. Ist c_3 eine Ordnungscurve, deren Pol der Punkt R_1 ist und γ_3 der ihr als Polare in Bezug auf F_2 entsprechende Ordnungs-Ebenenbüschel, so ist leicht einzusehen, dass die Ebene ϱ_1, in welcher die Pole aller Axen von γ_3 liegen, die Polarebene des Punktes R_1 ist. Man kann nämlich die Fläche F_3, auf welcher die Pole aller Sehnen von c_3 liegen, als Ort der Polcurven aller Complexkegel auffassen, deren Mittelpunkte auf c_3 sind, oder, was dasselbe ist, als Ort aller Ordnungscurven des Complexes, die auf c_3 ihre Pole haben. Die Ebene ϱ_1 enthält folglich alle Complexstrahlen, welche ihre Pole auf dem der Curve c_3 durch die Transformation (A) entsprechenden Complexstrahle r haben und alle diese Complexstrahlen liegen in der Polarebene des Punktes R_1 (3).

Die Ebene ϱ_1 schneidet die Fläche F_3 in einer Curve dritter Ordnung s_3, die sich durch die Transformation (A) selbst entspricht. Jeder Complexstrahl s, der auf s_3 seinen Pol hat, ist eine Sehne der c_3 von der besonderen Eigenschaft, dass sein reciproker Complexstrahl wieder Sehne von c_3 ist, welche ihren Pol auf s_3 hat. Durch jeden Punkt P von c_3 gehen drei solche Sehnen s, nämlich die Verbindungslinien des Punktes P mit den Punkten, in welchen die Polcurve des Complexkegels vom Mittelpunkte P die Ebene ϱ_1 schneidet. Die Verbindungslinien des Punktes R_1 mit den drei Punkten, in welchen die Ordnungscurve c_3, deren Pol der Punkt R_1 ist, die Ebene ϱ_1 schneidet, gehören demnach auch zu den Complexstrahlen s. Die reciproken Complexstrahlen dieser drei letzten Strahlen müssen einerseits in der Ebene ϱ_1 liegen, anderseits müssen sie Sehnen von c_3 sein, d. h. die Polarebene ϱ_1 des Poles R_1 einer Ordnungscurve in Bezug auf F_2 schneidet diese Curve in drei Punkten, die mit R_1 ein Poltetraeder der F_2 bilden.

Wir werden später zeigen, dass die vier Punkte, in welchen zwei beliebige reciproke Complexstrahlen s die zugehörige Ordnungscurve c_3 schneiden, immer Eckpunkte eines Poltetraeders von F_2 sind (XIV.).

8. Wir weisen noch darauf hin, dass sich alle in IV., V. und VI. bewiesenen Eigenschaften des Axencomplexes unmittelbar auf den allgemeinen tetraedralen Complex übertragen lassen. Namentlich gelangt man auf dieselbe Weise wie in IV. zu den beiden hexaedralen Configurationen, welche auch in diesem Falle ihre Bedeutung für die beiden Transformationen (A) und (B) behalten.

Die Punkte T, folglich auch die Ebenen τ und die Doppelcomplexstrahlen t können jedoch in diesem allgemeinen Falle alle reell sein. (Vergl. XV., 1.)

XIII.

Auf Grund der in XII., 4. bewiesenen kubischen Verwandtschaft zwischen Complexstrahlen und Ordnungscurven des tetraedralen Complexes lassen sich die Sätze über Complexstrahlen und Ordnungscurven paarweise so ordnen, dass jedem Satze eines Paares der andere Satz durch die Transformation (A) entspricht. Z. B.:

1. *a*) Jede Sehne und jede Tangente einer Ordnungscurve ist ein Complexstrahl.

1. *b*) Jede dem Haupttetraeder umschriebene Curve dritter Ordnung, welche einen beliebigen durch keinen Hauptpunkt gehenden Complexstrahl zur Sehne oder zur Tangente hat, ist eine Ordnungscurve.

2. *a*) Durch eine Ordnungscurve und einen ausserhalb derselben liegenden Punkt ist ein Complexstrahl bestimmt, welcher durch diesen Punkt geht und eine Sehne jener Ordnungscurve ist.

2. *b*) Durch einen Complexstrahl und einen ausserhalb desselben liegenden Punkt ist eine Ordnungscurve bestimmt, welche durch diesen Punkt geht und jenen Complexstrahl zur Sehne hat.

3. *a*) Zwei beliebige Complexstrahlen können allemal durch eine Fläche zweiter Ordnung verbunden werden, welche eine Schaar von Complexstrahlen sowie alle Hauptpunkte enthält.

3. *b*) Zwei beliebige Ordnungscurven können allemal durch eine Fläche zweiter Ordnung verbunden werden, welche eine Schaar von Ordnungscurven (sowie alle Hauptpunkte) enthält.

Zum rechts stehenden Satze sei bemerkt, dass die Geraden einer Schaar jener Fläche zweiter Ordnung, als Sehnen der Ordnungscurven, Complexstrahlen sind, woraus wieder folgt, dass die links stehende Fläche zweiter Ordnung eine Schaar von Ordnungscurven enthält.*)

4. *a*) Die gemeinschaftlichen Sehnen von zwei beliebigen Ordnungscurven bilden eine Regelschaar oder eine Kegelfläche zweiter Ordnung, die durch alle Hauptpunkte geht.

4. *b*) Die Ordnungscurven, welche zwei beliebige, durch keinen Hauptpunkt gehende Complexstrahlen zu ihren gemeinschaftlichen Sehnen haben, bilden eine Regelschaar oder eine Kegelfläche zweiter Ordnung (die durch alle Hauptpunkte geht).

*) Das letztere folgt auch aus dem Satze 1*b*.

5. *a*) Drei beliebige Complexstrahlen, die nicht auf einer in dem Complexe enthaltenen Regel- oder Kegelfläche liegen, bestimmen eine Ordnungscurve des Complexes, von welcher sie Sehnen sind.*)

5. *b*) Drei beliebige Ordnungscurven, die nicht auf einer in dem Complexe enthaltenen Regel- oder Kegelfläche liegen, bestimmen einen Complexstrahl, welcher ihre gemeinschaftliche Sehne ist.

6. *a*) Die Pole aller Sehnen und Tangenten einer Ordnungscurve c_3 liegen auf einer Fläche dritter Ordnung, welche die Curve c_3 enthält und die Hauptpunkte zu ihren Doppelpunkten hat. (XII., 7.).

6. *b*) Die Pole aller Ordnungscurven, die einen durch keinen Hauptpunkt gehenden Complexstrahl r zur Sehne oder Tangente haben, liegen in einer Ebene, die auch den Strahl r enthält.

Auf ähnliche Weise können die Sätze über Complex- und Ordnungs-Ebenenbüschel zusammengestellt werden.

XIV.

1. Sei F_2 eine beliebige Fläche zweiter Ordnung, $A_1A_2A_3A_4$ ein Poltetraeder dieser Fläche und c_3 eine beliebige diesem Tetraeder umschriebene Curve dritter Ordnung.

Es lassen sich unendlich viele Flächen F_2' bestimmen, von denen jede mit F_2 einen tetraedralen Complex erzeugt, der die Curve c_3 zur Ordnungscurve hat. Ist nämlich p_1 eine beliebige durch keinen der Punkte A_k gehende Sehne von c_3, p ihre reciproke Polare bezüglich F_2, P_1 ein beliebiger Punkt auf p_1 und π_1' eine beliebige durch p gehende Ebene und bestimmt man die Fläche F_2' so, dass sie $A_1A_2A_3A_4$ zu ihrem Poltetraeder hat und dass in Bezug auf sie π_1' Polarebene von P_1 ist, so sind p und p_1 reciproke Complexstrahlen des mit Hilfe der Flächen F_2 und F_2' erzeugten Complexes und die Curve c_3 ist seine Ordnungscurve (XIII, 1*b*).

Man kann sogar die Fläche F_2' auf unendlich viele Arten so wählen, dass c_3 nicht nur eine Ordnungscurve des durch F_2 und F_2' bestimmten Complexes ist, sondern auch dass ein beliebiger Punkt dieser Curve ihr Pol wird. Es genügt dazu statt der Sehne p_1 eine beliebige, durch keinen der Punkte A_k gehende Tangente von c_3 zu

*) Die links stehenden Sätze sind dem achtzehnten Vortrage der II. Abth. der „Geometrie der Lage" von Dr. Th. Reye entnommen.

nehmen und ihrem Berührungspunkte P_1 mit c_3 eine beliebige durch p gehende Ebene als Polarebene in Bezug auf F_2' zuzuweisen.

Wählt man nun nach einander alle Punkte P.... der Curve c_3 zu ihren Polen und construiert man die Polarebenen π_1.... dieser Punkte in Bezug auf F_2, so schneidet jede von diesen Ebenen die Curve c_3 in drei Punkten, die mit dem Pole dieser Ebene ein Poltetraeder von F_2 bilden (XII., 7). Daraus folgt der Satz:

Jeder Curve dritter Ordnung, die einem beliebigen Poltetraeder einer Fläche zweiter Ordnung umschrieben ist, lassen sich unendlich viele Poltetraeder dieser Fläche umschreiben. Jeder Punkt jener Curve ist Eckpunkt eines solchen Poltetraeders.

Jede Ebene π_1, in welcher eine Seite eines beliebigen von diesen Tetraedern liegt, wird von allen Kanten dieser Tetraeder in den Punkten einer Curve dritter Ordnung s_3 geschnitten (XII., 7.). Diese Curve entspricht sich durch die Transformation (A) selbst, wenn die zweite den Complex erzeugende Fläche F_2' so gewählt wird, dass der Pol der Ebene π_1 in Bezug auf F_2 Pol der Curve c_3 wird.

Die Kanten s aller jener Poltetraeder bilden eine Fläche, welche von jeder der Ebenen π_1.... in einer Curve dritter Ordnung s_3 und in drei Geraden, nämlich in den drei in π_1 liegenden Sehnen von c_3, geschnitten wird.

Schon aus dieser Eigenschaft kann man schliessen, dass jene Fläche von der sechsten Ordnung ist. Dasselbe folgt auch daraus, dass eine beliebige Gerade diese Fläche höchstens in 6 Punkten schneiden kann. Denn alle Complexstrahlen, die eine beliebige Gerade r schneiden, haben ihre Pole auf einer Fläche zweiter Ordnung (VII. und XII). Diese Fläche kann mit der zugehörigen Curve s_3 höchstens 6 Punkte gemein haben und nur diese Punkte sind Pole von Complexstrahlen, welche die Gerade r schneiden und zugleich auf jener Fläche liegen.

2. Den ersten Satz in (1) können wir unabhängig von den Curven s_3 auf folgende Weise beweisen:

Sei wie früher F_2 eine beliebige Fläche zweiter Ordnung, $A_1A_2A_3A_4$ ein Poltetraeder dieser Fläche und c_3 eine ihm umschriebene Curve dritter Ordnung. Wir betrachten diese Curve als Ordnungscurve irgend eines tetraedralen Complexes, der mit Hilfe der Fläche F_2 und einer anderen auf früher angegebene Weise bestimmten Fläche F_2' erzeugt wird.

Sei ferner P_1 ein beliebiger Punkt auf c_3 und π_1 seine Polarebene in Bezug auf F_2, welche die Curve c_3 in den drei Punkten P_2, P_3 und P_4 schneidet. Die Polarebene π_2 von P_2 geht durch den Punkt P_1 und schneidet die Ebene π_1 in einer Geraden p_{34}, von welcher wir beweisen, dass sie mit der Geraden $\overline{P_3P_4}$ identisch ist.

Die Complexstrahlen p_1 und p_2, die ihre Pole in P_1, resp. P_2 haben, schneiden sich im Pole R_1 der Ordnungscurve c_3 (XII., 2.). Die Ebene $(p_1\ p_2)$ schneidet die Ebenen π_1 und π_2 in den Geraden g_1 resp. g_2 und die reciproke Polarebene π_{12} des Complexstrahles p_{34} in einer Geraden a. Aus XII., 1. wissen wir, dass die Geraden p_1, p_2 und $P_1P_2 = p_{12}$ conjugiert sind zu den Ebenen π_1, resp. π_2 und π_{12} in Bezug auf die Flächen F_2 und Φ_2', von denen die letzte Polare der Fläche F_2' bezüglich F_2 ist.

Die Ebene (p_1p_2), in welcher das Dreieck $p_{12}g_1g_2$ und die durch seine Eckpunkte gehenden Geraden p_1, p_2, a liegen, schneidet die Fläche Φ_2' in einer Curve zweiter Classe γ_2, bezüglich welcher die Geraden p_1, p_2 und a zu g_1, resp. g_2 und p_{12} conjugiert sind. Die Geraden p_1, p_2 und a verbinden demnach die Eckpunkte des Dreieckes $g_1g_2p_{12}$ mit den Polen ihrer gegenüberliegenden Seiten in Bezug auf die Curve γ_2, woraus folgt, dass sie alle einen durch Punkt, nämlich in diesem Falle durch den Punkt R_1 gehen. Durch denselben Punkt geht auch die Ebene π_{12}, weil sie die Gerade a enthält. Alle in der Ebene π_{12} liegenden Complexstrahlen bilden die Tangentenschaar einer Curve zweiter Classe (XII., 3) und zwei von diesen Complexstrahlen gehen durch den Punkt R_1. Diese zwei Complexstrahlen müssen einerseits ihre Pole auf der Geraden p_{34} haben, denn diese Gerade enthält die Pole aller in der Ebene π_{12} liegenden Axen (XII., 3) und anderseits müssen dieselben zwei Pole auf c_3 liegen, weil diese Curve Ort der Pole aller durch ihren Pol R_1 gehenden Axen ist (XII., 2), d. h. die Gerade p_{34} ist eine Sehne von c_3. Weil sie aber in der Ebene π_1 liegt, so ist sie mit $\overline{P_3P_4}$ identisch.

Auf dieselbe Weise beweist man, dass P_2P_3 und P_4P_2 reciproke Polaren der Geraden P_1P_4 resp. P_1P_3 sind, woraus dann folgt, dass $P_1P_2P_3P_4$ ein Poltetraeder von F_2 ist.

3. Aus dem eben bewiesenen Satze und aus XII., 5. folgen für den Axencomplex die Sätze:

Jeder cubischen Hyperbel, welche durch den Mittelpunkt einer F_2 geht und deren Asymptoten zu den Symmetrieaxen der F_2 parallel sind, lassen sich unend-

lich viele Poltetraeder von F_5 einschreiben und die Höhen aller dieser Poltetraeder bilden eine Regel- oder Kegelfläche zweiter Ordnung, je nachdem jene cubische Hyperbel keine oder eine (folglich nach XIII., 1b unendlich viele) durch keinen Hauptpunkt gehende Axe der F_2 zur Sehne hat.*)

Aus diesem Satze ersieht man auch, dass die Normalen der F_2 in den Punkten, in welchen sie jene cubische Hyperbel schneidet, einer Regel- oder Kegelfläche zweiter Ordnung angehören.

XV.

1. Die Verbindungslinien je zweier reciproken Pole bilden einen speciellen cubischen Complex Γ_3**), für welchen die erste Configuration (12_6 16_3) eine besondere Bedeutung hat. Jede Gerade nämlich, die durch einen der 12 Punkte dieser Configuration geht oder in einer der 12 Ebenen σ liegt, ist ein Complexstrahl von Γ_3.

Ausser den Strahlen, die durch die Hauptpunkte des tetraedralen Complexes Γ_2 gehen, haben die Complexe Γ_2 und Γ_3 noch unendlich viele gemeinschaftliche Strahlen, denn die Verbindungslinie der Pole jeder zwei reciproken Complexstrahlen, die F_2 in einem beliebigen Punkte M berühren, ist ein Complexstrahl von Γ_3 und zugleich — als reciproke Polare jenes Complexstrahles von Γ_2, der in M seinen Pol hat, — ein Complexstrahl von Γ_2.

Umgekehrt kann man behaupten, dass jeder gemeinschaftliche Complexstrahl d von Γ_2 und Γ_3, der im Allgemeinen durch keinen Hauptpunkt geht, die Pole zweier reciproken Complexstrahlen von Γ_2 verbindet, welche die Fläche F_2 in einem Punkte berühren.

Sind nämlich P und P_1 die beiden durch d verbundenen reciproken Pole, so müssen im Falle, dass d ein Complexstrahl von Γ_2

*) In der Ebene entspricht diesem Satze der Satz: „Einer Hyperbel h_2, die durch den Mittelpunkt einer Curve zweiten Grades c_2 und die unendlich fernen Punkte ihrer Axen geht, lassen sich unendlich viele Poldreiecke von c_2 einschreiben und die Höhen aller dieser Poldreiecke ehen durch einen Punkt von h_2, nämlich durch den Punkt, in welchem sich die Normalen von c_2 in den Punkten $c_2 h_2$ schneiden.“ Der bekannte Satz: „Die Höhen aller Poldreiecke einer Curve zweiten Grades c_2, welche einen gemeinschaftlichen auf einer Axe von c_2 liegenden Eckpunkt haben, gehen durch einen Punkt dieser Axe“ ist ein specieller Fall jenes Satzes.

**) Vergl.: Reye „Geometrie der Lage“ II. Abth., S. 231.

ist, die reciproken Complexstrahlen von Γ_2, die in P und P' ihre Pole haben, in einer Ebene liegen und folglich beide die Fläche F_2 in einem und demselben Punkte berühren (IV., 2.)

Durch jeden Punkt S des Raumes gehen zwei von den Strahlen d, nämlich die gemeinschaftlichen im Allgemeinen durch keinen Hauptpunkt gehenden Strahlen der Complexkegel von Γ_2 und Γ_3, die in S ihre Mittelpunkte haben. In jeder Ebene liegen sechs von den Strahlen d, nämlich die gemeinschaftlichen Tangenten einer Curve zweiter und einer Curve dritter Classe, welche von allen in jener Ebene liegenden Complexstrahlen von Γ_2 resp. Γ_3 umhüllt werden. Die Strahlen d bilden demnach ein Strahlensystem zweiter Ordnung und sechster Classe. Wir werden es kurz mit Γ_{23} bezeichnen. — Zu den Strahlen dieses Strahlensystems gehören auch die Tangenten der Curve c_4, in welcher sich die beiden den Complex Γ_2 erzeugenden Flächen F_2 und F_2' durchdringen.

Nimmt man nämlich auf dieser Curve einen beliebigen Punkt Q an, so bekommt man seinen reciproken Complexstrahl q_1 als Durchschnittslinie der Berührungsebenen von F_2 und F_2' in Q, woraus zuerst folgt, dass der Complexstrahl q_1 die Curve c_4 im Punkte Q berührt. Die reciproke Polare q von q_1 in Bezug auf F_2 hat ihren Pol in Q und die reciproke Polare von q in Bezug auf F_2' schneidet den Strahl q_1 in seinem Pole Q_1, der im Allgemeinen von Q verschieden ist.

Die beliebige Tangente q_1 der Curve c_4 liegt folglich in beiden Complexen Γ_2 und Γ_3, d. h. im Strahlensysteme Γ_{23}. Dabei findet noch der besondere Umstand statt, dass einer der reciproken Pole, die durch eine solche Tangente verbunden sind, Pol dieser Tangente ist.

Umgekehrt kann man beweisen, dass wenn für einen der Strahlen von Γ_{23} dieser Umstand stattfindet, dieser Strahl die Curve c_4 berühren muss. In der That, ist q_1 ein Strahl von Γ_{23}, welcher die reciproken Pole Q und Q_1 verbindet und in Q_1 seinen Pol hat, so müssen die reciproken Polaren von q_1 in Bezug auf F_2 und F_2' durch den Punkt Q gehen, woraus folgt, dass der Strahl q_1 beide Flächen F_2 und F_2', also auch die Curve c_4 im Punkte Q berührt.

Zu den Tangenten der Curve c_4 gehören auch die acht Doppelcomplexstrahlen t (IV., 2.). Es sind das jene vier Geraden jeder Schaar von F_2, welche die Curve c_4 berühren und ihre Berührungspunkte mit c_4 sind die Doppelpole T. Nur für diese acht Punkte T fallen die früher mit Q und Q_1 bezeichneten Punkte zusammen.

2. Die reciproken Pole, deren Verbindungslinien das Strahlensystem Γ_{23} bilden, liegen auf einer Fläche, die wir beim Axencomplexe mit F_4 bezeichnet haben (VIII., 1.). Alle im VIII., 1. angeführten Eigenschaften dieser Fläche behalten auch in diesem Falle ihre Giltigkeit.

Aus der soeben bewiesenen Eigenschaft der Tangenten von c_4 folgt eine andere Eigenschaft der Fläche F_4, nämlich dass sie durch die Curve c_4 geht. Wir zeigen nun, dass sie in dieser Curve die Fläche F_2 berührt.

Ist M ein beliebiger gemeinschaftlicher Punkt von F_2 und F_4, so muss auch sein reciproker Pol M_1 auf F_4 liegen und die reciproken Complexstrahlen, deren Pole in den Punkten M und M_1 sind, müssen die Fläche F_2 in einem und demselben Punkte berühren, also in diesem Falle im Punkte M. Die Gerade MM_1 ist folglich der zu dem Pole M_1 gehörige Complexstrahl und aus diesem Grunde berührt sie die Curve c_4 und zwar im Punkte M. Daraus ersieht man, dass jeder gemeinschaftliche Punkt von F_4 und F_2 auch der Curve c_4 angehört und weil diese Curve keine Doppelcurve von F_4 ist (VIII., 1.), so berühren sich längs ihr die beiden Flächen F_2 und F_4.

Für die Fläche Φ_4, welche von allen Hauptebenen einer Fläche zweiter Ordnung F_2 umhüllt wird (VIII., 2.), folgt daraus, dass sie diese Fläche in derselben (imag.) Curve berührt, wie die gemeinschaftliche Developpable der F_2 und des unendlich fernen imaginären Kugelkreises.*)

3. Die Durchschnittslinien je zweier reciproken Polarebenen bilden auch einen speciellen kubischen Complex Γ_3', für welchen die zweite Configuration $(12_6, 16_3)$ eine besondere Bedeutung hat, indem jede Gerade, welche in einer der zwölf Ebenen dieser Configuration liegt oder durch einen der 12 Punkte S (IV., 1.) geht, zu diesem Complexe gehört.

Das Strahlensystem Γ_{23}', welches aus gemeinschaftlichen im Allgemeinen in keiner Hauptebene liegenden Strahlen der Complexe Γ_2 und Γ_3' besteht, ist von sechster Ordnung und zweiter Classe und wird von allen Strahlen des Complexes Γ_2 gebildet, die auf der

---

*) Dasselbe folgt daraus, dass die Gleichung dieser Fläche in der Form

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \left(\frac{\xi^2}{A}+\frac{\eta^2}{B}+\frac{\zeta^2}{C}\right)\left(A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2-\frac{1}{D}\right)$$

geschrieben werden kann. Vergl. Salmon-Fiedler „Anal. Geom. des Raumes" I. Theil.

Fläche F_2 ihre Pole haben. Im Falle des Axencomplexes ist das Strahlensystem Γ_{23}' mit dem Normalensysteme der Fläche F_2 identisch.

4. Wir werden auf die Untersuchung der Eigenschaften der Complexe Γ_3 und Γ_3' hier nicht weiter eingehen, nur darauf wollen wir noch hinweisen, dass sich aus der Bedeutung der beiden Configurationen (12_6 16_3) für die Complexe Γ_3 und Γ_3' folgende zwei Sätze unmittelbar ergeben:

Die zwölf Punkte jeder hexaedralen Configuration werden aus einem beliebigen Punkte des Raumes durch zwölf Strahlen einer Kegelfläche dritter Ordnung projiciert.

Die zwölf Ebenen jeder hexaedralen Configuration werden von einer beliebigen Ebene in zwölf Tangenten einer Curve dritter Classe geschnitten.

Strassburg, am 30. Juni 1886.

35.

O rychlosti a urychleních různých stupňů při pohybu dle zákona gravitačního a při podobných pohybech.

Přednášel prof. dr. **A. Seydler**, dne 15. října 1886.

I.

Pohyb dle zákona gravitačního jest definován diff. rovnicemi

$$x'' + k^2 x r^{-3} = 0, \quad y'' + k^2 y r^{-3} = 0, \quad z'' + k^2 z r^{-3} = 0;$$

akcenty označujeme diff. poměry dle času t, r značí vzdálenost pohybujícího se bodu ode středu pohybu. Poslední rovnici můžeme identicky vyhověti kladouce $z = 0$, t. j. volíce rovinu dráhy za rovinu XY; v následujícím vždy tak učiníme. Urychlení (obyčejné čili 1. stupně) u_1 jest zde pouhým úkonem vzdálenosti r, a směr jeho identický se směrem této vzdálenosti; jest totiž:

$$u_1 = k^2 r^{-2}, \quad \cos(r, u_1) = 1.$$

Lze ukázati, že platí totéž pro velkosť rychlosti u_0 (urychlení 0tého stupně) jakož i pro velkosť urychlení u_2, u_3 .... všech

vyšších stupňů, a že pro směry těchto veličin platí všeobecnější vztah, tak ale, že i směry ty jsou pouze na vzdálenosti r závislé. Jinými slovy: složky urychlení jakéhokoli stupně, zjednané promítnutím na průvodič a na přímku k němu kolmou, jsou pouze úkony vzdálenosti r.

Místo této věty dokážeme však následující všeobecnější větu, která případ pohybu zákonem gravitačním ovládaného a tudíž i předcházející větu co zvláštní případ v sobě obsahuje.

Je-li při pohybu rovinném urychlení kteréhokoli stupně co do velkosti a směru (vzhledem k průvodiči) pouze na vzdálenosti pohybujícího se bodu ode středu pohybu závislé, můžeme urychlení kteréhokoli jiného stupně co do velkosti i co do naklonění k průvodiči vyjádřiti též co úkon oné vzdálenosti, buď přímo neb sestrojením differencialné rovnice, úkon takový definující.*)

Položme:

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
x' &= R_0 x + N_0 y, & y' &= -N_0 x + R_0 y, \\
x'' &= R_1 x + N_1 y, & y'' &= -N_1 x + R_1 y, \\
x''' &= R_2 x + N_2 y, & y''' &= -N_2 x + R_2 y, \\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Jsou-li R_0, N_0, R_1, N_1, R_2, N_2, . . . úkony vzdálenosti r, jsou rovnice (1) výrazem závislosti všech urychlení na pouhé vzdálenosti.

Buďtež:

$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ urychlení různých stupňů
a $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ úhly, jež tvoří směry urychlení s průvodičem r; platí pak patrně:

---

*) Myslíme-li si problem řešený, t. j. integrace provedené, jsou všechny veličiny úkony času; z rovnice, která určuje r co úkon času, můžeme vyhledati naopak čas t co úkon vzdálenosti r, i jeví se nám potom souřadnice x, y a vůbec kterékoli veličiny problemu co úkony veličiny r. Vzhledem k tomu zdá se hořejší věta a priori jistou a bezvýznamnou; význam její spočívá však v tom, že lze substituci vzdálenosti r co základní proměnné místo času t provésti *bez* předběžného provedení oné integrace, tedy i když problem řešiti nemůžeme.

$$(2)\qquad \begin{aligned} u_0^2 &= (R_0^2 + N_0^2)\, r^2, & u_0 \cos \varrho_0 &= R_0 r = r', \\ u_1^2 &= (R_1^2 + N_1^2)\, r^2, & u_1 \cos \varrho_1 &= R_1 r, \\ u_2^2 &= (R_2^2 + N_2^2)\, r^2, & u_2 \cos \varrho_2 &= R_2 r, \\ &\ldots\ldots & &\ldots\ldots \end{aligned}$$

Lze však druhou dvojici rovnic (1) odvoditi z první, a každou jinou z předcházející a z první způsobem, z následujících dvou příkladů patrným:

$$(3)\qquad \begin{aligned} x'' &= \left(R_0 \frac{dR_0}{dr} r + R_0^2 - N_0^2\right) x + \left(R_0 \frac{dN_0}{dr} r + 2 R_0 N_0\right) y, \\ y'' &= -\left(R_0 \frac{dN_0}{dr} r + 2 R_0 N_0\right) x + \left(R_0 \frac{dR_0}{dr} r + R_0^2 - N_0^2\right) y. \\ x''' &= \left(R_0 \frac{dR_1}{dr} r + R_0 R_1 - N_0 N_1\right) x + \left(R_0 \frac{dN_1}{dr} r + R_0 N_1 + R_1 N_0\right) y, \\ y''' &= -\left(R_0 \frac{dN_1}{dr} r + R_0 N_1 + R_1 N_0\right) x + \left(R_0 \frac{dR_1}{dr} r + R_0 R_1 - N_0 N_1\right) y. \end{aligned}$$

Rovnice ty jsou tvaru stejného jako rovnice (1) a máme tudíž mezi $2(n+1)$ veličinami R_0, N_0, R_1, N_1, ... R_n, N_n $2n$ rovnic tvaru:

$$(4)\qquad \begin{aligned} R_0 \frac{dR_k}{dr} r + R_0 R_k - N_0 N_k &= R_{k+1}, \\ R_0 \frac{dN_k}{dr} r + R_0 N_k + N_0 N_k &= N_{k+1}, \end{aligned} \qquad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots n-1.$$

Vytkněme si m^{tou} dvojici těchto rovnic obsahující na pravé straně R_m a N_m a pokládejme tyto veličiny za dané; patrně můžeme z ní a z předcházejících rovnic eliminovati veličiny R_{m-1}, N_{m-1}, R_{m-2}, N_{m-2}, ... R_1, N_1, čímž si zjednáme d v ě s o u d o b é d i f f e r e n c i a l n é r o v n i c e $m^{\text{tého}}$ ř á d u p r o ú k o n y R_0, N_0 p r o m ě n n é r. Původně jsou dány v případě tom dvě soudobé differencialné rovnice $(m+1)^{\text{tého}}$ řádu pro úkony x, y proměnné t, totiž rovnice:

$$\frac{d^{m+1} x}{dt^{m+1}} = R_m x + N_m y,$$

$$\frac{d^{m+1} x}{dt^{m+1}} = -N_m x + R_m y.$$

Methodou naznačenou jest tudíž počet integrací o dvě zmenšen, aneb přesněji řečeno, problem integrace dvou soudobých diff. rovnic uveden na integraci jiných dvou soudobých rovnic o jednotku nižšího řádu. Po vykonání této integrace zbývá ovšem provésti ještě dvoje integrování, totiž řešení rovnic:

$$\frac{dr}{dt} = R_0 r, \quad \frac{d\varrho}{dt} = -N_0,$$

kdež jsou r, ϱ polárné souřadnice pohybujícího se bodu; místo poslední rovnice lze klásti:

$$\frac{d\varrho}{dr} = -\frac{N_0}{R_0 r}.$$

Pohyb dle zákona gravitačního sem náleží. V případě tom jest:

$$R_1 = -k^2 r^{-3}, \quad N_1 = 0$$

a nutno integrovati rovnice:

$$R_0 \frac{dR_0}{dr} r + R_0^2 - N_0^2 = -k^2 r^{-3}$$

$$R_0 \frac{dN_0}{dr} r + 2 N_0 R_0 = 0.$$

Druhá rovnice dává:

$$N_0 = C r^{-2}$$

načež substitucí do rovnice prvé a opětovanou integrací obdržíme

$$R_0 = r^{-2}\sqrt{C' r^2 + 2 k^2 r - C^2}.$$

Tento výraz násobený na r dává složku rychlosti ve směru průvodiče; celá rychlost jest:

$$u_0 = r^{-1}\sqrt{C' r^2 + 2 k^2 r}.$$

Pro urychlení druhého stupně obdržíme:

$$R_2 = +2 k^2 r^{-5}\sqrt{C' r^2 + 2 k^2 r - C^2}$$

$$N_2 = -C k^2 r^{-5}$$

$$u_2 = k^2 r^{-4}\sqrt{4 C' r^2 + 8 k^2 r - 3 C^2}$$

$$u_2 \cos \varrho_2 = 2 k^2 r^{-4}\sqrt{C' r^2 + 2 k^2 r - C^2}.$$

Výrazy pro urychlení vyšších stupňů jsou složitější.

Podobné úvahy můžeme upotřebiti též tehdy, je-li urychlení dáno co úkon vzdálenosti r a rychlosti u; rozšíření na urychlení vyšších stupňů nebudeme však vyhledávat, poněvadž postrádá praktické důležitosti. Mysleme si urychlení rozložené ve čtyry složky: dvě ve směrech průvodiče a rychlosti, dvě ve směrech k nim kolmých.

Pak jest:

$$\begin{aligned} x'' &= Kx + Lx' + My + Ny' \\ y'' &= -Mx - Nx' + Ky + Ly', \end{aligned} \tag{5}$$

kdež jsou všeobecně K, L, M, N úkony veličin r a u. V uvedeném všeobecném tvaru jsou zahrnuty mnohé důležité případy zvláštní.

Případ:

$$K = f(r), \quad L = F(u), \quad M = 0, \quad N = 0$$

značí centrálný pohyb v ústředí, jehož odpor jest pouze na rychlosti závislý.

Položme:

$$x' = Px + Qy, \quad y' = -Qx + Py, \tag{6}$$

kdež jsou P, Q neznámé úkony vzdálenosti r. Differenciace těchto rovnic z jedné, substituce do rovnic (5) z druhé strany vede k následujícím rovnicím:

$$\begin{aligned} x'' &= Pr\left(\frac{dP}{dr}x + \frac{dQ}{dr}y\right) + (P^2 - Q^2)\,x + 2\,PQy \\ y'' &= -Pr\left(\frac{dQ}{dr}x - \frac{dP}{dr}y\right) - 2\,PQx + (P^2 - Q^2)\,y \end{aligned} \tag{7}$$

aneb

$$\begin{aligned} x'' &= Kx + My + (LP - NQ)\,x + (LQ + NP)\,y, \\ y'' &= -Mx + Ky - (LQ + NP)\,x + (LP - NQ)\,y. \end{aligned} \tag{8}$$

Srovnáním zjednáme si tudíž:

$$\begin{aligned} &P\frac{dP}{dr}r + P^2 - Q^2 - LP + NQ - K = 0. \\ &P\frac{dQ}{dr}r + 2\,PQ - NP - LQ - M = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Z rovnic (6) plyne:

$$u^2 = (P^2 + Q^2)\,r^2.$$

Vložíme-li tuto hodnotu do rovnic (9) obsahují ony pouze neznámé úkony P, Q a základní proměnnou r. Problem, řešiti dvě soudobé diff. rovnice 2. řádu (5), jest tudíž i zde uveden na integrování dvou soudobých diff. rovnic řádu prvního.

V případě prakticky bohužel bezvýznamném

$$L = 0, \quad M = 0, \quad K = f(r), \quad N = F(r)$$

lze řešení snadno provésti způsobem patrným.

II.

Rozšíření předcházející úvahy na pohyb prostorový podléhá modifikaci, podmíněné tím, že velkosť rychlosti a naklonění její k průvodiči (ku vzdálenosti r) pohyb úplně neurčují. Budiž Rr složka rychlosti ve směru průvodiče, Qr složka k němu kolmá. Nazveme α, β, γ směrné cosinusy přímky, k průvodiči i k normale kolmé. Pak jsou složky rychlosti ve směru os:

$$(10) \qquad \begin{aligned} x' &= Rx + Q(\gamma y - \beta z) \\ y' &= Ry + Q(\alpha z - \gamma z) \\ z' &= Rz + Q(\beta x - \alpha y). \end{aligned}$$

Zároveň jest:

$$(11) \qquad \begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z &= 0, \\ \alpha x' + \beta y' + \gamma z' &= 0. \end{aligned}$$

Z veličin α, β, γ jest jedna libovolná, poněvadž lze rovinu, průvodič a rychlosť obsahující, kolem průvodiče do jakékoli polohy otočiti. Je-li na př. α dáno co úkon vzdálenosti r, znamená to, že jest úhel, jejž ona rovina s rovinou YZ tvoří, na té vzdálenosti závislý. Tím jest však poloha roviny průvodičem proložené určena, β a γ nejsou více libovolné. Jest tudíž patrno, že jsou v přítomném případě veličiny α, β, γ podrobeny mimo rovnici

$$(12) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

ještě jedné podmínce, i bude především úlohou naší podmínku tu vyhledati.

Z rovnic (11) plyne především:

$$(13) \qquad \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0,$$

tedy i:

$$x \frac{d\alpha}{dr} + y \frac{d\beta}{dr} + z \frac{d\gamma}{dr} = 0.$$

Zjednáme si tudíž:

$$\frac{x}{\beta \frac{d\gamma}{dr} - \gamma \frac{d\beta}{dr}} = \frac{y}{\gamma \frac{d\alpha}{dr} - \alpha \frac{d\gamma}{dr}} = \frac{z}{\alpha \frac{d\beta}{dr} - \beta \frac{d\alpha}{dr}} =$$

$$= \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dr}\right)^2}} = \frac{r}{\varrho}.$$

Klademe-li pro krátkosť:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\alpha}{dr} = \varkappa, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{d\beta}{dr} = \lambda, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{d\gamma}{dr} = \mu,$$

tak že jest

$$\varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 = 1,$$

bude:

$$(14) \qquad x = r(\beta\mu - \gamma\lambda), \quad y = r(\gamma\varkappa - \alpha\mu), \quad z = r(\alpha\lambda - \beta\varkappa)$$

$$(15) \quad \gamma y - \beta z = \varkappa r, \quad \alpha z - \gamma x = \lambda r, \quad \beta x - \alpha y = \mu r.$$

$$(16) \quad \mu y - \lambda z = -\alpha r, \quad \varkappa z - \mu x = -\beta r, \quad \lambda x - \varkappa y = -\gamma r.$$

Vložením do soustavy (10) obdržíme novou soustavu, jaksi dualně k ní postavenou:

$$(17) \qquad \begin{aligned} x' &= Q\varkappa r + Rr(\beta\mu - \gamma\lambda) \\ y' &= Q\lambda r + Rr(\gamma\varkappa - \alpha\mu) \\ z' &= Q\mu r + Rr(\alpha\lambda - \beta\varkappa). \end{aligned}$$

Differencujeme-li výrazy (14) dle času, a srovnáme-li s rovnicemi (17) obdržíme:

$$(18) \qquad \begin{aligned} \beta\mu' - \gamma\lambda' &= Q\varkappa \quad \text{aneb} \quad Rr\left(\beta \frac{d\mu}{dr} - \gamma \frac{d\lambda}{dr}\right) = Q\varkappa \\ \gamma\varkappa' - \alpha\mu' &= Q\lambda \quad \text{,,} \quad Rr\left(\gamma \frac{d\varkappa}{dr} - \alpha \frac{d\mu}{dr}\right) = Q\lambda \\ \alpha\lambda' - \beta\varkappa' &= Q\mu \quad \text{,,} \quad Rr\left(\alpha \frac{d\lambda}{dr} - \beta \frac{d\varkappa}{dr}\right) = Q\mu. \end{aligned}$$

Zde máme zdánlivě tři rovnice určující $\varkappa$, λ, μ co úkon veličiny r; vskutku redukují se však na rovnici jedinou. Součet rovnic (18), násobených po sobě na α, β, γ rovná se totiž, se zřetelem ku významu veličin $\varkappa$, λ, μ, identicky nule; totéž platí o součtu týchž rovnic, násobených po sobě na $\varkappa'$, λ', μ'. Násobíme-li konečně po sobě na $\varkappa$, λ, μ a sečteme-li, obdržíme co hledanou podmínku pro veličiny α, β, γ:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{d\alpha}{dr} & \frac{d\beta}{dr} & \frac{d\gamma}{dr} \\ \frac{d^2\alpha}{dr^2} & \frac{d\beta^2}{dr^2} & \frac{d^2\gamma}{dr^2} \end{vmatrix} = -\frac{Q}{Rr}\sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dr}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dr}\right)^2+\left(\frac{d\gamma}{dr}\right)^2} \tag{19}$$

Rychleji obdrželi bychom tutéž podmínku, kdybychom byli rovnici (13) ještě jednou dle t neb dle r differencovali a z výsledku pomocí (10) a (11) x, y, z eliminovali. Volená delší cesta má tu výhodu, že ukazuje nemožnosť většího počtu podmínek, jaký se zdánlivě v rovnicích (18) objevil.

Je-li nyní dáno urychlení jakožto úkon vzdálenosti r co do směru i co do velkosti, rozložme je ve tři složky: složku $R_1 r$ ve směru průvodiče, kolmou k ní složku $Q_1 r$ v rovině průvodič a rychlosť obsahující a složku $P_1 r$, k oběma předešlým kolmou, jejíž směr tudíž určují cosinusy α, β, γ. Pak jest:

$$\begin{aligned} x'' &= R_1 x + Q_1(\gamma y - \beta z) + P_1 \alpha r \\ y'' &= R_1 y + Q_1(\alpha z - \gamma z) + P_1 \beta r \\ z'' &= R_1 z + Q_1(\beta z - \alpha y) + P_1 \gamma r. \end{aligned} \tag{20}$$

Předpokládejme, že složky rychlosti jsou dány výrazy (10), a tažme se, zda-li možno veličiny R, Q, α, β, γ určiti co úkony vzdálenosti r z daných úkonů R_1, Q_1, P_1. K tomu ovšem třeba, aby se pro ony veličiny vyskytnuly pouze tři podmínky, poněvadž α, β, γ musí mimo to vyhověti podmínkám (12) a (19). Differencujeme-li (19) dle času, vložíme-li do výsledku místo x', y', z' hodnoty (10) a Rr místo r', obdržíme se zřetelem k rovnicím (16):

$$\begin{aligned} x'' = &\left(\frac{dR}{dr} r + R^2 - Q^2\right) x \\ &+ \left(R\frac{dQ}{dr} r + 2\,RQ\right)(\gamma y - \beta z) - Q\varrho\alpha r \end{aligned}$$

$$y'' = \left(R\frac{dR}{dr}r + R^2 - Q^2\right)y$$
$$+ \left(R\frac{dQ}{dr}r + 2\,RQ\right)(\alpha z - \gamma z) - Q\varrho\beta r$$
$$z'' = \left(R\frac{dR}{dr}r + R^2 - Q^2\right)z$$
$$+ \left(R\frac{dQ}{dr}r + 2\,RQ\right)(\beta x - \alpha y) - Q\varrho\gamma r.$$

Z těchto rovnic plynou hledané tři podmínky:

$$R\frac{dR}{dr}r + R^2 - Q^2 = R_1$$

(21) $$R\frac{dQ}{dr}r + 2\,RQ = Q_1$$

$$Q^2\left[\left(\frac{d\alpha}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{dr}\right)^2\right] = P_1^2.$$

Z rovnic těch lze s přibráním rovnic (12) a (19) určiti veličiny R, Q, α, β, γ, jsou-li dány úkony R_1, Q_1, P_1. Řešení rovnic (20) vyžaduje šest integrací; rovnice (21) jsou prvého, rovnice (19) jest druhého řádu; získali jsme tudíž v přítomném případě pouze redukci o jeden stupeň, kdežto lze při rovinném pohybu docíliti redukci o dva stupně.

Jsou-li dány složky urychlení druhého stupně R_2r, Q_2r, P_2r, nastane modifikace výsledných rovnic podmíněná tou okolností, že se ve výrazech (20) vyskytuje o člen více než-li ve výrazech (10). Se zřetelem k rovnicím (15) zjednáme si:

$$R\frac{dR_1}{dr}r + RR_1 - QQ_1 = R_2$$

(22) $$R\frac{dQ_1}{dr}r + RQ_1 + QR_1 + P_1 Rr\varrho = Q_2$$

$$R\frac{dP_1}{dr}r + RP_1 - Q_1\varrho = P_2$$

Rovnice (22), (21), (19) a (12) tvoří soustavu vyžadující k řešení svému 8 integralů, místo 9 integralů, potřebných k řešení rovnic urču-

jících x''', y''', z'''. Podobně bude v případě, kde jest dáno urychlení kteréhokoli vyššího stupně. Integral rovnice

$$\frac{dr}{dt} = Rr$$

dokončuje v každém případě řešení.

III.

Předcházející úvaha vede nás při vší své jednoduchosti k důležité poznámce, týkající se pojmu sil a energie. V novější době objevuje se pojem energie v popředí mechaniky; fundamentalný význam jeho pro celý obor, nejen mechaniky nýbrž i fysiky, způsobil, že se jemu právem věnuje největší pozornosť. Omylem však jest, když se proti němu pojem síly zanedbává, když se v tomto spatřují zcela zbytečně nejasnosti, které v něm v skutku se nenalézají, a když se mnohdy usiluje až i o jeho odstranění. Síla, měřená kineticky co součin hmoty a urychlení neb staticky co tlak vyvážený jistým protitlakem na útvaru hmotném, v rovnovážné poloze se nalezajícím, jest zcela určitá fysikalná veličina, a má tak mnoho neb tak málo realnosti, mnoho-li na př. teplota, elektrické napjetí a jiné fysikalné veličiny, jež proto, že nejsou hmotami neb energiemi, nesmí býti pokládány za pouhé nic.

Ve svém jinak velmi dobrém spise: Properties of matter (1885) praví ovšem P. G. Tait hned na první stránce: „If, for a moment, we use the word Thing to denote, generally, whatever we are constrained to allow has objective existence — i. e. to exist altogether independently of our senses and of our reason — we arrive at the following conclusions:

A. In the physical universe there are but two classes of things, Matter and Energy.

B. Time and Space, though well known to all, are not things.

C. Number, Magnitude, Position, Velocity etc. (že sem též síla náleží, čteme na str. 7.) are likewise not things.“

Nechme prozatím stranou otázku, která by nás příliš hluboko do noetiky zavedla, zda-li by došel výměr realnosti (neb toho, co lze nazvati „věcí“), podaný Taitem, obecného souhlasu. Praví-li však Tait, že hmota a energie jsou jedinými druhy „věcí“, ve světě hmotném, má tím tušími býti naznačeno, že jimi vše jest vyčerpáno, co naše

poznání, bez ohledu na naše mohutnosti poznávací (smysly, rozum) podmiňuje. Vše co jinak ještě o světě hmotném víme, jsou naše (subjektivné) stavy: dojmy smyslové neb relace rozumové, tedy něco, čím teprvé subjekt skutečnosť přiodívá neb co do ní vkládá.

Že předcházející interpretace Taitova mínění se s jeho názorem shoduje, dokazuje výrok na str. 131. uvedeného spisu týkající se zákona gravitačního: „That two pieces of matter behave as if they attracted one another, according to Newton's law, is certain. But it by no means follows that they do so attract. All that we are entitled to say, from the facts given above, is as follows: The part of the energy of a system of two particles of matter, of masses m and m' which depends upon their distance, r, from one another, is measured by

$$-\frac{mm'}{r};$$

and this is not altered by the presence of other particles.

This, taken along with the conservation of energy, enables us fully to investigate the motions of any system of gravitating masses. It represents, in fact, our whole knowledge on the subject. And it is well to observe that the statement is altogether free from even the mention of the word force."

Názor Taitův jest patrně nesprávný. Výraz pro statickou energii

$$-\frac{mm'}{r}$$

a princip energie, pravící, že jest:

$$\frac{1}{2}mu_0^2+\frac{1}{2}m'u'^2_0-\frac{mm'}{r}=konst.$$

netvoří veškeré naše poučení o problemu gravitujících hmot; a právě v tom vězí nedostatek, že jsme se vyhnuli pojmu neb slovu „síla".

Víme-li o soustavě dvou hmot m a m' jen tolik, mnoho-li výrazem pro statickou energii a principem zachování energie jest dáno, nemůžeme o nich tvrditi ani tolik, že se budou kolem společného středu hmotného pohybovati v kuželosečce, neřku-li abychom sku-

tečný tvar kuželosečky, který v každém zvláštním případě se vyskytuje, určiti mohli.

Položme v rovnicích (20)

$$R_1 = -k^2 r^{-3}, \quad Q_1 = 0;$$

pak jest:

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = u_0 u_0' = -k^2 r^{-2} r',$$

tudíž

$$\frac{1}{2} u_0^2 - k^2 r^{-1} = konst.$$

kterážto rovnice platí pro libovolné tvary úkonu P_1. Zvláštní případ: $P_1 = 0$ značí pohyb dle zákona gravitačního; jest tudíž nekonečné množství možných pohybů, majících s pohybem dle zákona gravitačního společný tvar statické energie a princip zachování energie. Který z těchto pohybů v skutečnosti existuje, čili jaký tvar úkonu P_1 přisouditi máme, smíme-li na př. klásti $P_1 = 0$, o tom poučuje nás jediné zkušenosť, již ovšem pouze smysly postřehnouti a rozumem spracovati můžeme, tak ale, že nepochybně různým zkušenostem též objektivná, t. j. ve věcech založená různosť jest příčinou neb podmínkou. Různosť ta nejeví se však ani ve hmotách ani v energii; dlužno ji hledati jinde, totiž v rychlostech a urychleních, čili v hybnostech (velkostech pohybu) a v silách.

Pro velkou důležitosť přítomné otázky budiž uveden ještě jeden příklad. Budiž (v rovině):

$$\begin{aligned} x'' &= -k^2 x r^{-3} + 2\,a y' \\ y'' &= -k^2 y r^{-3} - 2\,a x' \end{aligned} \tag{23}$$

tudíž opět

$$\frac{1}{2} u_0^2 = k^2 r^{-1} + C$$

co výraz principu energie platný pro pohyb gravitační ($a = 0$) právě tak jako pro jakýkoli jiný pohyb (23).

Rovnice (9) mají nyní tvar:

$$P \frac{dP}{dr} r + P^2 - Q^2 + 2\,a\,Q + k^2 r^{-3} = 0,$$

$$\frac{dQ}{dr} r + 2\,Q - 2\,a = 0.$$

Odtud plyne

(24) $$Q = a + br^{-2}$$

(25) $$P^2 = -a^2 + cr^{-2} + 2\,k^2r^{-3} - b^2r^{-4};$$

veličiny b a c jsou zde integračními konstantami.

Dále jest:

$$u_0^2 = (P^2 + Q^2)\,r^2 = c + 2\,ab + 2\,k^2r^{-1},$$

tak že skutečně shledáváme souhlas s principem energie.

Další dvě integrace provedeme, kladouce:

$$x = r\cos\varrho, \quad y = r\sin\varrho.$$

Jest pak:

$$xy' - yx' = r^2\varrho' = -Qr^2$$

$$d\varrho = -\frac{Qdr}{Pr}, \quad dt = \frac{dr}{Pr}.$$

(26) $$\varrho = \alpha - \int\frac{Q}{Pr}\,dr = \alpha + \varphi(r)\,d\varrho$$

(27) $$t = \tau + \int\frac{dr}{Pr} = \tau + f(r)\,dt$$

Novými integračními konstantami jsou tu α a τ; rovnicemi (24) až (27) jest předložený problem (elliptickými úkony) úplně řešen a zároveň vidno, že pohyb při stejném tvaru principu energie může býti nekonečně rozmanitým, a že rozdíl ten tkví v rozdílu výrazů pro urychlení.

Mohla by se učiniti následující námitka. Při daných dvou hmotách může býti vzdálenosť rozdílná; tato vzdálenosť co relace prostorová jest pouze v našem názoru prostorovém; věcmi jsou přec jen dané hmoty. Podobně i rychlosť, urychlení jsou relace, jež nesmíme nazvati věcmi, byť jim i objektivné vztahy mezi věcmi (nějakým, v našem názoru prostorovými i časovými veličinami charakterisovaným způsobem) odpovídaly. Připusťme na okamžik (o čemž by vždy ještě spor mohl býti veden), že hmotě věcnosť neb předmětnosť ve smyslu Taitově spíše přísluší než na př. vzdálenosti neb urychlení; jak se

to má však s energií? Oč jest pojem ten věcnější než-li na př. pojem hybnosti neb síly? Právě jsme viděli, že nás energie, v soustavě dvou pohybujících se hmot obsažená, nikterak o pohybu samém dostatečně nepoučuje; naopak jest tomu, známe-li v každém okamžiku hybnost, neb sílu a mimo to hybnosť v jistý okamžik (na začátku pohybu). Z hybnosti a síly můžeme úplně odvoditi též energii soustavy, nikoli však naopak.

Vskutku jest kinetická energie

$$\frac{mu_0^2}{2}$$

co skalar veličinou při stejné velkosti rychlosti pro všechny směry její stejnou; hybnosť

$$m\overline{u_0}$$

co vektor poučuje nás o velkosti kinetické energie v pohybu obsažené, zároveň však i o směru pohybu. Podobně jest statická energie mezi dvěma hmotami o vzdálenosti r:

$$F(r)$$

co skalar veličinou na směru r nezávislou; nepoučuje nás tedy o změnách směru toho podobně jako vektor-síla:

$$m\overline{u_1}.$$

Mimo to není jak jsme viděli nemožné, že značí změna statické energie $F'(r)$ pouze část veškeré síly mezi oběma hmotami, že totiž celá síla ku přímce obě hmoty spojující jest nakloněna, o čemž ovšem jen zkušenosť rozhodnouti může.

Hybnosti a síle musíme tudíž přiřknouti co fysikalné veličině tolik objektivnosti, jako energii. Chceme-li je zváti „věcmi“ neb jinak, jest pouze spor o slova.

36.

Zpráva o výsledku zkoumání vody z pramene sv. Vintíře v lázních Letinských.

Přednášel prof. **Antonín Bělohoubek** dne 15. října 1886.

A. Úvod.

Ku přání Správy lázní Letinských, jež jsou jak vůbec známo, spolu s velkostatkem téhož jména, majetkem hraběte K. ze Schönbornu, uvázal jsem se v úkol prozkoumati podrobně vodu z pramene sv. Vintíře. Této vody léčivé se užívá od delší doby netoliko k pití nýbrž i na lázně všeliké s úspěchem osvědčeným.

Pramen vytknutý byl pisatelem těchto řádků v srpnu roku 1884 zevrubně ohledán jakož i okolí jeho nejbližší a zejména bylo také vyšetřeno, že prodlením hodiny poskytuje 198 litrů vody. Prameniště se nachází uprostřed dosti rozsáhlého slatiniště v mělké padolině zastíněné dílem sosnami, dílem olšemi. Vyzděná ovruba pramene měří ve světlosti 142 cm. a tají v sobě 200 cm. mohutnou vrstvu vodní. — Vedle mnoholeté zkušenosti kolísá teplota vody mezi 9 a 10° C. v zimě, v letě.

Z nádrže pramene se čerpá voda zvláštním čerpadlem do vodojemu hlavního v sousedství budovy lázeňské umístěného. Vzdálenosť lázní od pramene obnáší asi 5 minut. Lázně samy se nalézají na pokraji mohutného lesa jehličnatého ve výši 468 metrů nad hladinou mořskou. Ony náležejí k obci Letinám, která se rozkládá ve směru západním u vzdálenosti asi 15 minut od lázní svrchu jmenovaných.

Ač zprávy zaručené o vzniku lázní Letinských sledovati lze toliko k počátku 18. věku, a ač teprvé okolo roku 1750 péčí hraběte Karla Morzina byla zřízena a k účelům lázeňským upravena první jednopatrová budova dřevěná („Staré lázně“ dosud zachované), lze přece za to míti, že již v dobách starších léčivá moc vody z pramene sv. Vintíře, jakož i slatiny Letinské známa a užívána byla. Domněnka tato opírá se jednak o podání ústní, jež se zachovala v této věci z pokolení na pokolení v okolí Letin a jednak také o zprávy, vedle kterých vsi Letiny a Kbelice králem Václavem I. byly vřaděny ve skupinu vesnic lékařských.*)

*) Wácslaw Wladiwoj *Tomek*: Dějepis města Prahy. Díl I. str. 348. — *Jar. Erben*: Reg. 564 a 565.

Z podobných vsí plynul lékařům dvorským důchod nemalý a zároveň jim poskytovaly také sídla, v nichž občasně přebývali a okolní lid léčili.*)

O zvelebení a rozkvět lázní Letinských přičinila se však teprvé hraběcí rodina Schönbornská, v jejichž držení se dostaly spolu s velkostatkem téhož jména roku 1794.

Závěrečně budiž jen ještě připomenuto, že Letiny se nalézají téměř v samém středu trojhranu měst: Přestic, Blovic a Nepomuk v Čechách jihozápadních v rozkošném pásmu pošumavském. —

B. Práce u pramene.

Čerpání vody ku zkoumání určené se dálo ve dvou podílech, totiž dne 13. měsíce října r. 1884 a dne 24. měsíce října r. 1884, po obakráte o 12. hodině v poledne.

Prvního dne byla pohoda přízniva a ani po tři dni předcházející nebylo pršelo. Po trvání prací u pramene vykazoval vzduch tlaku 752·5 mm. a teplotu ve stínu + 7° C. Teplota vody v prameništi činila + 9° C. Množství vody naspílané do skleněných lahví co nejpečlivěji vyčistěných činilo asi 11 litrů a bylo ho užito hlavně k vyšetření vlastností fysických a ku stanovení chemického složení oné vody dle jakosti.

Při druhém čerpání (dne 24. října) odměřilo se asi 22 litrů vody a vpravilo se do skleněných láhví důkladně vymytých a vypláknutých. Kromě toho naplnily se též dvě menší odvážené láhve, v nichž se nalézal přiměřený a určitý podíl amoniakálného roztoku chloridu vápenatého, vodou z pramene v příčině stanovení kyseliny uhličité a další dvě láhve obsahující roztok na absorbci sírovodíka; všechny čtyry láhve se odvážily před naspíláním vody, jakož i po skončené práci. Tohoto dne trvala pohoda nevalně uspokojivá (obloha byla zachmuřena) ač nepršelo a sluší připomenouti, že tlak vzduchu obnášel 752·5 mm., teplota vzduchu že činila + 7° C. ve stínu a teplota vody + 9° C. Po čtyři dni před čerpáním nebylo dešťů. Celého podílu vody od druhého čerpání se užilo ku vyšetření složení její dle kolikosti.

Kromě toho zpracovány ještě dvě zásylky vody z pramene sv. Vintíře, z nichž prvá (přibližně 6 litrů) byla čerpána dne 15. dubna

---

*) *Špott*: „Přirození lékařové“ v časopisu českých lékařův str. 303 r. 1883 a str. 672 r. 1885.

1885 a druhá (asi 10 litrů) dne 19. září 1885. Těchto 16 litrů vody se upotřebilo z části ku kvalitativným a z části ku kvantitativným zkouškám kontrolným.

Veškeré práce při čerpání vody se dály za přítomnosti a součinnosti lázeňského lékaře p. M. U. Dra. *Jul. Schneidera* a správce lázní p. *Knoblocha* přesně dle ústního a písemného návodu podaného pisatelem těchto řádků a za svědomitého šetření všech podmínek, na nichž v řadě první se zakládá správnosť výsledku výzkumu vody.

Láhve vodou naplněné byly po čerpání co nejpečlivěji zahraženy a zapečetěny, načež bez průtahu byly dopraveny do Prahy, kamž stihly bez pohromy.

C. Fysické vlastnosti vody.

Voda z pramene sv. Vintíře byla shledána na místě i při zkoušce v lučebně bezbarvou, čistou a čirou a toliko ve vrstvách 40 až 50 cm. mohutných jevila praslabý odstín žlutavý.

Byvši ostavena na vzduchu v nádobě otevřené popnula se po delší době přetenkou blankou duhově lesklou, zkalila se poněkud a vyloučila na dvě nádoby sporou práškovitou sedlinu barvy rezavé, jež v podstatě obsahovala hydroxyd železitý, kromě součástek jiných. Také v láhvích zahražených týž výjev bylo lze pozorovati, jen že se udál prodlením doby delší t. j. během asi 8 dnů. Stejnočasně se vylučovaly na povrchu i na stěnách nádob bubliny plynové.

Co do chuti byla voda čistou a povahy, které měkké vody mívají; příchutí postrádala. Za teploty obecné neměla vůně osoblivé, po zahřatí na 50° C. zapáchala slabě ale zřejmě po uhlovodíkách a později po těkavých kyselinách mastných; za varu voněla slabě kysele a spolu aromaticky po silici terpentinové.

Zahříváním se vypuzovaly z vody plyny, jmenovitě uhličitý, pak součástky vzduchu a j. a voda se po delším vaření slabě kalila a na dně se usadila po krátkém klidu bílá práškovitá sedlina hlavně uhličitanu vápenatého a klčky hydroxydu železitého barvy rezavé.

Reakce vody byla bezprostředně po čerpání slabě kyselou, po uplynutí několik dní téměř obojetnou a po ovaření, její slabě zásaditou.

Měrná váha vody netřepané byla vyšetřena piknometrem při 15° C. a po té novým pokusem kontrolována; činila pouze 1·00020002.

D. Zkoumání vody dle jakosti.

Ku zkoušení vody na její složení kvalitativné, jež se dálo vedle známých spůsobův a method, užito téměř 16 litrů z celého množství, jež páčiti lze přibližně na 50 litrů.

Následující součástky byly vyšetřeny v podílech patrných, totiž, *kysličníky*: železnatý, hlinitý, vápenatý, hořečnatý, draselnatý, sodnatý a lithnatý, *kyseliny:* křemičitá, sírová, fosforečná, dusičná a uhličitá, pak chlor (ve spůsobě chloridů) a netěkavé látky ústrojné. Posléze uvedené sloučeniny ústrojné z malé části se rozplývaly v alkoholu; v podstatě netěkavé látky ústrojné se skládaly z kyselin huminových.

V sledech byly přítomny ve vodě kysličníky železitý a manganatý, fluor, kyselina borová, pak mastné kyseliny těkavé a uhlovodíky.

Na sírovodík zůstaly reakce bez úspěchu, přes to že po deštích prudčích voda slabě po tomto plynu zapáchává. Plyny z vody neodbarvovaly roztok škrobu pomíšený mentinou $\frac{1}{10}$ norm. roztoku jodového a voda byvši za čerstva pomíšena a třepána s dávkou zásaditého octanu olovnatého poskytla sraženinu bílou. —

Pátrání po přítomnosti arsenu, mědi, rubidia, césia, strontia, baria a kysličníku dusíkového neměla úspěchu žádoucího.

Část vody ostavila po vypaření v misce platinové výparek bílý, zřejmě krystallický, na okrajích slabě žlutavý; v pásmu obvodovém doužkoval. Byv postupmo vždy silněji a silněji zahříván zhnědnul slabě a po té nabyl barvy bílé skrovnou měrou do červenava se klonící. Za vypalování nebylo lze postihnouti zápach po rohu zvířecím, nýbrž šířila se slabá vůně, jakovou vydávají zplodiny suché destillace látek rostlinných buď bezdusíkatých aneb dusíkem chudých, pokud ve vodách přicházívají.

Ve výparku nežíhaném i žíhaném vybavovala zředěná kyselina solná za prudkého vření plyn uhličitý; z výparku žíhaného kromě toho i sledy sírovodíka (ze sirníků vzniklých za žíhání redukcí částí síranů vlivem látek ústrojných).

E. Zkoumání vody dle kolikosti.

Také při kvantitativném rozboru vody bylo svědomitě šetřeno všech požadavků opatrnosti a nalezly upotřebení toliko ony methody, které se byly osvědčily při výzkumech podobných.

1. *Stanovení kysličníka křemičitého.*

a) 1998·6 gr. vody odkouřeno s podílem kyseliny solné do sucha, zbytek po vysušení opět odkouřen do sucha s dávkou kyseliny solné, výparek sušen při 130° C. atd. poskytlo 0·0573 gr. SiO_2,

tedy obsahuje 10000 gr. vody SiO_2, ... 0·286701 gr.

b) 3938·4 gr. vody podobně zpracované poskytlo 0·1117 gr. SiO_2, tedy obsahuje 10000 gr. vody SiO_2, . 0·283618 gr.

tedy průměrné SiO_2 . . . 0·285159 gr.

2. *Stanovení kyseliny sírové.*

a) Z 984·1 gr. vody poskytlo po vyloučení kyseliny křemičité 0·0515 gr. síranu bárnatého, ve kterém se nalézá 0·0176825 gr. SO_3,

tedy obsahuje 10000 gr. vody SO_3 . . . . . . 0·179682 gr.

b) Z 1998·6 gr. vody vyloučeno spůsobem podobným 0·1052 gr. síranu bárnatého, ve kterém se nalézá 0·03612042 gr. SO_3; tedy v 10000 gr. vody SO_3 . . 0·180728 gr.

tedy průměrně SO_3 . . . 0·180205 gr.

3. *Stanovení chloru v chloridech.*

a) 300 gr. vody poskytlo po odkouření na třetinu původního objemu 0·0100 gr. chloridu stříbrnatého, ve kterém se tají 0·0024739 gr. Cl; tedy obsahuje 10000 gr. vody Cl . . . , ... 0·0824633 gr.

b) 600 gr. vody poskytlo za stejných okolností 0·0201 gr. chloridu stříbrnatého, v němž se tají 0·0049724 gr. Cl;

tedy obsahuje 10.000 gr. vody Cl . . . . . . 0·0828733 gr.

tedy průměrně Cl . . . . 0·0826683 gr.

4. *Stanovení kyseliny dusičné.*

4500 gr. vody se odkouřilo s čistým louhem sodnatým do sucha a ze zbytku vypuzen za redukce práškem železovým a zinkovým destillací čpavek, jenž se pohltil kyselinou solnou v jímadle. Chloroplatičitanu amonatého váženo 0·0037 gr., jenž obsahuje 0·000283 gr. amoniaku, z kterého se vypočítává 0·0008989 gr. kysličníka dusičného;

tedy obsahuje 10.000 gr. vody N_2O_5 . . . . . 0·0019976 gr.

5. *Stanovení kyseliny fosforečné.*

8856·9 gr. vody odkouřeno s kyselinou solnou do sucha atd., vyloučena kyselina křemičitá a z procezeniny sraženy čpavkem fosforečnany; tyto se zcedily, vymyly, rozpustily v kyselině solné a z roztoku tohoto vyloučena kyselina fosforečná molybdénanem amonatým atd. Pyrofosforečnanu hořečnatého bylo 0·0011 gr., v němž se nachází 0·000703604 gr. kysličníka fosforečného;
tedy obsahuje 10.000 gr. vody P_2O_5 . . . . . 0·0007944 gr.

6. *Stanovení kyseliny uhličité.*

a) 553·1 gr. vody naspíláno přímo u pramene do láhve, v níž se nalézal amoniakálný roztok chloridu vápenatého; ze sraženiny získané vybaveno 0·1004 gr. kysličníka uhličitého;
tedy obsahuje 10.000 gr. vody CO_2 . . . . . 1·8172121 gr.
b) 644·65 gr. vody poskytlo za podobných okolností sedlinu z níž vybaveno 0·1163 gr. kysličníka uhličitého;
tedy obsahuje 10.000 gr. vody CO_2 . . . . . 1·8040797 gr.
průměrně tudíž CO_2 . . . *1·8106459 gr.*

7. *Stanovení kysličníků: železitého, hlinitého a fosforečného.*

a) 3997·2 gr. vody po odkouření s přísadou kyseliny solné a po vyloučení kyseliny křemičité poskytlo fosforečnanu a kysličníku železitého a hlinitého úhrnem 0·0052 gr., což činí na 10.000 gr. vody . . . . . . 0·0130991 gr.
Ony tři kysličníky byly uvedeny do roztoku a po skončené redukci kysličníka železitého stanoveno železo odměrnou analysí titrovaným roztokem chamaeleonu; spotřebováno chamaeleonu 3·116 krychl. centimetru (počítány kapky). Titr chameleonu obnášel po krychl. centimetru 0·0015134 gr. kysličníka železitého a proto nalezeno tohoto kysličníka 0·0047157544 gr. ve množství vody výše vytknutém a tedy v 10.000 gr. vody Fe_2O_3 . 0·0117976 gr.
b) 8856·9 gr. vody poskytlo, po odloučení kyseliny křemičité a fosforečné pak kysličníka hlinitého, — kysličníka železitého 0·0105 gr.; přepočítáno
na 10.000 gr. vody činí to Fe_2O_3 . . . . . . 0·0118552 gr.
průměrně tudíž Fe_2O_3 . . . *0·0118264 gr.*
aneb FeO . . . . *0·0106438 gr.*

Součet kysličníků: hlinitého, železitého a fosforečného činil na 10.000 gr. vody . . . . . 0·0130091 gr.
součet kysličníku železitého a fosforečného ale . . . . 0·0126208 gr.
zbývá tedy na kysličník hlinitý . . . . 0·0003883 gr.
v 10.000 gr. vody bylo tudíž Al_2O_3 . . . . . . 0·0003883 gr.

8. Stanovení kysličníka vápenatého.

a) Z 3997·2 gr. vody odstraněny kyseliny křemičitá a fosforečná, pak kysličníky železitý a hlinitý. Na to vyloučen z procezeniny šťavelanem amonatým šťavelan vápenatý za šetření všech opatrností a týž znovu se rozpustil a znovu srazil atd. Žíháním poskytl kysličníka vápenatého 0·2412 gr., což činí po přepočítání
na 10.000 gr. vody *CaO* . . . . 0·6034224 gr.
b) Z 8856·9 gr. vody bylo spůsobem svrchu vytknutým obdrženo kysličníka vápenatého 0·5333 gr.
přepočítáno na 10.000 gr. vody činí to *CaO* . . 0·6021305 gr.
průměrně tedy CaO . . . 0·6027765 gr.

9. Stanovení kysličníka hořečnatého.

a) po vyloučení vápníka z 3997·2 gr. vody ve spůsobě šťavelanu (viz odstavec předcházející) sražen známým spůsobem fosforečnan hořečnato-amonatý, jenž žíháním poskytl pyrofosforečnanu 0·2168 gr., jenž v sobě tajil 0·07813 gr. kysličníka hořečnatého; tedy
v 10000 gr. vody *MgO* . . . . 0·1954618 gr.
b) 8856·9 gr. vody poskytlo cestou vylíčenou 0·4780 gr. pyrofosforečnanu hořečnatého, což odpovídá 0·4723 gr. kysličníka hořečnatého,
tedy v 10000 gr. vody *MgO* . . . . 0·1945375 gr.
průměrně tudíž MgO . . . 0·1949996 gr.

10. Stanovení kysličníků: draselnatého, sodnatého a lithnatého.

V *novém* podílu vody, jenž vážil náhodou také 8857·9 gr. se vyšetřilo úhrnné množství chloridů: draselnatého, sodnatého a lithnatého, ovšem že teprvé po vyloučení kyseliny křemičité, sírové a fosforečné, čpavku atd.

Podíl oněch tří chloridů obnášel 0·3054 gr. a tedy by bylo poskytlo 10.000 gr. vody $KCl + NaCl + Li\,Cl$. 0·3448046 gr.

Z roztoku těchto chloridů sražen draslík ve způsobě chloroplatičitanu draselnatého, jehož množství činilo 0·0546 gr. Z této sloučeniny se vypočítává kysličníka draselnatého 0·0105433 gr.

10000 gr. vody muselo by poskytnouti K_2O . . *0·0118806 gr.*

V procezenině od chloroplatičitanu draselnatého stanoveny po vyloučení platiny chloridy sodnatý a lithnatý souhrnně; podíl jejich činil 0·2887 gr. — Směs obou chloridů se loužila éthero-alkoholem, čímž se odloučila převážná část chloridu lithnatého od chloridu sodnatého atd. Lithium se vyloučilo na konec po několikanásobném odpaření s roztokem fosforečnanu sodnatého a dávky louhu sodnatého ve spůsobě fosforečnanu lithnatého; množství tohoto činilo 0·0013 gr., v němž se tajilo kysličníka lithnatého 0·00050431 gr.

10000 gr. vody poskytlo by Li_2O . . . . *0·0005694 gr.*

Bylo dříve vytknuto, že souhrn chloridů draselnatého, sodnatého a lithnatého připravených z 8856·9 gr. vody činil . . . . 0·30540000 gr.
odečtou-li se od čísla tohoto podíly pro
chlorid draselnatý . . . . 0·01668576 gr.
a pro chlorid lithnatý . . . . 0·00142887 gr.
tedy úhrnem . . . 0·01811463 gr.
zbude pro chlorid sodnatý číslo . . . 0·28728537 gr.
Z toho se vypočítá kysličníku sodnatého 0·1522367 gr.

10000 gr. vody poskytlo by tudíž Na_2O . . . . *0·1718849 gr.*

11. Stanovení amoniaku.

5920·5 gr. vody se odkouřilo s podílem kyseliny solné do sucha; z výparku se vybavil destillací s louhem sodnatým čpavek, jenž se jímal v kyselině solné zředěné; roztok ten se odkouřil s přiměřenou dávkou chloridu platičitého a vyloučil se spůsobem známým chloroplatičitan amonatý. Týž poskytl po vyžíhání svém 0·0023 gr. platiny; z té vypočítává se podíl na čpavku 0·0003975 gr.

10000 gr. vody poskytlo by NH_3 . . . . 0·0006714 gr.

12. Stanovení kysličníků: vápenatého a hořečnatého v podílu výparku rozpustném ve vodě.

Výparek ze 492·8 gr. vody byv loužen vodou teploty obecné poskytl podíl rozpustný a nerozpustný. Z podílu rozpustného vyloučen vápník a vážen ve spůsobě kysličníka vápenatého, jehož bylo 0·0031 gr., kdežto hořčík vyšetřen ve spůsobě pyrofosforečnanu hořečnatého, jehož bylo 0·00265 gr.; z posledního se vypočítává pro kysličník hořečnatý hodnota 0·000955 gr.

Rozpustný podíl výparku z 10000 gr. vody musí tudíž obsahovati *CaO* . . . . 0·062906 gr.
a kromě toho také *MgO* . . . . 0·0193791 gr.

F. Kontrolné zkoušky hromadné.

1. Stanovení výparku.

a) 300·06 gr. vody poskytlo výparku 0·0700 gr. po vysušení při 160°*C.*

10000 gr. vody poskytlo by tudíž výparku . . . 2·3328667 gr.

b) 600·12 gr. vody dalo 0·1406 gr. výparku vysušeného při teplotě svrchu vytknuté.

10000 gr. vody poskytlo by výparku . . . . . 2·3428648 gr.
průměrná hodnota pro *výparek* činí tedy . . . *2·3378658 gr.*

2. Stanovení ztráty, které doznává výparek žíháním.

Výparek ze 600·12 gr. vody se vyžíhal co nejopatrněji a shledáno po zvážení zbytku v exsiccatoru vychladlého, že ztráta žíháním spůsobená činí 0·0134 gr., kdežto zbytek po žíhání vážil 0·1272 gr. — Z číslic těch se vypočítává pro výparek z 10000 gr. vody hodnota pro ztrátu žíháním . . . . *0·2232886 gr.*
a pro zbytek po vyžíhání . . . . *2·1145772 gr.*

Váha zbytku výparku po vyžíhání byla stanovena odečtením ztráty žíháním (0·2232886 gr.) od *průměrné* hodnoty pro výparek (2·3378658 gr.).

3. Stanovení váhy výparku po převedení sloučenin jeho na sírany.

a) Výparek z 300·06 gr. vody vážící 0·0700 gr. co nejopatrněji se navlhčil zředěnou kyselinou sírovou

v misce pokryté a po té se přičinila sírová v dávce přebytečné, nečež se kapanina odkouřila do sucha a posléze se zbytek vyžíhal; na to se navlažil roztokem uhličitanu amonatého, vysušil a vyžíhal se znovu a výkon ten se opakoval. —

Váha síranů a ostatních přímětků činila 0·0871 gr. — což obnáší se zřetelem na 10000 gr. vody . . . . 2·9027527 gr

b) Po té se přepočítaly zásady rozborem stanovené na sírany a připojily se k nim i ostatní součástky výparku, tak jak to vysvítá z přehledu, jenž tuto následuje a k 10000 částem vody se vztahuje:

Síranu vápenatého vypočteno	1·4638858 gr.
síranu hořečnatého „	0·5849988 gr.
síranu sodnatého „	0·3936718 gr.
síranu draselnatého „	0·0219767 gr.
síranu lithnatého „	0·0016268 gr.
síranu železitého (zásaditého) vypočteno .	0·0177396 gr.
síranu hlinitého (zásaditého) vypočteno .	0·0006899 gr.
k tomu: kysličníka křemičitého vypočteno .	0·2851595 gr.
kysličníka fosforečného (zásaditého) vypočteno	0·0007944 gr.
úhrnem	2·7704433 gr.

Váha síranů atd. vyšetřena výpočtem činila s ohledem na 10000 částí vody . . . . 2·7704433 gr.

G. Zkoumání látek ve vodě rozptýlených.

Voda z pramene sv. Vintíře zkoušela se na součástky kalící toliko spůsobem povšechným chemicky i mikroskopicky.

a) Z 10·4 litru vody se vyloučily látky rozptýlené, sušily se při 105° *C.* a zvážily se. Množství jejich činilo 0·0756 gr.; z podílu toho připadá 0·0093 gr. na vrub látek *těkavých* a *ústrojných* a 0·0663 gr. na vrub netěkavých látek *neústrojných.*

Na *litr* vody připadá tudíž látek kalících vůbec 7·26923 milligr.
Z toho bylo látek ústrojných a těkavých . . . . 0·89423 milligr.
a látek neústrojných, netěkavých . . . . 6·37500 „

b) Nový podíl látek kalících, jenž vážil 0·042 gr. (sušený při 105° C.) vyvářel se opět a opět čistým alkoholem a rozloučil se tím na část nerozpustnou a rozpustnou.

Podíl *nerozpustný* vážil 0·0284 gr. a *rozpustný* 0·0136 gr.; vážení se dálo po vysušení obou zbytků při 105° C.

Na *litr* vody připadá tudíž kalících látek rozpustných v alkoholu . . . . 2·35387 milligr.
nerozpustných v alkoholu . . . . 4·91536 „

Z rozpustného v alkoholu podílu látek kalících bylo sloučenin ústrojných . . . . 0·27692 milligr.
a neústrojných . . . . 2·07695 „
úhrnem . . . . 2·35387 milligr.

c) Co do povahy látek kalících vyšetřeno, že se skládají ze sloučenin trouchovitých (klky), hydroxydu železitého (klky), jílu bělavého, přejemého písku křemenného a živcového a lupenů slídy (najmě světlé), detritu ústrojného, chlupů rostlinných (zvláště z kořenů), útržků a úlomků tkaniva pokožkového, lýkového a dřevného, ze zástupců rozsivek (Diatoma, Navicula, Melosira, Synedra a j.), amoeb a ojedinělých spór plísní, pak kvasinek a nálevníků. Všechny organismy jen sporadicky či ojediněle přicházely; konečně objeveny i částečky pryskyřice sosnové.

H. Přepočítávání kyselin a zásad na sole.

Kysličníka *vápenatého* vyšetřeno celkem . . . . . . 0·6027765 gr.
z množství toho nalezeno v rozpustné částce výparku . 0·0629060 gr.
sloučeno s podílem kyseliny sírové . . . . 0·0898657 gr.
na *síran vápenatý* . . . . 0·1527717 gr.
Kyseliny *sírové* vyšetřeno celkem . . . . 0·1802050 gr.
od toho množství budiž odečten podíl vázaný na kysličník vápenatý . . . . 0·0898657 gr.
a zbývá tedy kyseliny sírové . . . . 0·0903393 gr.,
jež je vázána na kysličník draselnatý a sodnatý.
Kysličníka d r a s e l n a t é h o vyšetřeno celkem . . . . 0·0118806 gr.
jenž vyžaduje kyseliny sírové . . . . 0·0100896 gr.
a skytá s í r a n u d r a s e l n a t é h o . . . . 0·0219602 gr.

Kyseliny sírové ještě zbývá	0.0802497 gr.
jež je vázána s podílem kysličníka sodnatého	0·0621935 gr.
na *síran sodnatý*	0·1424432 gr.
Kysličníka *sodnatého* zbývá ještě	0·1096914 gr.
Týž je vázán částečně na kyselinu dusičnou, které bylo	0·0019976 gr.
k tomu podíl příslušný kysličníka sodnatého	0·0011282 gr.
skytá *dusičnanu sodnatého*	0·0031258 gr.
Na konec zbývá ještě kysličníka *sodnatého*	0·1085632 gr.
Kysličníka *hořečnatého* vyšetřeno celkem	0·1949996 gr.
Z množství toho se nalézal ve vodném výtažku výparku podíl	0·0193791 gr.
ve spůsobě chloridu hořečnatého; tento chlorid obsahoval *hořčíka*	0·0116274 gr.
a chloru	0·0343977 gr.
podíl *chloridu hořečnatého* činil tedy	0·0460251 gr.
Jelikož bylo *chloru* vyšetřeno celkem	0·0826684 gr.
zbývá ho po odečtení svrchu uvedené částky ještě	0·0482707 gr.
Tento zbytek chloru je sloučen s podílem *sodíka*	0·0312739 gr.
na *chlorid sodnatý*, jehož bylo	0·0795446 gr.
Zbývající část kysličníka *sodnatého* obnášela	0·1085632 gr.
Odečte-li se od množství toho podíl sodíka obsažený v chloridu sodnatém, ovšem že po předcházejícím výpočtu na kysličník, jehož je	0·0421517 gr.
zbývá ještě *kysličníku sodnateho*	0·0664115 gr.
Tento podíl kysličníka sodnatého je sloučen s podílem kyseliny uhličité	0·0471307 gr.
na normálný *uhličitan sodnatý*	0·1135422 gr.
k tomu kyseliny uhličité	0·0471307 gr.
skytá *kyselého uhličitanu sodnatého*	0·1606729 gr.
Kysličníka *lithnatého* bylo vyšetřeno celkem	0·0005694 gr.
Týž trvá ve sloučení s podílem kyseliny uhličité	0·0008351 gr.
ve spůsobě *uhličitanu lithnatého*, jehož je	0·0014045 gr.
Připočte-li se k tomu kyseliny uhličité	0·0008351 gr.
vznikne *kyselého uhličitanu lithnatého*	0·0022396 gr.
Amoniaku bylo vyšetřeno celkem	0·0006714 gr.
Přepočítáním jeho na kysličník vzroste podíl ten na	0·0010268 gr.
jenž váže kyseliny uhličité částku	0·0008688 gr.
na *uhličitan amonatý*, jehož je	0·0018956 gr.
Připočte-li se k tomu kyseliny uhličité	0·0008688 gr.
vznikne *kyselého uhličitanu amonatého*	0·0027644 gr.

Kysličníka *hořečnatého* zbyla po odečtení podílu hořčíka obsaženého v chloridu hořečnatém, přepočítaného na kysličník, částka . . . . 0·1756205 gr.
jež váže kyseliny uhličité podíl . . . . 0·1931826 gr.
na *uhličitan hořečnatý*, jehož je . . . . 0·3688031 gr.
Připočte-li se k tomu kyseliny uhličité . . . . . . 0·1931826 gr.
vznikne *kyselého uhličitanu hořečnatého* . . . . 0·5619857 gr.
Kysličníka *vápenatého* zbylo (po odečtení podílu obsaženého v síranu vápenatém) ještě . . . . 0·5398705 gr.
jenž váže kyseliny uhličité částku . . . . 0·4241839 gr.
na *uhličitan vápenatý*, jehož je . . . . . . 0·9640544 gr.
Připočte-li se k tomu kyseliny uhličité . . . . . . 0·4241839 gr.
vznikne *kyselého uhličitanu vápenatého* . . . . 1·3882383 gr.
Kysličníka *hlinitého* bylo vyšetřeno celkem . . . . 0·0003883 gr.
Týž je sloučen s podílem kyseliny fosforečné . . . 0·0005291 gr.
na neutr. *fosforečnan hlinitý* . . . . 0·0009174 gr.
Kyseliny fosforečné bylo vyšetřeno celkem . . . . . 0·0007944 gr.
po odečtení podílu obsaženého ve fosforečnanu hlinitém 0·0005291 gr.
zbývá ještě kyseliny fosforečné . . . . 0·0002653 gr.
která je vázána na podíl kysličníka železnatého . . . 0·0002809 gr.
na neutr. *fosforečnan železnatý*, jehož je . . . . 0·0005462 gr.
Kysličníka železnatého bylo vyšetřeno celkem . . . . 0·0106438 gr.
Odečte-li se od množství tohoto podíl obsažený ve fosforečnanu železnatém . . . . 0·0002809 gr.
zbývá ještě kysličníka železnatého podíl . . . . 0·0103529 gr.
jenž je vázán na podíl kyseliny uhličité . . . . . . 0·0007712 gr.
a skytá *uhličitanu železnatého* . . . . 0·0111241 gr.
Přičte-li se k tomu ještě přiměřená časť uhličité . . 0·0007712 gr.
vznikne *kyselého uhličitanu železnatého* . . . . 0·0118953 gr.
Kyseliny uhličité bylo vyšetřeno celkem . . . . . . 1·8106459 gr.
Z množství toho připadá na norm. uhličitany časť *vázaná* 0.6669723 gr.
druhá časť je obsažena v kyselých uhličitanech ve spůsobě kyseliny uhličité *na polo vázané* . . . . . . 0.6669723 gr.
úhrnem tedy vyšetřeno kyseliny uhličité *vázané* a *na polovázané* . . . . 1·3339446 gr.
Odečte-li se podíl ten s celkového množství kyseliny uhličité svrchu uvedeného, zbude podíl na *volnou* kyselinu uhličitou . . . . 0·4767013 gr.
Toto množství *kyseliny uhličité volné* činí při 0° C a za tlaku 760 mm . . . . 242·12 cm³
aneb při teplotě pramene + 90° C a tlaku normálném 250·01 cm³.

Sečtou-li se veškeré sloučeniny a pojmou-li se do počtu uhličitany jako normálné sloučeniny (nikoli jako kyselé uhličitany) a železo jako kysličník železitý a odečte-li se od souhrnu hodnota pro uhličitan amonatý, nabudeme čísla . . . . 2·1916146 gr.
Stanovením *přímým* činil souhrn ten (výparek) . . . . 2·3378658 gr.
Rozdíl obou čísel činí . . . . +0·1462512 gr.
a připadá na vrub *látek ústrojných* a sloučenin, jichž bylo lze dokázati toliko ve sledech.

J. Přehled výsledků lučebného zkoumání vody.

a) *Přehled prvý.* Uhličitany jsou pojaty do počtu ve způsobě solí normálných. — Teplota pramene činila při čerpání +9° C. Tlak vzduchu obnášel 752·5 mm. — Měrná váha vody vyšetřená při 15° C činila 1·00020002.

V 10000 gramech vody je obsaženo:

síranu draselnatého	0·0219702	gr.
síranu sodnatého	0·1424432	„
síranu vápenatého	0·1527717	„
dusičnanu sodnatého	0·0031258	„
chloridu sodnatého	0·0795446	„
chloridu hořečnatého	0·0460251	„
uhličitanu sodnatého	0·1135422	„
uhličitanu lithnatého	0·0014045	„
uhličitanu vápenatého	0·9640544	„
uhličitanu hořečnatého	0·3688031	„
uhličitanu železnatého	0·0111241	„
fosforečnanu železnatého (neutr.)	0·0005462	„
fosforečnanu hlinitého (neutr.)	0·0009174	„
kysličníka křemičitého	0·2851595	„
ústrojných látek a j.	0·1462512	„
kysličníka manganatého	sledy	
kyseliny borové	sledy	
fluoru	sledy	
na polo vázané kyseliny uhličité	0·6669723	„
a volné kyseliny uhličité	0·4767013	„
které je při teplotě +9° C a tlaku 760 mm	250·01	cm^3

b) *Přehled druhý.* Uhličitany jsou pojaty do počtu ve spůsobě *kyselých* uhličitanů bezvodých.

V 10000 gramech vody je obsaženo:

síranu draselnatého	0·0219702	gr.
síranu sodnatého	0·1424432	„
síranu vápenatého	0·1527717	„
dusičnanu sodnatého	0·0031258	„
chloridu sodnatého	0·0795446	„
chloridu hořečnatého	0·0460251	„
kyselého uhličitanu sodnatého	0·1606729	„
kyselého uhličitanu lithnatého	0 0022396	„
kyselého uhličitanu amonatého	0·0027644	„
kyselého uhličitanu vápenatého	1·3882383	„
kyselého uhličitanu hořečnatého	0·5619857	„
kyselého uhličitanu železnatého	0·0118953	„
fosforečnanu železnatého (neutr.)	0·0005462	„
fosforečnanu hlinitého (neutr.)	0·0009174	„
kysličníka křemičitého	0·2851595	„
ústrojných látek	0·1462512	„
kyseliny uhličité volné	0·4767013	„
čili při teplotě $+9^0$ C a za tlaku 760 mm, volné kyseliny uhličité	250·01	cm^3

c) *Přehled třetí.* Uhličitany jsou pojaty do počtu ve spůsobě solí *normalných.*

V *litru* vody je obsaženo v milligramech:

síranu draselnatého	2·19753	mgr.
síranu sodnatého	14·24719	„
síranu vápenatého	15·28023	„
dusičnanu sodnatého	0·31264	„
chloridu sodnatého	7·95605	„
chloridu hořečnatého	4·60343	„
uhličitanu sodnatého	11·35649	„
uhličitanu lithnatého	0·14048	„
uhličitanu amonatého	0·18059	„
uhličitanu vápenatého	96·42472	„
uhličitanu hořečnatého	36·88769	„
uhličitanu železnatého	1·11266	„
fosforečnanu železnatého (neutr.)	0·05463	„
fosforečnanu hlinitého (neutr.)	0·09176	„
kysličníka křemičitého	28·52165	„
ústrojných látek	14·62805	„

na polo vázané kyseliny uhličité	66·71057 mgr.
volné kyseliny uhličité	47·67966 „
kteréžto množství činí při teplotě + 9° C a tlaku 760 mm, také	25·006 cm³.

a) Přehled čtvrtý. Uhličitany jsou pojaty do počtu ve spůsobě bezvodých solí *kyselých.*

V *litru* vody je obsaženo v milligramech:

síranu draselnatého	2·19753 mgr.
síranu sodnatého	14·24719 „
síranu vápenatého	15.28023 „
dusičnanu sodnatého	0·31264 „
chloridu sodnatého	7·95605 „
chloridu hořečnatého	4·60343 „
kyselého uhličitanu sodnatého	16·09930 „
kyselého uhličitanu lithnatého	0·22401 „
kyselého uhličitanu amonatého	0·27649 „
kyselého uhličitanu vápenatého	138·85159 „
kyselého uhličitanu hořečnatého	56·20981 „
kyselého uhličitanu železnatého	1·18977 „
fosforečnanu železnatého (neutr.)	0·05463 „
fosforečnanu hlinitého (neutr.)	0·09176 „
kysličníka křemičitého	28·52165 „
ústrojných látek	14·62805 „
kyseliny uhličité volné	47·67966 „
kteréžto množství činí při teplotě + 9° C a tlaku 760 mm také	25·006 cm³.

K. Posudek závěrečný.

Vzhledem k výsledkům výzkumu lučebného v statích předcházejících vylíčeným, lze vodu z pramene sv. Vintíře v lázních Letinských prohlásiti za léčivou vodu mírně alkalinickou.

37.

Contributions à la théorie des fonctions.

Par **M. Lerch.** Lu dans la séance du 15. octobre 1886.

Dans le tome 79 du *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Mr. *Du Bois-Reymond* a publié l'extrait d'une lettre de mon illustre maître Mr. *Weierstrass* se rapportant à une remarquable série trigonométrique qui représente une fonction continue d'une variable réelle,*) fonction qui n'a point de dérivée déterminée quelle que soit la valeur de la variable.

Dans ce qui suit je donne deux fonctions bien simples jouissant de la propriété de n'avoir pas une dérivée déterminée pour certaines valeurs de la variable qui se présentent dans chaque intervalle en nombre infini, propriété analogue à celle dont jouissent les fonctions construites par *Hankel* **) au moyen de son *principe de condensation des singularités*, et j'y ajoute la démonstration d'une propriété des transcendantes elliptiques et de quelques autres.

1. La première fonction, dont je vais m'occuper, est donnée par la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 2^n \pi x}{2^n}, \tag{1}$$

convergente pour toutes les valeurs réelles de x. Je démontre d'abord que cette fonction n'a pas une dérivée déterminée pour $x = 0$, c'est à dire que le quotient $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ ne se rapproche d'aucune limite déterminée, si l'on y fait x décroître indéfiniment.

Car on a

$$-\frac{f(x)-f(0)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-\cos 2^n \pi x}{x} \tag{2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^2 2^{n-1} \pi x}{2^{n-1} x}.$$

---

*) Cette fonction a été l'objet d'une recherche géométrique et analytique de Mr. *Chr. Wiener* dans le même Journal t. 90.

La lettre de Mr. *Weierstrass* se trouve aussi dans son excellent livre *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, p. 97.

**) V. les Mathematische Annalen, t. 20, p. 63.

Si l'on y pose $x = x_1 = \frac{k}{2^\alpha}$, k et α étant deux entiers, le premier quelconque, le second positif, on a évidemment:

$$(3) \qquad -\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} = \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{\sin^2 2^{n-\alpha-1} k\pi}{2^{n-\alpha-1} k}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{\alpha+1} 2^m \sin^2 \frac{\pi k}{2^m}.$$

Laissons k constant et faisons α croître indéfiniment, alors nous aurons $\lim\limits_{\alpha=\infty} x_1 = 0$ et de plus

$$(4) \qquad -\lim_{x_1=0} \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^{\infty} 2^m \sin^2 \frac{\pi k}{2^m}.$$

Le second membre est évidemment fini, différent de zéro et du même signe que k, c'est à dire du même signe que x_1 de sorte que les deux limites

$$\lim_{x_1=0} \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1}, \quad \lim \frac{f(-x_1) - f(0)}{-x_1}$$

sont différentes de zéro et de signes contraires. Il en résulte que la dérivée $\lim\limits_{x=0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ n'existe pas, c. qu. f. d.

2. Maintenant je démontre que la fonction (1) n'a pas de dérivée, si la variable x prend une valeur de la forme $\frac{a}{2^q}$, a et q étant deux nombres entiers quelconques. Car on trouve facilement:

$$f\left(\frac{a}{2^q}\right) = \sum_{n=0}^{q} \frac{\cos 2^{n-q} a\pi}{2^n} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

$$f\left(\frac{a}{2^q} + h\right) = \sum_{n=0}^{q} \frac{\cos (2^{n-q} a + 2^n h)\pi}{2^n}$$

$$+ \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{\cos 2^n h\pi}{2^n},$$

de sorte que l'on obtient:

$$\frac{f\left(\frac{a}{2^q}+h\right)-f\left(\frac{a}{2^q}\right)}{h}=\sum_{n=0}^{q}\frac{\cos\left(2^{n-q}a+2^n h\right)\pi-\cos 2^{n-q}a\pi}{2^n h}$$
$$+\sum_{n=q+1}^{\infty}\frac{\cos 2^n h\pi-1}{2^n h}.$$

Si h s'approche indéfiniment de zéro, la première somme a une limite déterminée et finie que je crois inutile d'écrire, et la seconde ne s'approche d'aucune limite indépendente du signe de h, d'après ce que nous avons dit plus haut, d'où il s'ensuit que pour $x=\frac{a}{2^q}$ la dérivée $\frac{df(x)}{dx}$ n'existe point.

Il ne nous reste que de remarquer que les points représentant les valeurs de la forme $x=\frac{a}{2^q}$ se trouvent dans chaque intervalle fini un nombre infini de fois.

3. Prenons maintenant la série

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n!\,\pi x}{n!} \tag{5}$$

convergente pour toutes les valeurs réelles de x et formons le quotient

$$\frac{f(0)-f(x)}{x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{1}{2}n!\,\pi x}{n!\,x}.$$

Si l'on pose $x_1=\frac{k}{\alpha!}$, k et α étant deux nombres entiers impairs, le premier quelconque, le second positif, on trouve:

$$\frac{f(0)-f(x_1)}{x_1}=2\sum_{u=0}^{\alpha}\frac{\sin^2\frac{n!}{\alpha!}\cdot\frac{k\pi}{2}}{\frac{n!}{\alpha!}k}$$
$$=\frac{2}{k}+2\sum_{n=0}^{\alpha-1}\frac{\sin^2\frac{n!}{\alpha!}\cdot\frac{k\pi}{2}}{\frac{n!}{\alpha!}k}.$$

La dernière somme est positive et plus petite que la suivante:*)

$$\sum_{n=0}^{\alpha-1} \frac{\left(\frac{n!}{\alpha!}\frac{k\pi}{2}\right)^2}{\frac{n!}{\alpha!}|k|} = \frac{1}{4}|k|\pi^2 \sum_{n=0}^{\alpha-1} \frac{n!}{\alpha!}$$

$$= \frac{1}{4}|k|\pi^2 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)} + \cdots + \frac{1}{\alpha(\alpha-1)\ldots 2}\right)$$

et celle-ci est inférieure à la quantité que l'on obtient en remplaçant les fractions $\frac{1}{\alpha(\alpha-1)}$, $\frac{1}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2}$, etc. qui sont au nombre de $\alpha-1$ par la plus grande d'entre elles, de sorte que la somme considérée est moindre que la quantité

$$\frac{1}{4}|k|\pi^2\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha-1}{\alpha(\alpha-1)}\right) = \frac{1}{2\alpha}|k|\pi^2$$

qui devient infiment petite si l'on fait α croître au-delà de toute limite.

Il en suit la formule

$$\lim_{x_1=0} \frac{f(0)-f(x_1)}{x_1} = \frac{2}{k},$$

d'où il résulte que la quantité $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ ne s'approche d'aucune limite déterminée quand x devient infiniment petit.

4. Mettons dans la série (5) pour x la valeur $x_0 = \frac{a}{q!}$; nous aurons

$$f(x_0) = \sum_{n=0}^{q_0} \frac{\cos\frac{n!\,a\pi}{q!}}{n!} + \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!},$$

q_0 désignant ou q ou $q+1$ suivant que q est impair ou non; on aura de plus

*) Nous désignons par $|k|$ la valeur absolue de k.

$$f(x_0+h)=\sum_{n=0}^{q_0}\frac{\cos\left(\frac{n!\,a}{q!}+n!\,h\right)\pi}{n!}+\sum_{n=q_0+1}^{\infty}\frac{\cos n!\,\pi h}{n!},$$

d'où l'on calcule

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\sum_{n=0}^{q_0}\frac{\cos\left(\frac{n!\,a}{q!}+n!\,h\right)\pi-\cos\frac{n!\,a\pi}{q!}}{n!\,h}$$

$$+\sum_{n=q_0+1}^{\infty}\frac{\cos n!\,\pi h-1}{n!}.$$

Quand on fait h décroître indéfiniment, la première somme s'approche d'une limite finie et déterminée tandis que la seconde devient indéterminée comme nous l'avons vu auparavant, de sorte que la fonction $f(x)$ donnée par la série (5) n'a jamais une dérivée, si l'on prend pour x une valeur de la forme $\frac{a}{q!}$, a et q étant deux nombres entiers impairs. On voit que l'ensemble des points correspondants aux valeurs de cette forme est condensé dans tout l'intervalle.

5. De ce que nous avons démontré sur les séries (1) et (5) il résulte immédiatement que les deux fonctions analytiques suivantes

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}=z+z^2+z^4+z^8+z^{16}+z^{32}+\ldots.,$$

$$\Psi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}z^{n!}=z+z^{1.2}+z^{1.2.3}+z^{1.2.3.4}+\ldots.$$

n'existent que pour les valeurs réelles ou imaginaires de z d'un module inférieur à l'unité, c'est à dire représentées par les points à l'intérieur du cercle fondamental dont l'équation est $|z|=1$, et que ces fonctions ne peuvent pas être continuées en dehors de ce cercle.

Des fonctions de la même nature se rencontrent dans la théorie des fonctions elliptiques.

La série fondamentale de *Jacobi*

(1) $$\vartheta_{00}(u\,|\,\tau)=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{\pi i(\nu^2\tau+2\nu u)}=\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}q^{\nu^2}e^{2\nu u\pi i},\quad q=e^{\tau\pi i},$$

n'est convergente que si le module de q est moindre que l'unité quelque soit la valeur de u.

Je dis que si l'on prend pour u une valeur fixe, la série (1) devient une fonction de q ne pouvant pas être continuée au delà du cercle fondamental $|q| \leqq 1$.

Prenons d'abord pour u une valeur essentiellement imaginaire; la fonction (1) s'annule pour toutes les valeurs de τ pour lesquelles on peut déterminer deux nombres entiers m, n tels que

$$u = \frac{1}{2}(1+\tau) + m + n\tau,$$

c'est à dire pour toutes les valeurs de τ de la forme

$$\tau = \frac{2u - (2m+1)}{2n+1},$$

où l'entier n est assujetti à la condition de rendre positive la partie imaginaire de τ. Mais les points représentant ces valeurs sont distribués dans le demiplan positif (correspondant aux valeurs dont la partie imaginaire est positive) de telle manière que chaque cercle ayant son centre sur l'axe réel en contient une infinité, de sorte que chaque point de l'axe réel est un point-limite de l'ensemble constitué par ces points. Donc l'axe réel est une ligne singulière de la fonction $\vartheta_{00}(u|\tau)$ considérée par rapport à la variable τ, ou ce qui est le même, la circonférence du cercle fondamental est une ligne singulière de la fonction $\vartheta_{00}(u|\tau) = \vartheta_{00}(u, q)$ considérée par rapport à la variable q, de sorte que cette fonction ne peut pas être continuée en dehors dudit cercle, c. qu. f. d.

Le raisonnement précédent n'est pas appliquable dans le cas où la valeur fixe de u est réelle.

Posons $u = (\alpha + \beta\tau) u_1$, $\tau_1 = \frac{\gamma + \delta\tau}{\alpha + \beta\tau}$, α, β, γ, δ étant des nombres entiers satisfaisant à la condition

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

et nous aurons, comme on sait,*) la formule

*) Une démonstration remarquable de cette formule a été donnée par mon illustre maître Mr. *Kronecker* dans les Monatsberichte de Berlin, 1880: „Ueber den vierten Gauss'schen Beweis etc.“

$$\vartheta_{00}(u_1|\tau_1) = \varepsilon\; e^{\pi i \beta u u_1} \sqrt{\alpha + \beta\tau}\; \vartheta_{1+\beta+\delta,\, 1-\alpha-\gamma}(u|\tau), \tag{2}$$

dans laquelle ε désigne une racine huitième de l'unité.

Si l'on fait $\tau = vi$ en prenant pour u_1 une valeur réelle constante différente de zéro, et si l'on fait la variable réelle v croître au-delà de toute limite, la partie réelle de la quantité

$$\pi i \beta u u_1 = \pi\beta\,(\alpha i - \beta v)\, u_1^2$$

deviendra négative et infinie, de sorte que la quantité

$$\varepsilon e^{\pi i \beta u u_1} \sqrt{\alpha + \beta\tau} = \varepsilon e^{\pi\beta(\alpha i - \beta v)\, u_1^2} \sqrt{\alpha + \beta v i}$$

deviendra infiniment petite, et il ne nous reste que de rechercher le second facteur dans le second membre de l'équation (2). En écrivant pour abréger $1 + \beta + \delta = g$, $1 - \alpha - \gamma = h$, nous aurons par définition

$$\vartheta_{g,h}(u|\tau) = (-1)^{gh} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i [(\nu + \frac{1}{2} g)^2 \tau + 2(\nu + \frac{1}{2} g)(u + \frac{1}{2} h)]}$$

et si l'on y remplace τ par vi, et u par $(\alpha + \beta v i)\, u_1$, chaque terme dépendant de τ deviendra infiniment petit, de sorte que cette quantité s'approche ou de zéro ou de l'unité suivant que g est impair ou non. Ainsi la quantité (2) devient infiment petite pour $v = \infty$, c'est à dire

$$\lim_{v=\infty} \vartheta_{00}\left(u_1 \,\middle|\, \frac{\gamma + \delta v i}{\alpha + \beta v i}\right) = 0.$$

Cette formule exprime que si la variable τ_1 s'approche indéfiniment d'une valeur rationnelle quelconque $\frac{\delta}{\beta}$ en restant toujours sur une circonférence ayant son centre sur l'axe réel, la fonction $\vartheta_{00}(u_1|\tau_1)$, où l'on a donné à u_1 une valeur réelle constante, devient infiniment petite, de sorte que l'axe réel est une ligne singulière de cette fonction, en exceptant le cas où celle-ci est identiquement nulle.

Il reste encore à examiner le cas où l'on a $u_1 = 0$.

Dans ce cas la formule (2) nous donne

$$\vartheta_{00}\left(0 \,\middle|\, \frac{\gamma + \delta v i}{\alpha + \beta v i}\right) = \varepsilon \sqrt{\alpha + \beta v i}\; \vartheta_{1+\beta+\delta,\, 1-\alpha-\gamma}(0|vi)$$

de sorte qu'on aura d'après la formule (3):

$$\vartheta_{00}\left(0\left|\frac{\gamma+\delta vi}{\alpha+\beta vi}\right.\right)=\varepsilon(-1)^{gh}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}e^{-\pi v(\nu+\frac{1}{2}g)^2}\sqrt{\alpha+\beta vi};$$

alors si g est pair, le second membre se décompose en un terme infiniment croissant avec v et en une série des termes infiments petits, et devient par conséquent infiniment grand. Si, au contraire, le nombre g est impair, tous les termes deviendront infiniment petits ainsi que la série elle-même. Il en résulte que si la variable τ_1 s'approche indéfiniment d'une valeur rationnelle quelconque $\frac{\delta}{\beta}$ en restant toujours sur une certaine circonférence ayant son centre sur l'axe réel, la fonction $\vartheta_{00}(o|\tau_1)$ deviendra ou infiniment petite ou infiniment grande suivant que la somme $\delta+\beta$ est paire ou non, c'est à dire si le numérateur et le dénominateur de la fraction réduite $\frac{\delta}{\beta}$ sont tous les deux impairs ou non,*) d'où il suit que l'axe réel est une ligne singulière de la fonction cousidérée, c. qu. f. d.

Remarquons encore que la même chose peut être démontrée des trois autres fonctions de Jacobi ϑ_{01}, ϑ_{10}, ϑ_{11}.

6. La fonction $\vartheta_{00}(u|\tau)$ pouvant s'exprimer par le produit

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n-1}\xi^2)(1+q^{2n-1}\xi^{-2}),$$

où l'on a écrit $\xi=e^{\tau\pi i}$, n'est qu'un élément d'une classe trés-étendue des fonctions n'existant qu'à l'interieur du cercle fondamental et pouvant s'exprimer en produit de la forme

$$\prod_{n-1}^{\infty}(1-q^{\alpha_n}\xi),$$

α_1, α_2, α_3, ... désignant des nombres entiers positifs parmi lesquels il ne se trouve qu'un nombre limité qui sont égaux entre eux. Ce produit est convergent pour toutes les valeurs de q d'un module in-

*) Une démonstration semblable se trouve chez Mr. *Weierstrass* à la page 95 de son oeuvre cité plus hant. Une autre démonstration de ce fait est contenue dans une formule découverte par *Cauchy* (*v. Kronecker* l. c.).

férieur à l'unité et définit une fonction de cette variable que nous désignerons par $\varphi(q, \xi)$. Si la valeur de ξ est supérieure à l'unité, la fonction $\varphi(q, \xi)$ devient zéro pour toutes les valeurs de q de la forme :

$$q = \left(\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{\alpha_n}},$$

valeurs qui sont représentées par des points placés à l'intérieur du cercle fondamental et constituant un ensemble infini dont les points-limites remplissent toute la circonférence dudit cercle, d'où il résulte que la fonction $\varphi(q, \xi)$ ne peut pas être continuée audelà de ce cercle, si le module de ξ est supérieur à l'unité.

Telle est par exemple la fontion

$$\varphi(q, \xi) = (1 + q\xi)(1 + q^2\xi)(1 + q^4\xi)(1 + q^8\xi) \ldots (1 + q^{2^n}\xi) \ldots;$$

mais on en ne peut point conclure que la fonction jouisse de la même propriété singulière pour $\xi = 1$. Car on a ici

$$\varphi(q, 1) = \frac{1}{1-q},$$

fonction existant pour toutes les valeurs de q.

Le développement de cette fonction $\varphi(q, \xi)$ suivant les puissances croissantes de q est donné par la formule

$$\varphi(q, \xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \xi^{a_\nu} q^\nu, \quad a_0 = 0,$$

a_ν désignant le nombre des termes de l'expression

$$\nu = 2^{\nu_1} + 2^{\nu_2} + \ldots + 2^{\nu_m}$$

$$(m = a_\nu;\ 0 \leqq \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_m).$$

Pour $\nu = 13$ on a par exemple: $\nu = 1 + 4 + 8$ donc $a_{13} = 3$.

D'autres fonctions possédant la propriété qui nous occupe sont fournies par les produits de la forme plus générale:

$$\Phi(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{\alpha_n} c_n).$$

Pour $\alpha_n = n^2$, $c_n = a^n$, a étant une quantité de module supérieur à l'unité, cette formule nous donne la fonction

$$\psi(q, a) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{n^2} a^n)$$

qui devient zéro pour toutes les valeurs contenue dans la formule

$$q = \sqrt[n^2]{\frac{1}{a^n}} = a^{-\frac{1}{n}},$$

valeurs qui se présentent dans chaque environ de tous les points de la circonférence $|q| = 1$, de sorte que cette ligne-ci est une ligne singulière de la fonction considérée.

7. La circonférence du cercle fondamental est une ligne singulière ou une coupure essentielle des fonctions envisagées. C'est une coupure essentielle puisque la fonction perd son caractère analytique pour tous ses points, et ces coupures sont d'une nature bien différente de celles de *Riemann* et de celles qui ont été explicitement introduites par Mr. *Hermite* dans une lettre à Mr. *Mittag-Leffler*. À la catégorie des expressions à coupure de Mr. *Hermite* (coupures de représentation ou de convergence) appartiennent toutes les expressions qui, dans diverses parties du plan, représentent des fonctions différentes. Quand il s'agit d'une variable réelle, des expressions de cette espèce sont données par le théorème de *Fourier*, tandis que pour la variable imaginaire c'est *Gauss* qui en a donné le premier exemple. Mais parmi ces expressions les plus remarquables sont celles qui se présentent sous la forme d'une série infinie dont les termes sont les fonctions rationnelles de la variable considérée, expressions dont il se trouve des exemples déjà dans le célèbre Traité de calcul différentiel de Mr. *Bertrand* parmi les exercices à la page 359 (nos. 3. et 9.). Il me semble que ces séries de Mr. *Bertrand* sont d'un origine semblable à celui que les expressions que j'ai données dans un petit mémoire intitulé *Remarques sur quelques points de la théorie élémentaire des fonctions* imprimé dans les Comptes rendus de la Société royale des Sciences de Bohême pour l'année 1885.

Dans le même mémoire j'ai donné le développement de la fonction

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(-t \pm \sqrt{t^2 + 4}\right)$$

par la série (paragraphe III, formule (3))

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{P_n(t)\, P_{n+1}(t)};$$

$$P_n(t) = t^n + \binom{n-1}{1} t^{n-2} + \ldots + \binom{n-\nu}{\nu} t^{n-2\nu} + \ldots,$$

où les parenthèses $\binom{n-\nu}{\nu}$ désignent les coëfficients binomiaux. Chaque terme de cette série devient infini pour certaines valeurs représentées par des points du segment de droite $(-2i \ldots . + 2i)$, et l'ensemble des points qui sont les infinis des différents termes de cette série est condensé dant tout l'intervalle de la coupure $(-2i \ldots . + 2i)$, quoique la fonction représentée par la série a pour tous les points à l'intérieur de cette coupure une valeur finie et bien déterminée, et y possède un caractère partout régulier. On en doit conclure que la divergence d'une expression représentant une fonction n'exige rien de singulier relatif à cette fonction, celle-ci pouvant exister aussi pour les valeurs de la variable appartenant à la région de divergence de l'expression qui la représente.

C'est une circonstance qui exige la correction d'un théorème que Mr. *Goursat* avait inséré dans les Comptes Rendus t. 94, page 716.

Mr. *Goursat* considère l'expression bien générale

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{1 - \frac{x}{a_\nu}},$$

où les modules des quantités c_ν doivent avoir une somme finie, et les a_ν sont quelconques.

En appelant A une région simplement connexe ne contenant à son intérieur aucun point de la série

(1) $$a_0, \; a_1, \; a_2, \; \ldots,$$

Mr. *Goursat* énonce le théorème suivant:

„Soit x_0 un point de l'aire A, et R le rayon du plus grand cercle qui, ayant pour centre le point x_0, ne contient à son intérieur aucun point de la série (1); si ce cercle contient sur son contour un seul point appartenant à la série (1), il est *précisément le cercle*

de convergence de la série $P(x-x_0)$“ qui doit représenter la fonction $F(x)$.

Mais dans le cas où l'ensemble des points (a_ν) est condensé dans tout l'intervalle d'un arc de courbe il peut se faire que le cercle de convergence de la série de Taylor $P(x-x_0)$ représentant la fonction $F(x)$ est plus grand que celui qui a été signalé par Mr. *Goursat.*

De plus, l'éminent géomètre considère une région T ne contenant à son intérieur des points a_ν, région limitée par des arcs de courbe qui contiennent dans chaque voisinage detous leurs points une infinité des points a_ν. Je dis qu'il n'en résulte point que la fonction $F(x)$ n'existerait qu'à l'intérieur de l'aire T.

Mais si l'on veut construire des fonctions ne pouvant pas être continuées en dehors de la région T, on peut supposer que celle-ci contient une infinité des points a_ν et que l'ensemble des points-limites de l'ensemble (a_ν) est identique avec la périphérie de T. La fonction $F(x)$ ayant à l'intérieur de T une infinité des pôles qui s'approchent indéfiniment de tous les points de la périphérie de T a celle-ci pour ligne singulière et ne peut pas être continuée au de là de la dite région.

Je termine en remarquant que les séries trigonométriques (1) et (5) considérées plus haut ne sont que des cas particuliers d'une série trigonométrique très-générale possédant la même propriété, et qu'en spécialisant cette série on peut construire une infinité de séries trigonométriques qui n'ont jamais une dérivé quelque soit la valeur de la variable, séries parmi lesquelles se trouve celle de Mr. *Weierstrass* et la suivante

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u^\nu}{1.3.5\ldots(2\nu+1)} \cos\,[1.3.5\ldots(2\nu+1)\,\pi\,x],$$

u désignant une quantité positive supérieure à l'unité, comme j'espère de l'établir prochainement.

Prague, octobre 1886.

38.

Ueber die Fische Neuseelands.

Vorgetragen von Prof. Dr. **Johann Palacký** am 29. October 1886.

Der Vortragende entnahm einer druckfertigen Monographie „Ueber die Verbreitung der Fische auf der Erde“ nachstehende Daten über die Ichthys Neuseelands.

Es tritt hier der nicht ungewöhnliche Fall einer Discrepanz zwischen den Süsswasser- und Meeres-Fischen derselben Gegend ein (wie z. B. am Cap). Die wenig zahlreichen Süsswasserfische (15 bei Hutton, bei Anderen mehr durch Spaltung einzelner Species (Retropinna richardsoni in 3 sp., osmeroides und Upokororo) sind entschieden antarktisch, d. h. ähnlich jenen Australiens (3), Tasmaniens (3), Südamerikas (2) — endlich der Chathaminseln (4) und Auklandinseln (3)*) — abgesehen von den verwandten sp. wie Geotria allporti (Tasmanien) zu chilensis, Proctotroctes oxyrhynchus hier zu maraena (Südaustralien), Eleotris gobioides und obscura (China, Japan), endlich alle Galaxiden. Das einzige endemische Süsswassergenus Neochanna wird von Day reduzirt, der die Bauchflosse auf Grund seiner Erfahrungen bei Stromateus nicht als ein genügendes Kriterium ansieht. Eigenthümlich sind Kathetostoma fluviatile (Trachinid), Retropinna richardsoni und Galaxiden (alepidotus, brevipennis, Neochanna apoda, Proctotroctes oxyrhynchus).

Die nicht antarktischen Süsswasserfische sind entweder fraglich oder eigentliche Wanderfische, wie der Aal (Anguilla latirostris) (Europa, China, Nil), A. australis (Timor), Arripis salar (Tasmanien, Norfolk, Raoul), Gobius (lentiginosus — amiciensis ist bei Hutton ein Fehler in der Etikette der Sammlung des Erebus und Terror, da der Carterethafen nur in Neuirland vorkömmt (auch in Tonga), Upeneichthys porosus (Australien, Tasmanien). Hutton hat die beiden letzten gar nicht in Neuseeland gesehen.

Die Meeresfische, von denen an 175 sp. beschrieben worden sind, (einige Diefenbachische spec. und z. B. Scomber aureus Campbell sind als unsicher ausgelassen worden), 134 Hutton, einige später Hector,

*) Galaxias olidus, Geotria chilensis, Bdellostoma cirrhatum — Arripis salar, Galaxias attenuatus, Anguilla australis — Galaxias attenuatus, Geotria chilensis — Galaxias fasciatus, attenuatus, Retropinna richardsoni, Anguilla latirostris, Galaxias fasciatus, Anguilla auklandica, australis.

Haast), zählen bei Hutton 114 gen., von denen 11 (12) endemisch sind. Diese Menge von Monotypen ist schon auffällig. Nur alte Länder, wie z. B. Madagaskar, pflegen dies Verhältniss zu zeigen.

Neuseeland ist aber entschieden alt, wenn wir auch noch wenig Fossilien von dort besitzen.

Von Huttons Spez. sind 67, (früher 57) endemisch, 70 (früher 38) in Australien und Tasmanien, 13 kosmopolitisch, 9 am Cap und in Südamerika, 6 in Polynesien, 5 in Südamerika, 4 im (trop.) Südafrika, in Australien und Südamerika, 3 im indischen Archipel (Prosopodasys cottoides, Trygon Kuhlii, Ostracion fornasinii (auch Mozambik, Zanzibar), 2 in Australien und Polynesien, 1 in Kerguelen und Aukland, 1 in Australien und Aukland, 1 in Madeira (Halargyreus johnsoni).

Durch die hinzugekommenen neuen Fische, die meist Hochsee- und Tiefseeformen betreffen, lassen sich aber in 4 Typen unterscheiden:

1. der antarktische — zahlreichste,
2. der endemische — nächstfolgende,
3. der polynesisch-tropische,
4. der interessanteste, aber an Zahl schwächste, der eine gewisse Aehnlichkeit besonders mit dem Mittelmeere zeigt, und oben als kosmopolitisch bezeichnet worden ist, was streng genommen doch unrichtig ist, da diese Fische nicht überall vorkommen.

1. Den antarktischen Typus kennzeichnen (wo nichts steht, Australien):

Anthias richardsoni G. (Tasm.), Arripis salar Rich., Upeneoides porosus CV., vlamingii CV. (?), Pagrus unicolor CV., (? guttulatus Duperrey), Erythrichtys nitidus Rich. (Westaustralien), Chironemus georgianus CV., Chilodactylus carponemus CV., macropterus Rich., Latris hecateia Rich., ciliaris Forst., Scorpaena cruenta CV., Sebastes percoides Rich., Agriopus leucopoecilus Rich., Trachichthys elongatus CV., Thyrsites atun CV., Caranx georgianus CV. (auch Raoul, Norfolk), Neptonemus brama Gth., Cyttus australis Rich., Antigonia mülleri Kl., Kathetostoma leve CV., Booichthys variegatus Rich., Notothenia coriiceps Gth. (Kerguelen, Aukland), cornucola Rich. (Falkland), marginata Rich., Agonostoma Forsteri (Dajaus Diemensis), Centriscus humerosus Rich., Labrichthys celidota Forst., bothryocosmus Rich., inscripta Rich. (Norfolk, Raoul), psittacula Rich., Notacanthus sexspinis G, Genypterus blacodes (Chile), Rhombosolea plebeja Rich., tapirinus Gth.,

Macrurus australis Rich., Hemirhamphus intermedius (China), monopus Gth., Amotretis robustus Gth., Gonorhynchus greyi (Cap, Japan, Sct. Paul), Scomberesox forsteri CV., Congromuraena habenata Rich. (Sct. Paul, Japan, Neu-Guinea), Tetrodon richei Gth., Hamiltoni Rich., Syngnathus blainvilleanus Eydoux (Chile), Ichthyocampus filum Gthr., Solenognathus spinosissimus Gthr., Hippocampus abdominalis Kaup, Monacanthus convexirostris Gth., Callorhynchus antarcticus L. Chilomycterus jaculiferus CV., Carcharias brachyurus Penant, Mustelus antarticus Gth., Scyllium laticeps Dum., Rhinobatis banksii Gth., Trygonorhina fasciata Gth.

Auch in 3 und 4 sind australische Typen.

2. Die bekannten end. Fische sind — unter Angabe ihrer Verwandschaft:

Trachichthys trailli, Hutton, intermedius (Challenger) 1 und 4,
Therapon rubiginosus (Hector) tropisch 3.
Oligorus gigas Rich. (Richardson) 1.
Emmelichthys (auch Avonmündung) 1.
(zwei Dieffenbachsche spec. sind unbekannt — mulloides, sapidissimus).
Haplodactylus (meandratus Richards. ? Hutton), fergussoni (Hutton) 1.
Scorpis hectoris Hutton (Anthias richardsonii) 1.
Chilodactylus spectabilis Hutt. 1.
Latris aerosa Hutt. 1.
Scorpaena barathri Hector 4.
Platystethus huttoni Httn., abbreviatus Hutt. (Challenger) 1.
Cyttus traversi Hutt. 1.
end. gen. Gasterochisma melampus Richard. (? Hutton).
Kathetostoma monopterygium Bleek (Anemam.) Bleek., fluviatile Hutt. 1.
Percis colias Forst. (nycthemera Günther) 1.
Chimarrhichthys forsteri Haast. 1.
Lepidotrigla brachyptera Hutt. 1.
Notothenia angustata 1.
Aegeonichthys appelli Clarke 1.
Saccarius lineatus Gthr. (Antennarius) 3.
Gobius lentiginosus Rich. 3.
Eleotris basalis Gthr. gobioides W. 3.
Tripterygium nigripenne W., forsteri W., fenestratum Forst. (?).

decemdigitatum Clarke, medium Gthr., compressum Hutton, varium Forster. 4.

end. gen. Sticharium rubrum Hutt., flavescens Hutt. 2 (1 sp. A.)

end. gen. Acanthoclinus littoreus Gthr., taumaka Hutton.

end. gen. Hemerocoetes acanthorhynchus Forst. 3.

end. gen. Diplocrepis puniceus Richardson.

Trachelochismus guttulatus Hutt.

Crepidogaster hectoris Hutt. 1.

end. gen. Neofrynichthys (Psychrolutes latus) Hutt., auch Magellanien.

Labrichthys crinita Hutton.

Odax vittatus. Richards. (Solander) ? Hutton 1.

Coridodax pullus. Forst. (bei Gthr. C. auch Australien — nicht bei M'Leay).

Ditrema violaceum Hutton.

Gadus australis Hutt. 4.

Lota breviuscula Rich. (Erb-Terror.) 1.

Lotella rhacinus Forst., bachus Forst. 1. (phycis Schl. — Japan).

Pseudophycis breviusculus Rich. 1.

Bregmaceros punctatus Hutt., m'clellandi 3.

(Ofid) Dinematichthys consobrinus Hutton 1.

me. Bathygadus cottoides Gthr.

Coryphaenoides nov. zelandiae Hutt., denticulatus Rich.

Macrurus longirostris Hector, armatus Hector. (? murayi, serratus Lowe).

me. Brachypleura novae seelandiae Gth. (? Hutt.) Norfolk.

? Pseudorhombus scaphus Forst. (? plebejus Rich.), boops Gthr.

me. Peltorhamphus nov. zeelandiae Gthr.

Arhamphus sclerolepis Gthr. (? woher).

end. gen. Phosichthys (Sternoptych.) argentea Hutt.

Argyropelecus intermedius Clarke 4.

Scopelus hectoris Gthr.

Chlorophthalmus gracilis Gthr. 1.

me. Bathysaurus ferox Gthr.

Argentina elongata Hutton, decagona Hutton. 4.

Muraena Krulli Hector.

Doryichthys elevatus Hutt.

Stigmatofora longirostris Hutt.

Callorhynchus dasycaudatus Colenso.

Torpedo fairchildi Hutt.

Myliobatis tenuicaudata Hutt.

Raja nasuta Sol.

3. Zum polynesischen (o. pacificischen) Typus kann man zählen (sieh die frühere Colonne): Toxotes squamosus Hutt., Mendosoma lineatum Gay (Chile), Prosopodasys cottoides (China, Borneo, Java), Histioforus herschelii Gth. (indicus) CV., Acanthurus triostegus CV. (Mauritius), Scomber australasicus (Australien, Amboina), Pelamys chilensis CV., Trigla kumu Lesson (Australien, Cap, China), Mugil perusii Gth. (Vandiemensland, Indien, China), Fistularia serrata CV., Regalecus pacifici Gth., Trachelochismus pinnulatus (Ualan, Fitschi), Labrichthys rubiginosa (China, Japan), Dascyllus aruanus (Polynesien, Afrika), Fierasfer parvipinnis Kaup (N. Irland), Scopelus boops CV. (Oceanien), Exocoetus micropterus CV., speculiger CV. (Australien, Indien), Chanos salmoneus (Rothes Meer und Mexiko), Clupea sagax (Japan, Chile, Nordwestamerika), Ostracion fornasinii Bianc. (Indien, Ostafrika), Notidanus indicus CV. (Australien, Californien, Cap), Cestracion Filippi (Australien, Japan), Lamna glauca Müll. (Cap, Japan, Sct. Helena, Australien), Trygon Kuhlii Müll. (Zanzibar).

4. Der letzte Typus ist vertreten (bisher) durch Beryx affinis Gth. (anch 1), Lepidopus elongatus White (auch 1), Zeus faber L., Caranx trachurus, Tr. Cap, Madeira, Dalmatien, Australien), Naucrates ductor L. (Cap, Europa), Seriola Lalandii CV., Maurolicus amethystino-punctatus Cocco (Sicilien), Holargyrus johnsoni Gth. (Gad. Madeira), Regalecus gladius Gthr., Engraulis encrasicholus L., Clupea sprattus L., Anguilla latirostris, Conger vulgaris, Ofich'hys serpens (Mittelmeer, Oceanien, Japan, Australien), Ofisurus nov. Zeeland., Syngnathus pelagicus (Mittelmeer, China, Australien), Orthagoriscus truncatus (? mola), Acanthias vulgaris Risso, Zygaena malleus, Galeus canis, Carcharodon Rondeletii 5, Alopecias vulpes, Myliobatis aquila, Trygon Thalassinus Col. = brevicaudatus Hutton, — endlich den kosmopolitischen Amfioxus (2 ex. Hutton).

Noch etwas auffälliger gestaltet sich das Verhältniss, wenn man bloss auf die genera Rücksicht nimmt.

Wir dürfen nicht verschweigen, dass Hutton einen Unterschied zwischen dem Norden (Upeneus, Pagrus, Mugil) und Süden (Latris, Coridodax, Lotella) macht und auf die Rolle der Meeresströmungen aufmerksam macht, die Samen von den Fitschiinseln bringen und 1868 durch die östliche Drift Holzschwellen von hier nach den Chathaminseln führten. Der Wärmeunterschied zwischen dem kalten Osten und dem warmen Westen sei 6°. Die Differenz der drei angeführten

Typen lässt sich nicht durch Huttons künstliche Migrationstheorie decken, denn keine solche kann z. B. erklären, warum Holargyrus nur in Madeira und hier, Maurolicus nur in Sicilien und hier vorkömmt.

Wichtiger ist Huttons Ansicht, dass Neuseeland ein Stück Trias repräsentire, womit man das Fehlen der Säugethiere, die archaistischen Formen bei Vögeln und Reptilien (Moa, Hatteria), das Liopelma Hochstetteri (Discogloss.), das Vorwalten der Coniferen und Farren, und das Vorhandensein leider wenig bekannter Fossilien aus mehreren Perioden gut in Uebereinstimmung bringen kann.

Engler theilt Neuseeland in zwei Hälften: die tropische und antarktische (altoceanische!).

Die antarktischen Typen scheinen zu einer antarktischen Eiszeit von Südamerika gekommen zu sein. Die tropischen Typen bringt die Drift des stillen Meeres noch stündlich, daher sind die brakischen Typen tropisch (so Eleotris, Upeneoides, Aale, Mugiliden). Noch heute wandern ja Vögel aus Australien nach Neuseeland. Bezüglich der Typen des Mittelmeeres, die allerdings zum grössten Theile auch in Australien und Japan vorkommen, aber Malaisien und Indien (bisher) zu fehlen seheinen, ist wohl nur eine alte Remanenz aus jener Zeit möglich, wo das Mittelmeer mit dem indischen Meere in steter Verbindung war, wie die Ichthys des rothen Meeres, die heute noch vollständig indisch ist, so nahe legt (Tripterygium). Eine ähnliche Erscheinung bietet ja der australische Ceratodus und der fossile Dinornis daselbst. Einzelne Tiefseefische, die man zuerst nur von Madeira kannte, oder bisher nur von hier kennt, dürfte man auch noch anderswo finden, bis man die Tiefsee besser untersuchen wird. Aber die Menge der Endemismen, darunter eine Familie (Acanthoclinus), zeigt auf ein hohes selbstständiges Alter der Ichthys.

39.

O jistém integrálu omezeném.

Přednášel docent na české výs. škole techn. **M. J. Lerch**, dne 29. října 1886.

1. V theorii elliptických funkcí dokazuje se následující věta:*)

Značí-li $\vartheta(u \mid \tau)$ funkci proměnných u, τ, definovanou řadou

*) Jednoduchý důkaz její viz v autorově pojednání „Příspěvky k theorii funkcí elliptických.“ Zprávy o zasedání král. čes. spol. nauk z r. 1886.

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{\pi i(\nu^2\tau+2\nu u)} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2\tau\pi i} \cos 2\,n\pi u,$$

která konverguje pro všecka u, je-li pomyslná část veličiny τ kladná, platí rovnosť

$$\vartheta(u\,|\,\tau) = \left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right) e^{-\frac{1}{\tau}u^2\pi i}\,\vartheta\left(\frac{u}{\tau}\,\Big|\,-\frac{1}{\tau}\right),$$

kde $\left(\sqrt{\frac{i}{\tau}}\right)$ značí onu z obou hodnot odmocniny $\sqrt{\frac{i}{\tau}}$ jejíž realná část je kladná.

Volíme-li tu $\tau = ix$, $u = v\sqrt{x}$, a znamenáme-li

$$(1) \qquad \Phi(x\,|\,v) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \cos 2n\,\pi v\,\sqrt{x},$$

bude

$$2\,\Phi(x\,|\,v) + 1 = \vartheta(v\sqrt{x}\,|\,i\,x),$$

a tudíž dle věty právě citované:

$$2\,\Phi(x\,|\,v) + 1 = x^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi v^2}\left[2\,\Phi\left(\frac{1}{x}\,\Big|\,vi\right) + 1\right]$$

a odtud:

$$(2) \quad \Phi\left(\frac{1}{x}\,\Big|\,v\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} e^{-\pi v^2} + x^{\frac{1}{2}} e^{-\pi v^2}\,\Phi(x\,|\,vi)$$

Z této rovnice možno souditi o průběhu funkce $\Phi(x)$ při nekonečně malých hodnotách x. Řada (1) patrně konverguje pro všecky kladné hodnoty x, kdežto pro $x = 0$ diverguje. Budeme uvažovati tedy pouze kladné realné hodnoty x. Pak bude absolutní hodnota obecného členu řady (1), klademe-li $v = \alpha + \beta i$, patrně následující:

$$e^{-n^2\pi x}\,|\cos 2n\pi v\sqrt{x}\,| \leqq \frac{1}{2}\,e^{-n^2\pi x}\left(e^{2n\pi\beta\sqrt{x}} + e^{-2n\pi\beta\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,e^{-n\pi\sqrt{x}\,(n\sqrt{x}+2\beta)} + \frac{1}{2}\,e^{-n\pi\sqrt{x}\,(n\sqrt{x}-2\beta)}\,.$$

Nechť je β kladné nebo záporné, budou exponenty v obou sčítancích od jistého místa x počínaje záporné a porostou zároveň s x přes všechny meze. Je-li pak a kterákoli veličina stálá, bude

$$\lim_{x=\infty} e^{-n\pi\sqrt{x}(n\sqrt{x}\pm 2\beta)} x_a = 0,$$

z čehož lze souditi

$$\lim \Phi(x)\, x^a = 0. \tag{3}$$

Z toho plyne, že v rovnici (2) je třetí člen v pravo pro $x = \infty$ nekonečně malý; značíme-li jej ε, bude pro

$$\frac{1}{x} = \xi$$

$$\Phi(\xi \mid v) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\xi^{-\frac{1}{2}} e^{-\pi v^2} + \varepsilon, \tag{2^a}$$

kde ε je zároveň s ξ nekonečně malé.

Z rovnic (3) a (2^a) pak plyne, že k existenci integrálu

$$J = \int_0^\infty \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx \tag{4}$$

je nutná i dostačující podmínka, aby realná část veličiny $s-1$ byla kladná. Je-li tato splněna, bude

$$J = \int_0^1 \Phi(x \mid v) x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx + \int_1^\infty \Phi(x \mid v) x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx.$$

Zavedeme-li do prvého z obou těchto integrálů v pravo veličinu $\frac{1}{x}$ za neodvisle proměnnou, obdržíme:

$$\int_0^1 \Phi(x \mid v) x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx = \int_1^\infty \Phi\left(\frac{1}{x} \middle| v\right) x^{-\frac{1}{2}s-1}\, dx;$$

dosadíme-li sem za $\Phi\left(\frac{1}{x} \middle| v\right)$ hodnotu z (2), máme poslední integrál ve tvaru

$$-\frac{1}{2}\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}s-1}\,dx+\frac{1}{2}\,e^{-\pi v^2}\int_1^\infty x^{-\frac{s+1}{2}}e^{-\pi v^2}dx+$$

$$+\,e^{-\pi v^2}\int_1^\infty \Phi(x\,|\,v\,i)\,x^{-\frac{s+1}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{s}-\frac{1}{1-s}\,e^{-\pi v^2}+e^{-\pi v^2}\int_1^\infty \Phi(x\,|\,v\,i)\,x^{-\frac{s+1}{2}}dx,$$

takže nacházíme rovnici:

$$(5)\qquad \int_0^\infty \Phi(x)x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx=-\frac{1}{s}-\frac{e^{-\pi v^2}}{1-s}$$

$$+\int_1^\infty \{\Phi(x\,|\,v)\,x^{\frac{1}{2}s-1}+\Phi(x\,|\,vi)x^{-\frac{s+1}{2}}e^{-\pi v^2}\}\,dx.$$

Integrál na pravé straně této rovnice má pro všecka konečná s hodnotu konečnou a určitou, a definuje tedy určitou celistvou funkci transcendentní komplexní proměnné s, o jejíž vyjádření ve tvaru řady chceme nadále jednati.

Integrovaná funkce ve vzorci (4) dána je řadou

$$\Phi(x)\,x^{\frac{1}{2}s-1}=\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x}\cos 2n\pi v\sqrt{x}\,.\,x^{\frac{1}{2}s-1},$$

jejíž členové jsou funkce uvnitř a na mezích každého oboru $(\delta\ldots h)$ (kde $h>\delta>0$) jednoznačné konečné a spojité, a kterážto řada konverguje v každém takovémto oboru stejnoměrně, a následkem toho připouští integraci po členech, takže bude

$$\int_\delta^h \Phi(x)x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx=\sum_{n=2}^{\infty}\int_\delta^h e^{-n^2\pi x}\cos 2n\pi v\sqrt{x}\,.\,x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx$$

Dokážeme nyní, že tato rovnice platí i tehdy, je-li $\delta=0$, $h=\infty$. Za tím účelem pišme ji ve tvaru

$$(a)\qquad \int_{\delta}^{h} \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\delta, h),$$

kladouce

$$J_n(\delta, h) = \int_{\delta}^{h} e^{-n^2\pi x} x^{\frac{1}{2}s-1} \cos 2n\pi v \sqrt{x}\, dx$$

Substituce $n\sqrt{x} = z$ do posledního integrálu poskytne nám patrně vzorec

$$J_n(g, h) = \frac{2}{n^s} \int_{n\sqrt{g}}^{n\sqrt{h}} e^{-\pi z^2} z^{s-1} \cos 2\pi v z\, dz$$

platný pro všecka kladná g, h, n. Integrál na pravé straně nalezá se pod stálou mezí M závislou pouze na v, s pro všecka g, h, n; značí-li tedy σ realnou část veličiny s, bude

$$(\beta)\qquad |J_n(g, h)| < \frac{2M}{n^{\sigma}}$$

Odtud snadno dokážeme, že řady

$$(a)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} J_n(o, \delta)$$

$$(b)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} J_n(h, \infty)$$

konvergují a jsou nekonečně malé, je-li v (a) veličina δ nekonečně malou a v (b) h nekonečně velikou.

Především jest z (β) patrno, že při podmínce $\sigma > 1$ zde předpokládané řady ty jsou konvergentní a co do součtu menší než

$$2M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}},$$

a že zbytky

(c) $$\sum_{n=r+1}^{\infty} J_n(o, \delta), \sum_{n=r+1}^{\infty} J_n(h, \infty)$$

jsou menší než zbytek

(c′) $$2M \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}.$$

Tu pak lze voliti r tak velké, že veličina (c′) je menší než libovolně předepsaná veličina ε, tak že pak budou též obě veličiny (c) menší než ε. Dále bude lze voliti h tak velké a δ tak malé, aby součty

$$\sum_{n=1}^{r} J_n(o, \delta), \sum_{n=1}^{r} J_n(h, \infty)$$

byly absolutně menší než ε, tak že pak budou obě veličiny (a), (b) menší než 2ε, které jsme mohli voliti sebe menší.

Zároveň však bylo možno voliti δ tak malé a h tak veliké, aby integrály

$$\int_0^\delta \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1} dx, \int_h^\infty \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1} dx$$

byly absolutně menší než ε; přičteme-li tyto integrály k levé, veličiny (a), (b) k pravé straně rovnice (α), obdržíme dvé veličiny

$$\int_0^\infty \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1} dx, \sum J_n(o, \infty),$$

kteréž se liší o veličinu absolutně menší než 6ε, která byla z předu volena.

Avšak tyto veličiny nikterak nezávisejí na ε, a následkem toho jsou si rovny. *)

Jelikož tu

---

*) Sic kdyby jich rozdíl Δ byl od nully různý, mohli bychom volbou $\varepsilon < \frac{1}{6}|\Delta|$ docíliti toho, že rozdíl ten jest větší než 6ε, což odporuje poslednímu výsledku.

$$J_n(o,\ \infty) = \frac{2}{n^s}\int_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1} \cos 2\pi vz\,dz\,,$$

nacházíme:

(6) $$\int_0^\infty \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1} dx = \zeta(s)\,.\,2\int_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1} cos 2\pi vz dz,$$

kde jsme s *Riemannem* *) znamenali $\zeta(s)$ součet konvergentní řady

(7) $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$$

Zde dlužno podotčíti, že za n^s vzíti třeba hodnotu $e^{s\,lgn}$, při čemž lgn jest realné, což z pochodu našeho vyšetřování bez obtíží vysvitá.

Zde nebude tuším od místa uvažovati zvláštní případ $v = o$. Tím přejde funkce $\Phi(x)$ na tvar

(8) $$\Phi_0(x) = \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2\pi x},$$

a rovnice (6) nám poskytne vzorec

(6ª) $$\int_0^\infty \Phi_0(x) x^{\frac{1}{2}s-1} dx = \zeta(s) 2\int_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1} dz$$

Substitucí $\pi z^2 = x$ obdržíme

$$2\int_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1} dz = \pi^{-\frac{1}{2}s}\int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{1}{2}s-1} dx\,;$$

integrál

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{1}{2}s-1} dx$$

nazývá se *Eulerovým* (druhého způsobu), existuje pro s, jichž realná část

*) Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse. Monatsb. d. Berliner Ak. 1859. Sebrané spisy str. 136. Podobné dvě funkce studoval p. *Schlömilch*, a celou kategorii jiných p. *Hurwitz* (v. Schlömilchův časopis roč. 27.)

je kladná, a definuje analytickou funkci $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ proměnné s, která dle p. *Pryma**) se vyjádří součtem dvou funkcí ($s = 2z$):

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)},\quad Q(z) = \int_1^{\infty} e^{-x} x^{z-1} dx\,,$$

$$\Gamma(z) = P(z) + Q(z),$$

kde $Q(z)$ je celistvá funkce transcendentní.

Vzorec (6^a) poskytne tedy:

$$\int_0^{\infty} \Phi_0(x) x^{\frac{1}{2}s-1} dx = \pi^{-\frac{1}{2}s} \zeta(s) \Gamma(\tfrac{1}{2}s)$$

a z rovnice (5) máme *Riemannův* vzorec

$$(9)\quad \zeta(s)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s) = -\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s}\right) + \int_1^{\infty} \Phi_0(x) \left(x^{\frac{1}{2}s-1} + x^{-\frac{s+1}{2}}\right) dx$$

Znamenáme-li levou stranu této důležité rovnice $f(s)$, plyne bezprostředně vzorec

$$f(s) = f(1-s),$$

jenž nevyjadřuje nic jiného, nežli že $f(\frac{1}{2}+t)$ je sudá funkce proměnné t.

Integrál na pravé straně rovnice (9) existuje pro všecka konečná s a definuje celistvou transcendentní funkci proměnné s. Je tudíž rovnicí tou definována analytická funkce $\zeta(s)$ pro všecky konečné hodnoty s.

Funkce $\Gamma(\frac{1}{2}s)$ stane se polárně nekonečnou pro $s = o, -2, -4, \ldots\ldots -2n, \ldots\ldots$

Násobíme-li obě strany rovnice (9) veličinou s, obdržíme pro $s = o$ vůči vzorci

$$\lim_{s=o} \tfrac{1}{2}s\Gamma(\tfrac{1}{2}s) = 1$$

---

*) Borchardtův (Crelleův) žurnál sv. 82. Neméně zajímavý je elegantní způsob odvození, jejž v 90. sv. téhož žurnálu (str. 332) podal p. *Hermite* (v dopise k p. *Schwarzovi*, prof. v Gotinkách).

patrně rovnici

$$\zeta(o) = -\tfrac{1}{2}.$$

Pro s v okolí místa $s = 1$ je funkce $\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)$ tvaru

$$c_0 + c_1(s-1) + c_2(s-1)^2 + \ldots\ldots,$$

pravá strana rovnice (9) pak tvaru

$$\frac{1}{s-1} + c'_0 + c'_1(s-1) + c'_2(s-1)^2 + \ldots\ldots,$$

z čehož plyne, že $\zeta(s)$ je tvaru

$$\zeta(s) = \frac{a_0}{s-1} + a_1 + a_2(s-1) + \ldots\ldots$$

Abychom vyšetřili a_0, (kteréž tu má hodnotu $\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2})}$, jak z (9) patrno), užijme původní definice funkce $\zeta(s)$ rovnicí (7), předpokládajíce s realné a větší než 1. Pak platí nerovnosti

$$\frac{1}{n^s} > \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^s} > \frac{1}{(n+1)^s},\ (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots)$$

z nichž plyne

$$\zeta(s) > \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} > \zeta(s) - 1$$

čili

$$\zeta(s) > \frac{1}{s+1} > \zeta(s) - 1,$$

takže

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \vartheta_s,$$

kde ϑ_s je pravý kladný zlomek (obecně irracionalný). Z toho nacházíme

$$\lim_{s=1}(s-1)\,\zeta(s) = 1,$$

takže bude $a_0 = 1$ (a tedy $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$).

V okolí všech ostatních míst chová se funkce $\zeta(s)$ pravidelně, jelikož funkce $\Gamma(\frac{1}{2}s)\ \pi^{-\frac{1}{2}s}$ nikdy nezmizí, a pravá strana rovnice (9) je pro všecka s mimo 0,1 konečnou a pravidelnou.

Vyšetřme nyní hodnotu funkce $\zeta(s)$ na místech $s = -2, -4 \ldots -2n, \ldots$ Na těchto místech je $\Gamma(\frac{1}{2}s)$ polárně nekonečna, a bude v nich tedy $\zeta(s) = 0$, ač není-li pravá strana rovnice (9) nullou pro tatáž s; v tomto případě by $\zeta(s)$ bylo v řečených místech nullou a sice v druhém stupni (t. j. bylo by též $\zeta'(s) = 0$).

Abychom se tu dověděli bližšího o tvaru funkce, užijme vlastnosti $f(s) = f(1-s)$, t. j. rovnice

$$\text{(9a)} \qquad \zeta(s)\ \pi^{-\frac{1}{2}s}\ \Gamma(\tfrac{1}{2}s) = \zeta(1-s)\ \pi^{\frac{1}{2}(s-1)}\ \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$$

Tu jest pak $\Gamma\left(\frac{1+2n}{2}\right)$ pro všecka $n = 1, 2, \ldots$ konečno (a od nully, různo), dále je z řady (7) zřejmo, že $\zeta(1+2n) > 0$, a tak bude tedy:

$$\lim_{s=-2n} \Gamma(\tfrac{1}{2}s)\ \zeta(s) = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\ \zeta(2n+1)}{\pi^{2n}\sqrt{\pi}}$$

Dle citované vlastnosti funkce Γ bude pak

$$\lim_{s=-2n} \tfrac{1}{2}(s+2n)\ \Gamma(\tfrac{1}{2}s) = \frac{(-1)^n}{n\,!}$$

a tudíž nacházíme:

$$\lim_{s=-2n} \frac{\zeta(s)}{s+2n} = \frac{(-1)^n}{2}\ \frac{n!\ \Gamma(n+\frac{1}{2})}{\pi^{2n}\ \sqrt{\pi}}\ \zeta(2n+1)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2} \cdot \frac{n!\,1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{(2\pi^2)^n}\ \zeta(2n+1)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{n!\ (1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{(2\pi^2)^n\ \nu^{2n+1}}$$

řada tato má hodnotu kladnou, a roste zároveň s n přes všechny meze, a to rychleji než každá racionalná funkce n (než členové každé geometrické řady. Z toho lze souditi na chování se funkce $\zeta(s)$ v místech záporné poloviny osy realné.

Mezi každýma dvěma místy $s = -2n$, $-2n-2$ nachází se jedna vlna funkce $\zeta(s)$, která sestává z hodnot stejného znamení, a tyto vlny jsou tím širší, čím jsou vzdálenější od počátku $s = 0$.

Z rovnice (7) pak plyne, že pro všecka s, jichž realná část je kladná a větší než 1, je funkce $\zeta(s)$ ve své realné řásti kladná a větší než 1, takže nezmizí pro žádné z těchto s. Proto může $\zeta(s)$ zmizeti pouze pro ona s, jichž realné části náležejí intervallu $(-\infty \ldots . 1)$. Co se tkne hodnot s o záporné části realné, tu plyne z rovnice (9^a), že mohou býti nullovými místy pro $\zeta(s)$ pouze tehdy, jeli v nich $\Gamma(\frac{1}{2}s) = \infty$, ano $\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$ nezmizí pro žádné s, a $\zeta(1-s)$ má realnou část kladnou, ano tu $1-s$ má realnou část kladnou a větší než 1. Jsou tedy $s = -2, -4, \ldots -2n, \ldots$ jediná místa nullová funkce $\zeta(s)$, v nichž je realná část zápornou.

Má-li pak s realnou část uvnitř mezery $(o \ldots 1)$, bude ji míti v ní též $1-s$, ale funkce $\Gamma(\frac{1}{2}s)$, $\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)$ budou tam konečny a od nully různy. Z toho plyne, že je-li pro takové s $\zeta(s) = 0$, musí též $\zeta(1-s) = 0$, takže pak jsou místa nullová funkce $\zeta(s)$ souměrně rozložena vzhledem k bodu $s = \frac{1}{2}$. Tím ovšem není řečeno, že by takovéto kořeny rovnice $\zeta(s) = 0$ skutečně existovaly.

2. Integrál na pravé straně rovnice (6)

$$\Psi(s \mid v) = 2\int_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1} \cos 2\pi v z\, dz \tag{1}$$

existuje pro všecka s, jichž realná část je kladná, a pro všecka v i definuje analytickou funkci, kterou jsme znamenali $\Psi(s \mid v)$.

Nahradíme-li zde $\cos 2\pi v z$ řadou

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} z^{2n},$$

obdržíme

$$\tfrac{1}{2}\Psi(s, v) = \int_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1} dz + \int_0^\infty e^{-\pi z^2} dz \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} z^{2n+s-1}.$$

Funkce pod posledním znamením integračním je dána nekonečnou řadou

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} e^{-\pi z^2} z^{2n+s-1},$$

jejíž členové jsou funkce konečné a spojité uvnitř i na mezích každého intervallu (0 . . . h), kde h je veličina kladná. Zároveň je patrno, že v každém tomto oboru konverguje uvažovaná řada *stejnoměrně.* Následkem toho bude dovoleno integrovati tuto řadu v mezích (0 . . . h) po členech, čímž vznikne

$$(\alpha) \qquad \int_0^h e^{-\pi z^2} z^{s-1} dz \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} z^{2n}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} \int_0^h e^{-\pi z^2} z^{2n+s-1} dz$$

Abychom se přesvědčili, zda-li je tu možno klásti $h = \infty$, sestrojme řadu

$$(\beta) \qquad V = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-\pi z^2} z^{2n+s-1} dz$$

Tu jest pak

$$(\gamma) \qquad \int_0^{\infty} e^{-\pi z^2} z^{2n+s-1} dz = \tfrac{1}{2}\pi^{-(n+\frac{1}{2}s)} \Gamma(n+\tfrac{1}{2}s)$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi^{-(n+\frac{1}{2}s)} (n+\tfrac{1}{2}s-1)(n+\tfrac{1}{2}s-2) \ldots \tfrac{1}{2}s\Gamma(\tfrac{1}{2}s)$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s) \,.\, \pi^{-n} n! \binom{n+\frac{1}{2}s-1}{n}$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s) \,.\, (-1)^n \frac{1}{(\pi)^n} \binom{-\frac{1}{2}s}{n} n!$$

a tedy

$$(\delta) \qquad V = \tfrac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4\pi v^2)^n}{\binom{2n}{n} n!} \binom{-\frac{1}{2}s}{n}$$

Tato řada sestává z členů, které jsou (od jistého místa) absolutně menší než členové řady konvergentní pro všecka s:

$$(1+q)^{-\frac{1}{2}s} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \binom{-\frac{1}{2}s}{n}, \; q < 1.$$

Neboť je známo, že lze k libovolnému v a k libovolnému $q < 1$ určiti n_0 tak, aby platila nerovnosť

$$\frac{|4\pi v^2|^n}{\binom{2n}{n} n!} < q^n \text{ pro } n \geqq n_0.$$

Odtud plyne, že řada (δ) konverguje pro všecka konečná v, s, a tudíž bude řada (β) pro libovolné v a pro všecka s, jichž realná část je kladná, konvergovati. Budiž nyní σ realná část veličiny s, w realná část veličiny v; pak bude též kovergovati řada

$$(\beta^*) \qquad V^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi w)^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-\pi z^2} z^{2n+\sigma-1} dz$$

Utvořme nyní řadu

$$(\varepsilon) \qquad U_h = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\pi w)2^n}{(2n)!} \int_h^{\infty} e^{-\pi z^2} z^{2n+\sigma-1} dz,$$

kde h je kladné. Členové této řady (ε) jsou menší než soulehlí členové řady (β^*), a proto je řada (ε) též konvergentní. Znamenejme S_r součet prvých r členů ($n = 1, 2, \ldots r$), a Z_r součet ostatních členů ($n = r+1, r+2, \ldots$) t. j. zbytek řady. Tu lze pak pro libovolně předepsanou kladnou veličinu δ určiti r tak velké, aby pro všecka kladná h bylo $Z_r < \frac{1}{2}\delta$; po té lze voliti h tak veliké, aby každý z r členů součtu S_r byl menší než $\frac{\delta}{2r}$, a tedy $S_r < \frac{1}{2}\delta$; pak bude

$$U_h = S_r + Z_r < \delta.$$

Tu je však jasno, že platí

$$(\eta) \qquad \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} \int_h^{\infty} e^{-\pi z^2} z^{2n+s-1} dz \right| < U_h < \delta.$$

Zároveň jsme mohli h voliti tak velké, že platí

$$\left| \int_h^{\infty} e^{-\pi z^2} z^{s-1} dz \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v^{2n})}{(2n)!} z^{2n} \right| < \delta;$$

přičteme-li tento integrál k levé, řadu (η) k pravé straně rovnice (α), obdržíme dvě veličiny:

$$\int_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{s-1}\,dz \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} z^{2n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2\pi v)^{2n}}{(2n)!} \int_0^\infty e^{-\pi z^2} z^{2n+s-1}\,dz,$$

které se liší o veličinu menší než δ. Avšak tyto veličiny nezávisejí na δ, a z té příčiny jsou si rovny.

Následkem toho nacházíme rovnici

$$\text{(2)} \quad \Psi(s\,|\,v) = \pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4\pi v^2)^n}{\binom{2n}{n} n!} \binom{n+\frac{1}{2}s-1}{n}$$

$$= \pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4\pi v^2)^n}{\binom{2n}{n} n!} \binom{-\frac{1}{2}s}{n}$$

Řady v pravo konvergují pro všecka v, s a definují tedy celistvou transcendentní funkci $C(s\,|\,v)$ proměnných s, v, takže bude

$$\text{(2}^a\text{)} \quad \Psi(s\,|\,v) = \pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,C(s\,|\,v).$$

Rovnice (6) § 1. zní pak:

$$\int_0^\infty \Phi(x) x^{\frac{1}{2}s-1}\,dx = \zeta(s)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)C(s\,|\,v),$$

a dle (5) § 1. máme:

$$\text{(3)} \quad \zeta(s)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)C(s\,|\,v)$$

$$= -\frac{1}{s} - \frac{e^{-\pi v^2}}{1-s} + \int_1^\infty \left\{ \Phi(x\,|\,v) x^{\frac{1}{2}s-1} + \Phi(x\,|\,vi) x^{-\frac{s+1}{2}} e^{-\pi v^2} \right\} dz$$

Integrál na pravé straně rovná se určité celistvé funkci $C^*(s\,|\,v)$ proměnných s, v, a funkce $\zeta(s)\pi^{-1/2 s}\Gamma(\frac{1}{2}s)$ je dle (9) § 1. v okolí $s=0$ tvaru $-\frac{1}{s} + \mathfrak{P}(s)$, v okolí $s=1$ tvaru $-\frac{1}{s-1} + \mathfrak{P}(s-1)$. Násobíme-li obě strany rovnice (3) veličinou $(s-1)$, máme pro $s=1$:

$$C(1\,|\,v) = e^{-\pi v^2},$$

což je z definice funkce C přímo patrno.

Funkce $\zeta(s)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)$ zmizeti může pouze pro s, jichž realná čásť je uvnitř intervallu $(0\ldots 1)$, t. j. kde $\zeta(s)=\zeta(1-s)=0$.

Srovnáním s rovnicí (9) § 1. nacházíme tedy:

„Pro hodnoty s, pro něž (ač-li takové existují):

$$(\alpha)\qquad \int_1^\infty \Phi_0(x)\left(x^{\frac{1}{2}s-1}+x^{-\frac{s+1}{2}}\right)dx=\frac{1}{s}+\frac{1}{1-s},$$

bude:

$$(\beta)\qquad C^*(s\,|\,v)=\int_1^\infty\left\{\Phi(x\,|\,v)x^{\frac{1}{2}s-1}+\Phi(x\,|\,vi)x^{-\frac{s+1}{2}}e^{-\pi v^2}\right\}$$
$$=\frac{1}{s}+\frac{e^{-\pi v^2}}{1-s}.$$

Rovnice (β) nemá jiných kořenů s nezávislých na v, než které jsou zároveň kořeny rovnice (α); neboť tato vznikne z (β) pro $v=0$. Kořeny nezávislé na v jsou jim i co do stupně společny, ana funkce $C(s\,|\,v)$ obdrží hodnotu 1 pro $v=0$.

Z definice

$$(4)\qquad C(s\,|\,v)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4\pi v^2)^n}{\binom{2n}{n}n!}\binom{n+\frac{1}{2}s-1}{n}$$

plyne

$$(4^a)\qquad C(s\,|\,vi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4\pi v^2)^n}{\binom{2n}{n}n!}\binom{n+\frac{1}{2}s-1}{n}$$

Volíme-li za $\frac{1}{2}s$ pravý kladný zlomek, bude

$$\binom{n+\frac{1}{2}s-1}{n}$$

záporné; volíme-li v realné a dosti veliké, bude pak řada (4^a) míti hodnotu zápornou, kdežto pro $v=0$ je kladná. Z toho plyne, že je-li s uvnitř intervallu $(0\ldots 2)$, bude rovnice $C(s\,|\,vi)=0$ míti realné kořeny v, a sice kladné i záporné, t. j. $C(s\,|\,v)=0$ má tam kořeny v ryze pomyslné.

Z rovnice (3) plyne pak vztah:

$$\zeta(s)\pi^{-\frac{1}{2}s}\,\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\,C(s\,|\,v)=e^{-\pi v^2}\,\zeta(1-s)\,\pi^{\frac{1}{2}(s-1)}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)C(1-s\,|\,vi)$$

aneb vzhledem k (9^a) (která je tu obsažena pro $v=0$):

$$C(s \mid v) = C(1-s \mid vi)\; e^{-\pi v^2} \tag{5}$$

Nalezá-li se s uvnitř $(0 \dots 2)$, nalezá se $1-s$ uvnitř $(-1 \dots 1)$; tedy má funkce $C(s \mid v)=0$ pro realná s uvnitř $(-1 \dots +1)$ kořeny v realné.

Vůbec lze ke každému intervallu realných hodnot s, v nichž má $C(s \mid v)=0$ kořeny realné, sestrojiti intervall hodnot s, pro něž má táž rovnice kořeny ryze pomyslné, jak z rovnice (5) přímo patrno. Je-li $s=(\alpha \dots \beta)$ oborem pro realné kořeny v, bude $s=(1-\alpha \dots 1-\beta)$ oborem pro ryze pomyslné kořeny v.

V intervallu $s=(0 \dots 1)$ má $C(s \mid v)=0$ kořeny v realné i ryze pomyslné.

Dosazením hodnot za $C(s \mid v)$, $C(1-s \mid vi)$ do rovnice (5) a srovnáním součinitelů při stejných mocnostech v obdržíme zajímavé vztahy mezi funkcemi tvaru $\binom{-\frac{1}{2}s}{n}$, $\binom{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}{n}$.

Píšeme-li $u=\pi v^2$, a pak

$$C(s \mid v) = G(s \mid u),$$

bude

$$C(s \mid vi) = G(s \mid -u)$$

a pak

$$G(s \mid u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n u^n}{\binom{2n}{n} n!} \binom{-\frac{1}{2}s}{n}$$

a (5) obdrží tvar

$$G(s|u) = G(1-s|-u) e^{-u}$$

V pravo je koefficient při u^n dán výrazem:

$$(-1)^n \sum_{k+\lambda=n} \frac{4^k}{\binom{2k}{k} k!\ \lambda!} \binom{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}{k},$$

$$\begin{pmatrix} k=0, & 1, \dots \\ \lambda=0, & 1, \dots \end{pmatrix}$$

jenž má býti roven

$$\frac{4^n}{\binom{2n}{n} n!} \binom{-\frac{1}{2}s}{n}$$

Tím vyjádřen velmi obecný vztah mezi součiniteli binomickými:

$$\frac{(-4)^n}{\binom{2n}{n}}\binom{-\frac{1}{2}s}{n}=\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k\binom{n}{k}}{\binom{2k}{k}}\binom{\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}{k}.$$

40.

O morfologickém významu kupuly (číšky) u pravých Kupulifer.

Přednesl Dr. **Lad. Čelakovský** dne 12. listopadu 1886.

(S 1 tabulkou.)

Starší morfologové (Hofmeister, Schacht, Döll a j.) poznávali v číšce čili kupule pravých kupulifer (rodů Quercus, Castanea, Fagus) dutou osu neb diskus kolem květů samičích vyzdvižený a na vnější své straně listy (šupiny neb ostny) nesoucí.

Nověji Eichler ve svých „Blüthendiagramme“ opustil tento náhled a sice na základě srovnávací methody, došed srovnáváním samičí číšky kaštanové s číškou androgynickou a s klubíčkem samčích květů, mezi kterýmiž věcmi všemi zpozoroval přechody, k tomu úsudku, že čtyři laloky číšky bukové (obr. 6) a čtyři chlopně, ve které se číška kaštanu posléze poltí, jsou přeměněné listence dvou druhořadých samičích květů, které tedy zdřevnatějíce více méně dohromady srůstají. Číška by dle toho nebyla povahy osní, nýbrž listové, a šupiny neb ostny na vnější její straně nemohly by býti samy listy, nýbrž byly by pouhé výrostky (exkrescence) ze hřbetu těch 4 listenců do číšky srostlých.

Dle tohoto Eichlerova výkladu byl by rozdíl mezi kupuliferami pravými (dubovitými) a nepravými (habrovitými) mnohem skrovnější, než se před tím dle starší theorie osní za to mělo, neboť by číška dubovitých z těchže listenů byla srostlá, ze kterých obaly lupenovité kolem plodů habrovitých rostlin (habru, lísky, Ostrye) srostlé jsou, jenže poněkud jinou kombinací. (U habrovitých sroste vždy listen podpůrný s oběma listenci květu v obal plodní, kdežto by u dubovitých dle Eichlera listeny podpůrné nesrůstaly, nýbrž toliko listence a sice

všecky čtyři obou postranních květů pospolu, v jeden obal oběma květům [Fagus] společný). Dle staršího náhledu byla číška dubovitých jakožto osní útvar od obalů plodních u rostlin habrovitých, jakožto listových útvarů podstatně rozdílna.

Důvody, kterými Eichler svůj nový náhled podepřel, zdály se mi dříve velmi závažnými, takže jsem ve svém ve „Floře" řezenské 1878 otištěném referátu o Eichlerově klassickém spisu zvláště s tímto resultátem projevil svůj souhlas.

Avšak některá pozorování a bližší uvažování vzbudila ve mně již před několika lety pochybnosti o tom, zdali výsledek Eichlerův ohledně číšky kupulifer cestou srovnávací také správně odvozen byl, a letos událo se mi nalézti důvody věcné, které náhled Eichlerův dokonale porážejí a osní povahu číšky a význam jejích přívěsků jakožto pravých listů na ose této nepochybně dokazují.

První věc, která již dříve poněkud otřásla mou víru v theorii Eichlerovu, byla, že šupiny na číšce dubové valně se neliší od listenu, jenž číšku podpírá a nepochybným jest listem; že též nejdolejší první 2 šupiny na vegetativních pupenech podobné naduřelé zelené stopy listové (polštářky na ose) vytvořují, jako vůbec šupiny na číšce plodní. Taktéž jsou listence 2 po obou stranách kupuly bukové úplně totožné co do tvaru a substance s nejdolejšími přívěsky téže číšky*), které Eichler za pouhé exkrescence považuje, a mezi těmito tenkoblannými hnědými šupinami a ostatními hořeními přívěsky více tuhými, měkkoostenovitými jsou patrné přechody. Také Eichler pozoroval u Quercus palustris postranní listence, větší sice ale jinak shodné s šupinami číšky dubové.

Již z těchto shod mezi přívěsky číšky a nepochybnými listy šupinovitými vychází na jevo větší pravděpodobnost, že i tyto přívěsky jsou listy šupinovité spíše nežli pouhé exkrescence na listech.

Rozhodnější ještě důkazy poskytly mně letos pozorované variace číšky bukové, jaké posud (aspoň dle mého vědomí a dle toho, co Eichler, dobrý znatel dotyčné literatury, píše) ještě nikdy pozorovány nebyly.

Řečené kupuly poskytl mně jeden stromek odrůdy asplenifolia v parku Chuděnickém. Variace pak záležejí v tom, že číška na místo ve 4 laloky ve větší jich množství, 5, 6, 8 i více rozeklaná se spa-

---

*) Již za květu jsou 4 nejdolejší „přívěsky" této číšky značně větší a zřejmě jako zvláštní šupinovité palistům podobné listy vyvinuty (viz Eichler. Diagr. II. str. 24 obr. 10 C).

třuje a že zároveň počet plodů v číšce ze dvou, kteréž jsou pravidlem*), stoupá ve 3, 4, 6 i více.

Postavení květů a potom i plodů (bukvic) v těchto číškách jest následující: Osa uvnitř číšky nekončí se květem primárním (jako u dubů a kaštanů), kterýž jest potlačen, tudíž bukvice 2 normální jsou květy sekundární a stojí na příč, v pravo v levo od mediány (obr. 6). Každý z těchto dvou květů může v našich variacích míti po boku 2 květy třetiřadé, které pak stojí do čtyrhranu kolem květů druhořadých (obr. 4 a 7). Posléze mohou třetiřadé květy vydati ještě čtvrtořadé, jichž tedy bude osm, takže by v tom případě bylo všech květů a plodů $2 + 4 + 8 = 14$, kterýžto velký počet však jsem nikdy nenalezl, poněvadž tehdy jen některé (ne všechny) třetiřadé květy mají své postranní čtvrtořadé, anobrž i třetiřadé nebývají vždy v plném počtu čtyr vyvinuty (obr. 8, 5). Patrně pro takovou hojnost plodů potrava číšce dováděná předce nepostačuje; však i založené čtvrtořadé ba i třetiřadé plody nemohou se všecky vždy vyvinouti a zhusta některé zakrňují jak skrovnou velikostí tak i nedostatkem zárodku v semenech; ty pak bývají na laloku číšky výše pošinuty (obr. 4, 8). Nejvyšší počet plodů vůbec pozorovaný obnášel tudíž na místo 14 pouze 7 až 8. Však i to jest plodnost neobyčejná, ježto posud, jak výše řečeno, jen 2 plody v číšce jedné známy byly.

S pomnožením plodů stoupá také počet laloků, ve které číška (hned od počátku) rozštěpena jest. Každý z prvotních 4 laloků jest opět ve dvé (často méně hluboko než hlavní 4 laloky) rozeklán, jakmile za ním terciární květ se objevil, takže oba nové laloky přiléhají ku dvěma vnějším stranám bukvice terciární (obr. 4, 7). Jsou-li tedy všecky 4 plody terciární vyvinuty, tedy se spatřuje číška 8laločná, pakliže jen některé, tedy i číška 5, 6, 7 laloků nese (obr. 5). Jsou-li však i čtvrtořadé plody některé založeny, tedy i tyto druhořadé laloky (jichž v úplnosti jest 8) na novo ve dvé, ač ještě méně hluboko, rozeklané se spatřují (obr. 8).

Toto opětné rozštěpování laloků číšky patrně souvisí s objevem nových plodů vyššího pořádu a má svou mechanickou důležitost. Plody jsou totiž 3hranné a na hranách křídlaté (3křídlé). Každý nově přibylý plod, na př. třetiřadý, obracel by tudíž jedno křídlo proti jednomu ze čtyř laloků číšky, a poněvadž číška těsně přiléhá vždy ke plodům,

---

*) Eichler praví (Blüthendiagramme II pag. 25): „Die weiblichen Inflorescenzen sind nur 2blüthig", aniž zmínky činí o nějaké variaci od tohoto pravidla se odchylující.

nebylo by tu místa k vyvinutí se toho křídla. Rozštěpením toho laloku však povstane štěrbina, do které křídlo může vrůsti a tak místa sobě potřebného nabyti. A již původní čtyrlaločnost číšky 2plodé má tentýž mechanický význam; neboť ty dva plody přiléhají plochami k sobě a tvoří tudíž 4 vynikající rohy, které ve čtyrech skulinách 4laločné číšky nalézají dosti místa, aby se mohla křídla plodů vyvinouti (obr. 6). Plody kaštanu jsou oblé, bezkřídlé, a tudíž i číška, jinak s bukovou velmi shodná, nemá zapotřebí, aby se v laloky dělila, jest skutečně celistvá, až nahoru uzavřená (a teprva po uzrání plodů trhá se násilně ve 4 chlopně, aby plodům volný popřán byl východ).

Jestliže pak jsou, dle nauky Eichlerovy, čtyři primární laloky číšky bukové 4 listence, po 2 na obou osách květních sedící, tedy bychom při rozmnožení plodů rozvětvením do vyššího stupně a při současném pomnožení laloků měli očekávati, že pomnožení toto povstalo vyvinutím listenců květů třetiřadých a čtvrtořadých. Avšak tomu skutečné rozeklání číšky v 8, pak v 16 laloků (kdyby bylo rozeklání úplné) nikterak neodpovídá. Nepřibyly to nové listence k stávajícím, nýbrž tentýž lalok, dříve zcela a nyní ještě doleji nedělený, stal se nyní hořeji 2klaným (obr. 5, 4).

Jestliže však laloky sekundární povstaly rozpoltěním jednotného laloku primárního, a to za mechanickou příčinou k vůli poskytnutí místa křídlům plodním, tedy musíme z toho důsledně souditi, že též 4 primární laloky povstaly rozpoltěním původně celistvé číšky za tímže neméně patrným účelem*). Musí tedy číška kaštanu, zprvu celistvá, býti původnější nežli 4klaná číška buková.

Pak ale není celistvá číška kaštanu i dubu nikterak ze 4 listenů srostlá, nýbrž jest to vyzdvižená dutá osa, docela podobná oné, která jak známo, fíkový plod (smokvu) tvoří.

---

*) Kdyby snad někdo, nechtěje se vzdáti náhledu, že čtyři laloky číšky bukové jsou listy, proti důkazu opačnému vylíčených zde variací brániti chtěl náhled svůj tím, žeby sice připouštěl rozeklání čtyr laloků primárních, avšak předce laloky ty za vícekrát řečené listeny vydával: ten a takový by nedůsledně si počínal, ježto by jeden a týž úkaz, totiž opětující se rozeklání dříve celého dílu, které stojí v patrné souvislosti s počtem a postavením křídlatých plodů, dvojím způsobem vykládal, libovolně jak se mu právě hodí, jednou jako rozdělení údu původně neděleného, po druhé jako sršst původně oddělených a zvláštních údů. Důsledně jen jedna ze dvou možností bude pravdou: buďto jsou-li 4 primární laloky listence dvou prvních květů, zakládá se tudíž i zmnožení laloků na vytvoření dalších listenců; anebo jsou i primární i sekundární a tertiální laloky pouhé úkrojky jednoho původně nedílného celku, totiž osy kruhovitě vyzdvižené. První důsledek vyvrací však číšky vícekvěté a vícelaločné, pročež jen druhá možnost jest skutkem.

S tímto výsledkem shoduje se také povaha šupin a výrostků na číšce, kteréž u buku s listenci, u dubu s listenem podpůrným, u kaštanu s oběma v podstatě se srovnávají, takže i z toho právem usoudíme, že jsou ty šupiny listy na ose číškové.

Proti náhledu, žeby číška ze 4 listenců sekundárních květů byla srostlá, uvésti lze ještě i ten důvod, že číška ta zůstává tatáž, ať si u kaštanu (a u některých cizozemských buků: jako Fagus Dombeyi, Cunninghamii) 3 aneb, jak někdy se děje, pouze 1 konečný květ v ní sedí, a že též u dubu, kde úplně nedělená mističkovitá číška důsledně též ze 4 úplně kongenitálně srostlých listenců sestávati by musela (což i Eichler připouští), povždy jen jeden a to konečný květ a plod se nachází. V těchto případech bylyby tedy listence sekundárních květů vyvinuty, i když o květech samých není ani památky, což jest věc bezpříkladná, poněvadž jindy, když v květenství ochuzeném postranní květy se nevyvinou, nevyvinou se také ani prýty květní vůbec, tedy také ani listence. Ostatně i to padá na váhu, žeby osy postranní dle představy Eichlerovy, aby listence všecky mohly kongenitálně srůsti, musely pod konečným květem (kaštanu) jako jeden val kruhovitý objímati osu mateřskou, čehož také sotva kde jinde najde se doklad.

Číška kupulifer jest útvar metamorfický, t. j. z vegetativního tvaru ve tvar zvláštní za účelem rozplozování přeměněný, a metamorfosa taková bývá právě příčinou, že morfologický význam údu jí podléhajícího zhusta jest nejasný anobrž i pochybný a nezřídka sporný. Metamorfosa zpáteční, kterou by pochybný útvar více neb méně do vegetativního stavu se navrátil, musila by ukázati rázem význam pochybných a sporných částí, pročež takové metamorfose sluší přičítati zvláštní váhu a důležitost. Jest-li skutečně číška kupulifer ze čtyř listenců složená, tedy při zpáteční metamorfose musí se zřetelněji objeviti tyto čtyři listence, a šupinovité neb ostnovité výrostky, které na vegetativních listech, jak lupenech tak i šupinách nenacházíme, nýbrž toliko na metamorfovaných problematických listencích, musí při zpáteční metamorfose více a více se redukovati až i posléze zmizeti. Jsou-li naopak šupinky na číšce listy samostatné, musí při zpáteční metamorfose listová povaha jejich zřetelněji vystoupiti, nemohou zmizeti, nýbrž musí naopak v řádné, buď lupenovité neb šupinovité listy se přeměniti. Zpáteční metamorfosa jest tedy jako experimentální zkouška na jakoukoli tvarozpytnou theorii nedosti jistou a nepochybnou.

Takovouto zpáteční, k vegetativnímu stavu směřující zajímavou metamorfosu pozoroval jsem též loni ohledně čířky žaludové. Na dubu (Quercus pedunculata) hojně duběnek nesoucím nalezena přeměna čířky v neobyčejně velký, skoro přes 2 cm. dlouhý a skoro tolikéž široký, vejčitý, ze šupinovitých lístků složený pupen. Tento pupen, na stopečce sedící, byl bohužel od neznalce se stromu utržen, takže se již nedalo zjistiti postavení jeho na větvičce, nicméně nelze pochybovati, že jest to přeměněná čířka a že tudíž na témž místě, na stopečce úžlabní, pobočně vznikla, kde čířka normální. Příčinou té abnormální přeměny bylo nejspíše píchnutí hmyzem, neboť i jinak dub ten hojnými hálkami (duběnkami) byl ověsen.

Řečený pupen (obr. 1) skládal se ze šupin dosti velkých (vnější byly 8 mm. dlouhé, vnitřní však až $1^1/_2$ cm.), okrouhlých, na širokém okraji blánovitých, jinak zelených a bylinných, přitlustlých, seřaděných ve víceřadé spirálce, tak jako šupinky na čířce normální, při tom však střechovitě se kryjících. Zcela nejdolejší šupinky byly mnohem menší, as tak velké jako na kupule normální, blánovité, a pod nimi tlusté naduřelé polštářky (stopy listové, obr. 2), jaké též na šupinkách čířkových, ale na všech, normálně nalézáme.

Podélný řez tímto pupenem (obr. 3) ukazuje, kterak osa pupene se končí okrouhlou nahou plochou, okolo které pletivo osní valovitě jest vyzdviženo pod listy šupinovitými, jejichž délky do vnitřka přibývá, až pak vnitřní lístky na vnitřním svahu toho valu stojící opět jsou více a více zmenšeny, poslední nejvnitřnější úzké brvité a chlupaté lístky až na kraj kruhovité konečné plochy sestupují.

Není nejmenší pochybnosti, že tu máme před sebou vegetativní přeměnu čířky žaludové, ve které žádný semeník založen nebyl, pročež osa uvnitř okrouhlou hladkou plochou se končí, ve které však lístky zveličely a v šupiny podobné jak na pupenu vegetativním, jenže zelené a ne hnědé se vyvinuly. Normální čířka našich dubů liší se hlavně tím od vegetativního pupenu, že jsou na ní všecky listy v malé blánovité šupinky zakrnělé, za to však osní části pod nimi ve polštářky zveličelé; u naší přeměny s dokonalejším vývojem šupin stopy na ose mezi šupinami hustě stojícími ovšem přestaly, a jen pod nejdolejšími ještě redukovanými šupinkami se vyvinuly, což oboje také na obyčejných vegetativních pupenech se spatřuje, kdež také jen nejdolejší (a sice 2) šupinové listy vytvořují polštářky osní.

O pravidelném vývoji čířky dubové víme (od Hofmeistera), že šupinky nejprvé na vnitřním svahu vyzdvihující se čířky akropetálně vznikají, potom ale jaksi obrácením čířky na rub na zevnitřní stranu

její se pošinou. Na naší abnormální čísce jsou vnitřní šupiny posud na vnitřním svahu, vnější delší a větší na vnějším, tedy číška jaksi v nedokončeném ještě vývoji se zarazila a strnula.

Tato výtečná metamorfosa dokazuje očividně, že jest číška dubu přeměnou pupenu vegetativního, že se šupiny její rovnají šupinám obalným na pupenu vegetativním, od něhož se liší číška hlavně jen tím, že osa její jest prohlubená okolo květu, kdežto u onoho jest až do vrcholku válcovitá.

Zpáteční metamorfosou čížky dubové a variacemi hojnokvětými čížky bukové stvrzen jest tedy starší Hofmeisterův náhled, že číška sama jest dutá vyzdvižená osa a šupiny její více méně přeměněné listy, náhled, který ostatně též vývoj čížky v té míře podporuje, ve které s opáčným náhledem Eichlerovým jen velmi stěží srovnati se dá. Šupiny ty totiž příliš samostatně a záhy vznikají kolem samičího květu a číška teprv pod nimi a s nimi se pozvolna zdvihá, kdežto kdyby číška z listenů se skládala, musela by nejprv sama se vyzdvihnouti a výrostky její mohly by teprv později na ní vyrůstati. Zvláště pak na rub obrácení čížky dubové s vývojem listů se nesnáší.

Ježto tedy tolik a tak podstatných důvodů pro osní povahu čížky a listovou povahu jejích přívěsků se zamlouvá; jaké důvody má Eichler pro svůj výklad těchto částí? a co o platnosti těchto důvodů souditi máme? Výtečný německý morfolog vycházel, jak svrchu řečeno, od kaštanu (Castanea) a sledoval přechody od trojkvětého číškou ostenatou obaleného květenství samičího do klubíčkovitého 7květého květenství samčího, a porovnáním tím byl veden k výsledku, že 4 chlopně čížky samičí přecházejí poznenáhla do čtyř nepochybných listenců květenství samčího, z čehož vycházel závěrek ten, že ty 4 chlopně morfologicky rovnají se čtyřem listencům květů sekundárních. V těchto přechodech, praví Eichler — a demonstruje to schematickými výkresy — ve kterých samičí skupina květní do samčí se přeměňuje, redukuje se kupula vždy více a více, počtu její přívěsků poznenáhla ubývá; v prvních čistě samčích klubíčkách jest těch přívěsků již jen velmi málo a posléze i ty odpadají, takže zbudou pouze 4 jednoduché šupiny na místě oněch čtyř chlopní, čímž přechod z čížky do obyčejných listenců dovršen jest.

Proti methodě srovnávací, které Eichler k seznání morfologické hodnoty čížky používá, nelze ničeho namítati, naopak i já jsem se jí vždy proti nadceňování jiných method morfologického výskumu, na př. vývojezpytu, rozhodně zastával. Avšak tato methoda jen tehdy vede

k správným koncům, když srovnávání stejnoznačných částí děje se přesně a souvisle; neboť i při srovnávání může se něco přehlédnouti a tím chyba do rozpočtu morfologického se vlouditi. Jestliže pak výsledek, jehož došel Eichler srovnávací methodou, příčí se tak rozhodně tomu, co srovnáváním jiných přeměn (u buku i dubu) zde dokonale zjištěno bylo, musí býti chyba ve srovnávání a v konečném závěrku Eichlerově.

Tato chyba jest také zcela patrna při pohledu na Eichlerovy obrazce (Blüthendiagramme II. str. 21. obr. 9 *E F G C*). V obraze *F* jest ovšem číška redukována, přívěsky na ní v počtu menším vyvinuty, v obr. *G*. však číška sama již není naznačená, nýbrž pouze čtyři (diagonálně tak jako chlopně číšky postavené) skupiny šupinek. Zbude-li pak v každé z těchto 4 skupin jenom jedna šupinka (na př. v levo v předu ta nejvnější největší), pak ovšem povstane obr. *C*. Avšak z celého porovnání nikterak nenásleduje, žeby chlopně číšky v obr. *E*. rovnaly se listenci v obr. *C*., nýbrž vyplývá z toho nanejvýš pouze homologie přívěsků číšky, redukovaných v každé ze čtyr skupin na jediný člen, s listencem v květenství samčím *C*.

Správným a soudným srovnáním těch stavů, které Eichlerovi sloužily, dojdeme tedy téhož výsledku, jako dříve, totiž že přívěsky či šupinky číšky jsou listy a číška sama, která pod listy těmi se zdvihá, ale také vyzdvižena býti nemusí, anižby pak šupinky musely zcela scházeti, že jest pouhou kruhovitou (u buku ve 4 laloky se dělící) vyzdviženinou osy květní.

Zbývají sice ještě některé otázky k zodpovědění, zejména otázka ta, kterak že se vysvětluje uspořádání šupinovitých listů ve 4 mezerami oddělené skupiny na číšce kaštanu, kteréžto u buku ve 4 zvláštní oddělené laloky vyrůstají. Toto uspořádání, — jehož ovšem na číšce žaludové není — poskytuje Eichlerovi též argument pro jeho náhled, že jsou šupiny ty výrostky (exkrescence) ze 4 listenců, a měla by tedy zdánlivost tohoto argumentu býti dokázána možností jiného nenuceného výkladu. Avšak výklad toho, jenž mám po ruce, vedl by mne tenkrát příliš daleko — vyžadoval by též nových obrazců —, pročež na tomto místě od něho upouštím a pro jinou příležitost si jej uschovávám. Toliko si dovolím ku konci této zprávy na patřičném místě něco toho se týkajícího krátce připomenouti.

K jedné věci však třeba ještě poukázati. Poněvadž jest číška vyzdviženinou osy květní, tedy i všecky šupinovité lístky na ní jsou listy osy, která primárním květem (u dubu, kaštanu a některých cizích druhů buku), se končí, tedy též šupinky ve čtyřech skupinách

v Eichlerově obr. *G.*, a kdyby zbyl z každé skupiny jen jeden lístek, tedy i tyto čtyři lístky náležely by hlavní ose primární. Zdali v čistě samčím květenství obr. *C.*, kde čtyři listeny právě v postavení oněch skupin se nalézají, s oněmi čtyřmi lístky primární osy jsou totožné, není jisto, dle Eichlera jsou to listence na osách sekundárních, v jejichž paždích stojí květy terciární. Je-li tomu tak, tedy ani homologie těch samčích listenců se šupinkami obr. *G.* neobstojí, ačkoli postavení těchto i oněch jest na pohled stejné. Tato otázka žádá ještě důkladnějšího ohledání květů kaštanových v době květné.

Co se dotýče homologií květních mezi pravými kupuliferami a mezi habrovitými, objeví se nám tato homologie nyní poněkud v jiné podobě než Eichlerovi. Tento srovnává na př. 2květou čìšku samičí u buku s dvoukvětou samičí skupinou v paždí každé šupiny jehnědové u habru a v paždí květonosných šupin na vrcholku pupenu u lísky, a srovnání to byloby odůvodněno, kdyby číška kupulifer dle Eichlerovy theorie ze 4 listenců sekundárních se skládala. Poněvadž však tato theorie klamnou se býti ukázala, třeba také homologii číšky u habrovitých jinde hledati. Prýt nesoucí číšku u buku, v úžlabí letošního lupenu stojící, rovná se totiž u lísky prýtu pupenovitému se samičími květy v paždí lonského listu, a u habru rovněž větevce z paždí lonského listu vyrostlé a hroznem samičích (jednak i samčích) květů ukončené.

Prýty květotvorné v úžlabí lupenů vznikající jsou totiž u Kupulifer proleptické, u habrovitých nejsou takové, to jest u poslednějších pupeny květodajné vyvinují se o rok později než mateřské jich listy, tedy na lonské vždy větevce, u kupulifer však předčasně (o rok urychleně, proleptický) v témž roce, ve kterém mateřské listy. S prolepsí souvisí, že prýty proleptické nevytvořují u kupulifer vegetativních lupenů, které množství materiálu výtvarného vyžadují, nýbrž toliko šupiny a květy, kdežto u habrovitých tytéž prýty (poněvadž nejsou proleptické, poněvadž totiž počkaly s vývojem až do příští vegetační doby, kdy mateřské jich listy, již loni vytvořené, z látek ročně nastřádaných vyživovati netřeba) ve větévky listnaté s květenstvím konečným se vyvinou. Šupinky na číškách kupulifer, především buku, rovnají se tedy jak šupinám, tak i lupenům na květní samičí větévce u habru a lísky, což u lísky zvláště tím více vysvítá, ježto její prýt samičí v čas květní ve stavu pupenu se nachází, od něhož do vytvoření číšky, jak jsme ohledně češulky dubové dříve shledali není daleko. Konečný skluk květů u lísky rovná se pak shluku dvou květů u buku, při čemž je ten rozdíl, že květy buku mají potlačené

podpůrné listeny, kdežto u lísky jsou vyvinuty nejen tyto nýbrž i ještě listence prvo- i druhořadé (kteréž okolo každého květu ve známý laločnatý obal srůstají). Vidíme z toho, že ty listence, které u habrovitých srostnutím plodní obaly tvoří, u Kupulifer naprosto (a vedle nich již i hlavní listeny) scházejí (potlačeny jsou), čímž pravdivý názor náš od Eichlerova, kterému jsou čišky těmito listenci, daleko se liší.

Čišky kaštanu a dubu liší se od čišky buku, že nevznikají přímo v úžlabí lupenu letošního jako tato poslednější, nýbrž teprva v úžlabí listenu na ose hroznové, která sama zas z paždí lupenu vychází. Jest zde tedy prolepsis nejen 1letá nýbrž dvouletá, ježto by se čišky jakožto vegetativní prýty vyvinuly o 2 roky později. Jinak ještě ten rozdíl jest u kaštanu, že osa čišková u něho se sama již končí květem primárním, který u buku potlačen jest, a u dubu, že pouze tento konečný květ v čišce se nachází.

Květorodné prýty s čiškou dojista jsou metamorfosí prýtů vegetativních, pročež oboje vespolek porovnati třeba.

Vegetativní prýty u buku mají postavení listů dvouřadé, u kaštanu aspoň slabší prýty též (silnější přecházejí do postavení víceřadě spirálního) a ty třeba porovnati s češulkovým prýtem, který, tak jako reproduktivní prýty vůbec, rovněž a ještě více oslaben jest. Na těchto dvouřadých vegetativních prýtech následují po dvou postranních prvolistech střídavé páry nejprv bezčepelných, potom i čepel mezi sebou nesoucích šupinovitých palistů. Metamorfosí fruktifikativní na češulce z takového prýtu vegetativního odvozené odpadnou ovšem veskrze čepele listní a obdržíme čtyři řady šupin transversálních k medianě čišky, tedy právě v tom postavení, ve kterém u kaštanu chlopně (u buku laloky) čišky se nalézají. Tím vysvětluje se již postavení šupinek čišky ve čtyrech kvadrantových skupinách. V každé příčné řadě takové skupiny stojí sice větší počet úzkých šupinek, avšak to se vysvětluje zase tím, že každá řada rozpadnutím se jedné širší šupiny v úzké díly povstala, jakož dosvědčují nejdolejší listy na čišce kaštanové i bukové.

Na vegetativním prýtu dubů jsou listy sestaveny spirálně dle $^2/_5$ a s tím souhlasí také sestavení šupin na čišce v dvouobvodných spirálích neb na místo nich v střídavých mnohočetných přeslenech.

Co se dotýče poměru samčích a samičích květů a jich květenství, jest Eichler úplně v právu, tvrdí-li, že oboje jsou u kaštanu, ale i všude jinde, homologické. Samčí květní osy liší se však od samičích mnohem pokročilejší redukcí. Prýt číškonosný u kupulifer (buku) povstal redukcí z listnatého, konečné květenství nesoucího prýtu u habrovitých, ale samčí klubko u kaštanu vykazuje ještě pokročilejší redukci šupinovitých listů pod prvním terminálním květem. Pozoruhodno jest, že u kaštanu, který má vícekvětou češulku, též vícekvětá klubka samičí na ose klasové nalézáme, kdežto u dubů s číškami jednokvětými v klasu také jen jednotlivé květy v paždí listenů klasů ♂ se vyvinují. V rodu Fagus, kde číška ♀ jednotlivě přímo v paždí lupenu na letošním letorostu vyniká, jest sice homologické květenství ♂ obyčejně hojnokvěté, strboulovité (jak u našeho buku); avšak u F. betuloides Mirb. na místo něho pouze stopka jednokvětá.

Šupiny číšky kupulifer vznikají, jak od Hofmeistera známo, interkalárně mezi založeným již konečným květem neb malým květenstvím a jeho dvěma prvolisty. Hofmeister sám zvláště k tomu případu vývoje číšky rád se odvolával na doklad svého učení, že listy mohou vznikati také interkalárně, jako vsunuté (eingeschaltet) mezi jiné již založené listy. Kdyby Eichlerův výklad číšky byl pravý, odpadal by tento doklad, poněvadž by se v tom vývoji nejednalo o listy, nýbrž pouze o výrostky (exkrescence). Však po vyvrácení Eichlerova náhledu, ostává faktum Hofmeistrem objevené ve své váze, třeba je toliko vysvětliti, to j. z normálního pochodu akropetálního vytvořování listu na ose odvoditi. Interkalární vznik listů pozorovati lze toliko na prýtech určitě obmezených, tedy na prýtech květních a květonosných. Na takovém také prýtu povstává i číška kupulifer. Konec a cíl toho prýtu jest vytvoření květu neb malého květenství samičího; tento cíl jest tak významný a důležitý pro rostlinu, že právě jemu k vůli metamorfosa, kterou číška povstává, se děje. Vytvoří-li se tedy počátek květu konečného u dubu dříve nežli počne vývoj číšky, jest to tím, že prýt samičí u k v a p u j e své ukončení dřívějším vytvořením tak důležitého dílu, jakým jest květ, pročež vytvořování listů číšky, které by předcházeti mělo, se o p o z d í; a toto uspíšení ve vývoji květů jest tím spíše možné, ježto podpůrné listy květů úplně se potlačí. Interkalární vznik listů není tedy původní zjev, nýbrž sekundární, odvozený, opozděním těch listů resp urychlením konečného útvaru na ose způsobený.

Ještě jinou morfologickou odchylku — zajisté také již při vývoji — poskytuje číška hojnokvětá, jaké jsme seznali u Chuděnické Fagus asplenifolia a jaká též u kaštanu někdy se objevuje. V této jsou totiž květy terciární a quaternární na pohled souřadné s květy druhořadými, vynikají totiž na zdání na téže rozšířené ose číškové vedle sebe (viz obr. 5), jako v hroznovitém květenství květy vedle sebe na ose hlavní, a předc jest květenství samičí u buku vrcholičnaté, tedy květy po stupních podřaděné. Nepochybuji, že též ve vývoji květy tím způsobem na ose číšky se objevují, a pak jest zde analogický případ jako u Brutnákovitých a jiných, kdež květy vijanu též na ose zdánlivě jednoduché, vskutku však na předem vytvořeném souosí vedle sebe vznikají. Budou-li jednostranní vývojezpytci i to květenství buku považovati za hrozen? anebo uznají konečně, že vývoj v takových případech klamati musí? Racionální morfolog bez rozpaku uzná, že jest zde číška v dolení části své souosím, ze kterého pak květy podřaděné ovšem vedle sebe, tak jako ve vijanu Brutnákovitých, ale v uspořádání vidličnatém (dichasiálním) vznikati musejí.

Vysvětlení obrazců.

Obr. 1. Abnormální kupula dubu (Quercus pedunculata), něco málo větší než v přiroz. velik.

Obr. 2. Basis též kupule, viděna více zdola, takže viděti lze nejdolejší malé šupinky s jich stopami poduškovitými.

Obr. 3. Táž kupula podél proříznuta.

Obr. 4. Číška buku (Fagus silvatica var. asplenifolia) 8laločná, se 4 bukvicemi třetiřadými (z nichž levá přední malinká, zakrnělá a na laloku primárním méně hluboko rozeklaném vzhůru pošinutá) okolo dvou bukvic druhořadých. Z bukvic kresleny toliko průřezy. *b*) inserce podpůrného listu číšky.

Obr. 5. Jiná číška z téhož buku, 6laločná; kromě 2 květů normálních sekundárních ještě jeden třetiřadý v levo v zadu; v levo v předu, ač tam lalok primární krátce rozeklán, není vyvinut květ terciární. Bukvice jsou vypadlé, takže viděti toliko 3hranná políčka, na kterých bukvice byly přisedlé.

Obr. 6. Diagramm bukvice normální 4laločné, se 2 bukvicemi sekundárními.

Obr. 7. Diagramm číšky se dvěma sekundárními a čtyřmi terciárními dobře vyvinutými bukvicemi. *b*) inserce listu podpůrného.

Obr. 8. Diagramm číšky 8květé, se 3 květy (bukvicemi) třetiřadými a 3 květy čtvrtořadými, z nichž jeden v levo v předu zakrnělý. Bukvice terciární v levo v předu nepravidelně vyvinutá a otočená. *b*) opět inserce listu podpůrného.

Resumé der Mittheilung über die morphologische Bedeutung der Cupula bei den echten Cupuliferen.

Die Cupula der echten Cupuliferen ist nach der älteren Ansicht (Hofmeister, Schacht, Döll u. a.) ein blättertragendes Axengebilde, nach der neueren Auffassung Eichler's aber ein Produkt der 4 Vorblätter der Secundanblüthen. Der Vortragende hat die Überzeugung gewonnen, dass die ältere Ansicht die richtige ist. Für sie spricht schon die in Gestalt, Textur und Färbung sich kundgebende Übereinstimmung der untersten Cupularschuppen der Buche und Kastanie mit den Niederblättern und Stipulae der gleichen Pflanzen, der Cupularschuppen der Eiche mit dem Deckblatt (auch den von Eichler bei Quercus palustris bemerkten Vorblättern) der Eichencupula. Auch aus der Entwickelung ergibt sich einfach und naturgemäss die Deutung, welche schon Hofmeister aus ihr gezogen. Insbesondere aber führt Vortragender als Stützen und Beweise derselben folgende neue Beobachtungen an.

Von der var. asplenifolia der Rothbuche wurden in Menge Cupulae mit zahlreichen Blüthen resp. Früchten und mit nach Massgabe der Blüthenvermehrung fortgesetzter Spaltung ihrer Lappen beobachtet. Die 2 normal vorhandenen Secundanblüthen hatten tertiäre (und diese öfter noch quaternäre Blüthen hervorgebracht, Fig. 4, 7, 8). Doch waren nicht alle bei regelmässiger dichasialer Verzweigung zu erwartenden Blüthen (2 + 4 + 8 = 14) entwickelt, sondern wegen ungleicher Verzweigung nur höchstens etwa die Hälfte davon (7—8, wie in Fig. 8), und häufig waren die quaternären und bisweilen schon die tertiären Früchte sehr kümmerlich entwickelt und dabei auf die Lappen der Cupula emporgehoben (Fig. 4, 8). Jeder der 4 primären Abschnitte der Cupula war beim Auftreten von Tertianblüthen wiederum, gewöhnlich nicht ganz so tief, entzwei gespalten (also bei 4 Tertianblüthen war die Cupula 8spaltig, wie in Fig. 7, bei Entwickelung einer geringeren Zahl derselben nur 5—7spaltig, wie in Fig. 5), und jeder secundäre Abschnitt spaltete wieder, sobald hinter ihm eine

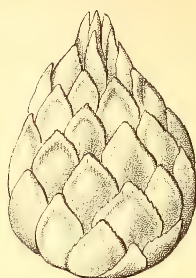
Číška Kupulifer.



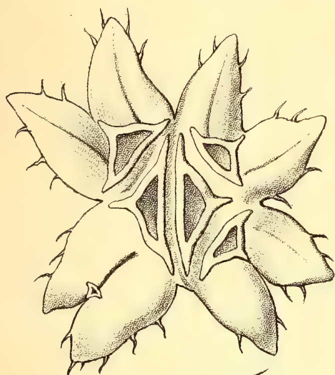
3



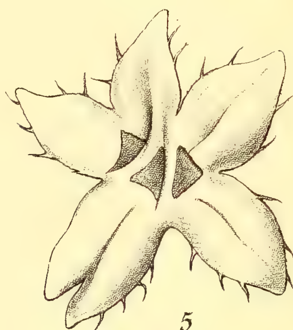
2



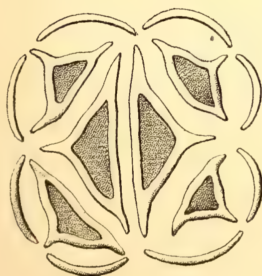
1



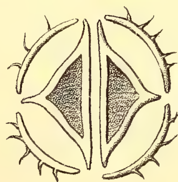
4



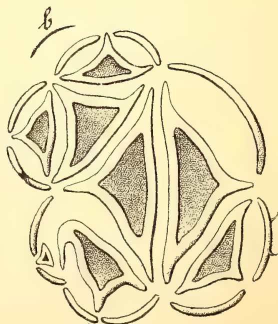
5



7



6



8

Čelakovský del. *Lit. Farský, Prague.*

quaternäre Blüthe auftrat (Fig. 8), bisweilen auch ohne dass dies bereits eingetreten war. Diese wiederholten Theilungen der 4 primären Lappen der Cupula widerlegen nun die Ansicht, dass letztere die Vorblätter der Secundanblüthen sein könnten, lehren vielmehr, dass hier ein ursprüngliches (bei Quercus noch ungetheiltes) Gebilde sich der Zahl der Blüthen entsprechend (entwicklungsgeschichtlich) zuerst in 4, dann in mehr Lappen theilt, nicht bloss um die Früchte freizulassen, sondern auch um bei möglichster Raumausnützung für die Bildung der Flügelkanten der Früchte, welche in die so gebildeten Spalten z. Th. hinein und selbst aus der Cupula herauswachsen können, Platz zu schaffen. Dieses einheitliche Gebilde kann aber nur ein Axengebilde sein.

Ein anderes Beweisobjekt für die axile Natur der Cupula und die Blattnatur ihrer „Anhängsel“ ist die in Fig. 1, 2, 3 abgebildete abnorme Eichelcupula, die (vielleicht in Folge von Insektenstich) zu einem über 2 cm. langen und fast 2 cm. breiten knospenartigen Körper erwachsen war, bestehend aus spiralig gestellten, dachziegelig deckenden Schuppenblättern (Fig. 1), von denen die längsten mittleren bei $1^1/_2$ cm. lang, die innersten wieder successive kleiner waren und auf der Innenböschung eines unter ihnen emporgehobenen, den flachen kreisförmigen Vegetationspunkt (der jedoch keine Blüthe erzeugt hatte) umgebenden Walles (der Cupula, deren normale Entwickelungsgeschichte zu vergleichen ist!) herabstiegen (Fig. 3). Dass es sich hier um eine knospenartige Umbildung der Cupula handelt, das beweisen auch noch die untersten Schuppen dieser Knospe, die häutig und reducirt, auch mit Blattpolstern versehen waren (Fig. 2) wie die Schuppen der normalen Cupula durchgehends. Diese abnorme, in den vegetativen Zustand zurückgehende Cupula zeigt evident, dass die Schuppen der Eichencupula Niederblätter sind, gleich den Knospenschuppen, und die Cupula selbst somit ein Axengebilde.

Die von Eichler in den Blüthendiagrammen zuerst genauer studirten Übergänge aus weiblichen in männliche Blüthengruppen bei der Kastanie zeigen, wie der axile Körper der Cupula allmählich reducirt wird und zuletzt schwindet, und wie auch die Schuppenzahl reducirt wird, bis dann in der extremen ♂ Gruppe 4 „Vorblätter“ in der relativen Stellung der Cupularklappen auftreten (übrig bleiben?), woraus aber der Schluss, dass jene 4 Vorblätter den (ja bereits geschwundenen) Cupularklappen aequivalent wären, nicht zulässig ist. Eher könnten jene „Vorblätter“ den 4 äussersten Schuppen der reducirten Cupula (den 4 „involucrirenden“ Schuppen bei Fagus) ent-

sprechen; dann aber wären es keine Vorblätter der Secundanblüthen, was noch näher zu untersuchen sein wird.

Vergleicht man von dem oben gewonnenen Standpunkte aus die Corylaceen mit den echten Cupuliferen, so ergibt sich, dass nicht etwa die 2blüthige Gruppe bei Corylus oder Carpinus der normal auch 2blüthigen Buchencupula entspricht, sondern der ganze mit dem aus jenen Gruppen gebildeten ährigen Blüthenstand beschlossene Spross, und dass bei der Entstehung der Cupula aus einem solchen Spross Prolepsis mit im Spiele ist. Die von Hofmeister betonte faktisch vorhandene Einschaltung der Cupularblätter beruht aber auf einer Verspätung derselben, resp. Beschleunigung des terminalen weiblichen Blüthenstandes, in dem die Deckblätter und Vorblätter der Blüthen durchaus unterdrückt sind. Die blättertragenden Quadranten (Klappen) auf der Cupula der Kastanie lassen eine andere Erklärung zu als die, welche die Vorblätter-Theorie gibt; worüber jedoch, wie über das ganze Thema überhaupt, anderwärts eingehender abgehandelt werden wird, da diese Mittheilung nur als eine vorläufige zu gelten hat.

41.

O analogiích mezi theorií deformací a theorií napjetí.

Přednesl Dr. A. Seydler dne 12. listopadu 1886.

I.

V theorii deformaci má důležitý úkol t. zv. deformační ellipsoid, t. j. tvar, jejž obdrží následkem deformace (nekonečně malá) koule o libovolném středu (x, y, z). V theorii napjetí vyskytují se dvě plochy 2. stupně: řídící plocha, jež určuje přidruženými sobě průměry a diametralnými rovinami směry napjetí a příslušných k nim rovin, a ellipsoid pružnosti, jehož průvodiče určují velkost výsledného napjetí v každém směru. Mezi těmito plochami a mezi ellipsoidem deformačním není žádné značnější analogie; soustava deformačních ellipsoidů pro všechny body pohybujícího se útvaru sestrojených poskytuje spíše analogii ku hodografu rychlosti, majíc pro statický problem deformace podobný význam jako zmíněná čára pro kinetický problem translace.

Můžeme však i pro deformaci ve vlastním, užším smyslu, totiž pro soubor expanse a prosté deformace čili pro onu část stejnorodého

pohybu, která zbývá po vyloučení translace a rotace, sestrojiti dvě plochy, řídící plochu 2. stupně a ellipsoid pošinutí, jež poskytují úplnou analogii ku plochám v theorii napjetí se vyskytujícím.

Při vyšetřování jakéhokoli pohybu rozkládáme týž v pohyb stejnorodý; vytknuvše sobě totiž bod A (x, y, z), dovozujeme, že v nekonečně blízkém sousedství jeho má kterýkoli bod B $(x+a, y+b, z+c)$ pohyb, jehož složky jsou lineárnými úkony relativných souřadnic a, b, c. Pohyb ten se skládá z části, společné všem bodům kolem A položeným, t. j. společné celé hmotné částici kolem téhož bodu, tak že tím částice co taková se nemění čili deformace nedoznává; a z druhé části, která mění rozměry a tvar částice. Pro deformaci jest jen tato část důležitá, ana nás poučuje, jaké jsou v různých směrech odchylky (deviace) od původních vzájemných poloh bodů téže částice, čili pošinutí jednoho bodu vzhledem k druhému. Je-li na př. B' nová relativná poloha bodu B vzhledem k A, jest $\overline{AB}$ původní, $\overline{AB'}$ konečný vektor, $\overline{BB'}$ deviace bodu B vzhledem k bodu A. Při určení tohoto pošinutí záleží však zcela jen na velkosti a směru vektoru AB; pro všechny rovnoběžné, stejně dlouhé, nekonečně sobě blízké vektory v sousedství bodu A jest pošinutí to stejné, a za míru jeho hodí se tudíž poměr délky jeho ku délce původního vektoru, čili pošinutí pro jednotku délky původního vektoru. Složky pošinutí toho můžeme tudíž, nazveme-li n směr vektoru $\overline{AB}$, p směr pošinutí samého a r_n hodnotu jeho, při známém označení*) psáti:

---

*) Nazveme-li totiž u, v, w složky pošinutí bodu A, můžeme zavésti pro krátkost označení:

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x},\quad x_y = \frac{\partial u}{\partial y},\quad x_z = \frac{\partial u}{\partial z},$$
$$y_x = \frac{\partial v}{\partial x},\quad y_y = \frac{\partial v}{\partial y},\quad y_z = \frac{\partial v}{\partial z},$$
$$z_x = \frac{\partial w}{\partial x},\quad z_y = \frac{\partial w}{\partial y},\quad z_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

Většina spisovatelů (tak Kirchhoff, F. Neumann) užívá označení poněkud změněného, kladouce:

$$y_z = z_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z},$$
$$z_x = x_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z},$$
$$x_y = y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Zde se přidržíme důslednějšího označení hořejšího, jehož užívá též Weyrauch (Theorie elastischer Körper, 1884).

$$x_n = r_n \cos(px) = x_x \cos(nx) + x_y \cos(ny) + x_z \cos(nz),$$
(1) $$y_n = r_n \cos(py) = y_x \cos(nx) + y_y \cos(ny) + y_z \cos(nz),$$
$$z_n = r_n \cos(pz) = z_x \cos(nx) + z_y \cos(ny) + z_z \cos(nz).$$

Koefficienty v rovnicích těch mají jakékoli hodnoty, vyloučíme-li ze stejnorodého pohybu částice kolem A pouze společnou translaci; vyloučíme-li však i společnou rotaci, musí zároveň býti

(2) $$y_z = z_y, \quad z_x = x_z, \quad x_y = y_x.$$

Nazveme D determinant, utvořený z prvků $x_x, \ldots z_z$ a $X_x, \ldots Z_z$ přidružené k týmž prvkům subdeterminanty, pro které platí patrně obdobné rovnice:

(2a) $$Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x.$$

Pak jest:

$$D \cos(nx) = r_n [X_x \cos(px) + Y_x \cos(py) + Z_x \cos(pz)],$$
(3) $$D \cos(ny) = r_n [X_y \cos(px) + Y_y \cos(py) + Z_y \cos(pz)],$$
$$D \cos(nz) = r_n [X_z \cos(px) + Y_z \cos(py) + Z_z \cos(pz)].$$

Mysleme si plochu 2. stupně:

(A) $$X_x\xi^2 + Y_y\eta^2 + Z_z\zeta^2 + 2Y_z\eta\zeta + 2Z_x\zeta\xi + 2X_y\xi\eta = \pm kD.$$

Položme:

$$\xi = \varrho \cos(px), \quad \eta = \varrho \cos(py), \quad \zeta = \varrho \cos(pz);$$

Cosinusy směrné normaly ku ploše (A) v bodu, ve kterém průvodič ϱ, mající směr p, plochu tu protíná, jsou úměrny výrazům na pravé, tudíž i výrazům na levé straně rovnic (3), jinými slovy, nor-

---

Výraz pro dvojnásobnou specifickou vnitřní energii hmoty u bodu A jest dle prvního označení (při známém označení vnitřních napjetí):

$$2U = X_x x_x + X_y x_y + X_z x_z$$
$$+ Y_x y_x + Y_y y_y + Y_z y_z$$
$$+ Z_x z_x + Z_y z_y + Z_z z_z$$

dle označení druhého:

$$2U = X_x x_x + Y_y y_y + Z_z z_z$$
$$+ Y_z y_z + Z_x z_x + X_y x_y.$$

mala ta má směr n, t. j. směr původní polohy vektoru. Plochu (A) nazveme vhodně **řídící plochou deformace** a máme tudíž větu:

Hledáme-li směr p pošinutí, ku směru n příslušného, vyhledáme ten bod plochy řídící, jehož normala má směr n; směr průvodiče k bodu tomu vedeného jest hledaný směr p.

Podobně řešíme i obrácenou úlohu, ku směru p daného pošinutí vyhledati směr n vektoru, pošinutí tomu podrobeného.

Sestrojme si za druhé ellipsoid, daný rovnicí:

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} &[X_x\xi + Y_x\eta + Z_x\zeta]^2 \\ &+ [X_y\xi + Y_y\eta + Z_y\zeta]^2 \\ &+ [X_z\xi + Y_z\eta + Z_z\zeta]^2 = D^2. \end{aligned}$$

Následkem rovnic (3) jest patrně pro body této rovnici vyhovující:

$$\xi = x_n, \quad \eta = y_n, \quad \zeta = z_n, \quad \varrho = r_n,$$

t. j. průvodiče ellipsoidu (B) určují délkou i směrem svým všechna pošinutí v dané částici útvaru hmotného.

Z příčiny té můžeme jej zváti **ellipsoidem pošinutí**. Obě plochy (A) a (B) charakterisují úplně a jednoduchým způsobem pošinutí: první dává jeho směr pro daný směr vektoru, jehož pošinutí hledáme, druhá udává ku směru tomu i velkost jeho. Budiž připomenuto, že úvaha zde podaná platí i tehdy, kdy není vyhověno podminkám (2), t. j. kdy ve vyšetřované deformaci jest též rotace vhroužena.*)

Netřeba připomínati, že existují tři pošinutí, r_1, r_2, r_3, jichž směry jsou zároveň směry příslušných vektorů: jsou to kořeny rovnice:

$$\text{(4)} \qquad \begin{vmatrix} x_x - r_1 & x_y & x_z \\ y_x & y_y - r & y_z \\ z_x & z_y & z_z - r \end{vmatrix} = 0.$$

Směry těchto pošinutí jsou k sobě kolmy, a můžeme je určiti z rovnic (1), klademe-li v nich $p = n$ a po sobě r_1, r_2 neb r_3 místo

*) Řídící plocha pošinutí nebyla, pokud vím, dosud od nikoho uvedena; ellipsoid pošinutí (Verschiebungsellipsoid) zavádí J. J. Weyrauch, Theorie elastischer Körper (1884), §. 26, podotýkaje, že mnohým tak slove deformační ellipsoid (Deformationsfläche), o kterém pojednává v násl. §.

r_n. Volíme-li směry ty za směry os souřadnic, nabývají rovnice řídící plochy a ellipsoidu pošinutí jednoduššího tvaru:

$$(A') \qquad \frac{\xi^2}{r_1} + \frac{\eta^2}{r_2} + \frac{\zeta^2}{r_3} = \pm k,$$

$$(B') \qquad \frac{\xi^2}{r_1^2} + \frac{\eta^2}{r_2^2} + \frac{\zeta^2}{r_3^2} = 1.$$

Mění-li se vektory v hlavních směrech deformace vesměs týmž způsobem, t. j. prodlužují-li neb zkracují-li se vesměs, platí totéž pro vektory jakéhokoli směru, veličiny r_1, r_2, r_3 jsou téhož označení a plocha (A') jest ellipsoidem; jinak jest plocha (A') dle volby označení veličiny k, hyperboloidem o jedné neb o dvou oblinách. K určení všech příslušných k sobě směrů n a p jsme v případě tom patrně nuceni voliti obojí označení $\pm$ k, tudíž i obě zmíněné plochy. Plochy ty jsou od sebe odděleny společným kuželem assymptotickým, určující ty směry pošinutí, jež jsou k příslušným vektorům kolmy, jimiž se tudíž mění jen směr, nikoli délka vektorů.

Nazveme-li nyní x_n, y_n, z_n složky napjetí, působícího na plošnou částici o normale n, platí pro ně rovnice (1); další úvahy zůstanou též v platnosti; plochy (A) a (B) mají tudíž pro napjetí týž význam, jako pro pošinutí. Zejména slouží řídící plocha napjetí (A) k určení směru p napjetí na plošnou částici, jejíž normala má daný směr n; ellipsoid pružnosti (B) určuje ku směru p i velkost výsledného napjetí. Analogie jest úplná, až na ten nepatrný rozdíl, že v případě napjetí nutně platí rovnice (2). Uvážíme-li, že vnitřní napjetí a tlaky vznikají následkem deformace a jen následkem deformace (změny objemu a tvaru), že tudíž ni translací ni rotací způsobeny býti nemohou, stává se vytčený parallelismus ještě patrnějším a zároveň se odůvodňuje zavedení rovnic (2) pro pošinutí, jimiž se rotace co kinetický živel pro tlaky a napjetí uvnitř hmoty bezvýznamný vylučuje.

II.

Další analogie jeví se v jisté čtyrznačnosti

veličin: x_x, x_y, x_z, $y_x \ldots\ldots z_z$,
a veličin: X_x, X_y, X_z, $Y_x \ldots\ldots Z_z$.

Veličina x_x značí elongaci kladnou, t. j. prodloužení, je-li kladnou, elongaci zápornou, t. j. zkrácení, je-li záporná. Sku-

tečné pošinutí bodu jest při tom v prvním případě kladné na kladné straně osy X, záporné na záporné straně, v druhém případě naopak. Ponechme symbol x_x pouze pro elongaci kladnou, a volme pro zápornou elongaci symbol x_{-x}, značící veličinu podstatně zápornou. Pak máme čtyry hodnoty:

$$x_x, \; -x_x, \; x_{-x}, \; -x_{-x},$$

z nichž první dva značí prodloužení, druhé dva zkrácení útvaru na kladné a na záporné straně roviny YZ. Vlastně stojí první a třetí veličina místo

$$x_x \cos(x, x) \text{ a } x_{-x} \cos(x, x)$$

a druhá i čtvrtá místo:

$$x_x \cos(x, -x) \text{ a } x_{-x} \cos(x, -x).$$

Pojímáme-li ony čtyry hodnoty co traslace nějakého bodu, jest patrně, pokládáme-li absolutné hodnoty za stejné:

$$\text{(a)} \qquad x_x = -x_{-x}, \quad -x_x = x_{-x},$$

t. j. účinek kladné elongace na jedné straně osy X rovná se účinku záporné elongace na druhé straně. Píšeme-li rovnice ty následovně:

$$x_x + x_{-x} = 0$$

znamenají, že nemá soubor kladné a stejně velké záporné elongace žádného účinku. Z rovnic (a) patrno, že skutečné označení každé veličiny z označení hlavního písmena a přípony dle zákona multiplikace plyne.

Elongace mají jako vektory určitý směr, rozeznávají se však od vektorů tím, že tyto jsou absolutné, přijímajíce různé označení teprve promítáním na opačné směry, elongace však jsou samy v sobě již buď kladné buď záporné.

Podobně může nám značiti y_z dilaci jednoduchou ve směru kladné osy Z, y_{-z} ve směru záporné osy: po obou stranách roviny ZX máme v prvním a druhém případě pošinutí:

$$y_z, \; -y_z \text{ a } y_{-z}, \; -y_{-z}$$

i jest opět, pojímáme-li pošinutí ta co prosté translace

$$y_z = -y_{-z},\quad -y_z = y_z.$$

Platí tedy podobná úvaha o všech veličinách deformace určujících.

Ustanovme nyní, že síly plošné, jež hledí způsobiti pošinutí:

$$x_x,\quad -x_x,\quad x_{-x},\quad -x_{-x}$$

nazveme

$$X_x,\quad -X_x,\quad X_{-x},\quad -X_{-x}.$$

Absolutná hodnota těchto veličin budiž identická.

Síly X_x jsou zde patrně t a h y, síly X_{-x} t l a k y, jež takto jednoduchým symbolem rozeznáváme, dále vidíme, že jsou

tah X_x a tlak $-X_{-x}$

jakož i

tah $-X_x$ a tlak X_{-x}

silami stejné velikosti a stejného směru, tedy zkrátka že jsou s t e j n é, pokud hledíme k bezprostřednému jich skládání, čili k tomu, jaký způsobují pohyb p o s t u p n ý. Tah X_x, které působí na přední stěnu hmotné krychle, udílí jí totéž urychlení postupné, jako tlak $-X_{-x}$, působící na stěnu zadní; deformace budou však v obou případech nestejné. Právě proto lze sice klásti:

$$\text{(A)} \qquad X_x = -X_{-x},\quad -X_x = X_{-x},$$

bude však výhodné, r o z e z n á v a t i tyto veličiny v takových případech, kdy nejde pouze o postupný pohyb, nýbrž i o způsobené oněmi silami deformace. Rovnice (a) platí též jen, pojímáme-li veličiny v nich se vyskytující co translace; co elongace jsou x_x a $-x_x$, x_{-x} a $-x_{-x}$ aequivalentní, znamenajíce t u t é ž z m ě n u t v a r u a o b j e m u na různých místech. Podobně jsou veličiny X_x a $-X_x$, X_{-x} a $-X_{-x}$ aequivalentní vzhledem k jejich účinku na změnu tvaru a objemu, ano musí se vždy současně vyskytnouti, má-li tato změna nastati. V theorii pružnosti dokazuje se, žə pro případ klidu i pohybu působení se rovná protipůsobení, majíc ovšem opačné označení.

Nazveme-li H hmotu na záporné straně roviny s YZ rovnoběžné položenou, a H' hmotu na druhé straně, jest napjetí X_x, na H působící, akce hmoty H', neb akce vnějších sil hmotou H' zpro-

středkovaná; reakci hmoty H na hmotu H' nazveme X'_x. Jest též napjetím (protinapjetím), a platí pro ni rovnice:

$$X'_x + X_x = 0,\ X'_x = - X_x.$$

Můžeme však reakci pojímati též jinak; můžeme se totiž tázati, jak hmota H sama na sebe působí, jsouc vnějšímu napjetí podrobena. Hmota tahem, t. j. kladným napjetím natažená snaží se opět smrštiti — přestane-li napjetí, přichází snaha ta k platnosti a hmota zmenšuje svůj objem, jakoby byla stlačena. Naopak hledí se hmota tlakem t. j. záporným napjetím stlačená roztáhnouti. Reakce hmoty vzhledem k ní samé jest tudíž při tahu tlakem, při tlaku tahem. Nazveme-li X''_{-x} tuto reakci proti tahu X_x a podobně X''_x reakci proti tlaku X_{-x} a uvážíme-li, že jsou obě síly v rovnováze, platí rovnice:

$$X''_{-x} + X_x = 0,$$

která srovnána s rovnicí

$$X_{-x} + X_x = 0$$

dává

(B) $$X''_{-x} = X_{-x},\ X''_x = X_x.$$

Pojímání reakce v tomto smyslu jest přesnější; neboť při vyšetření mechanického stavu hmotné částice H záleží nám hlavně na tom, jaké nové útvary dynamické v ní působením vnějších sil mohou povstati, méně však na tom, jak zase ona na vzájem na sousední hmoty H' působí. Mohli bychom ostatně obě reakce rozeznávati co vnitřní a vnější. Souhrnný výsledek předcházející úvahy jest následující:

Reakce (vnitřní) proti tahu jest aequivalentní tlaku, reakce proti tlaku aequivalentní tahu, může tudíž k jejímu označení stejných symbolů býti upotřebeno. Tam kde nedorozumění vzniknouti nemůže, lze ostatně (dle rovnic A) tlak označiti co záporné, tah co kladné napjetí.

V plošné částici na osu X kolmé a hmoty H a H' oddělující, vyskytují se patrně všechny plošné síly:

$$X_x,\ - X_x,\ X_{-x},\ - X_{-x};$$

jsou totiž buď tahy X_x a $- X_x$ akce hmoty H' na hmotu H, a hmoty H na hmotu H', a tlaky X_{-x} a $- X_{-x}$ vnitřními re-

akcemi hmot H a H'; neb jsou naopak tlaky akcemi a tahy reakcemi.

Při tom lze ony čtyry veličiny třikráte po dvou seskupiti:

a) Při seskupení $(X_x, \ -X_x)$ a $(X_{-x}, \ -X_{-x})$ mají členy téže skupiny týž význam pro podmíněnou jimi deformaci, jsouce buď oba tahy neb oba tlaky.

b) Při seskupení $(X_x, \ -X_{-x})$, $(X_{-x}, \ -X_x)$ mají členy téže skupiny stejné označení tudíž i stejný směr, jsouce co vektory aequivalentní.

c) Při seskupení $(X_x, \ X_{-x})$, $(-X_x, \ -X_{-x})$ vztahují se členy téže skupiny k téže hmotné částici, znamenajíce vnější akci na ni a vnitřní reakci.

Podobně značí dva členy téže skupiny:

$\alpha)$ $(x_x, \ -x_x)$ a $(x_{-x}, \ -x_{-x})$ elongaci téhož rázu;
$\beta)$ $(x_x, \ -x_{-x})$ a $(x_{-x}, \ -x_x)$ vektory (translace téhož směru,
$\gamma)$ $(x_x, \ x_{-x})$ a $(-x_x, \ -x_{-x})$ rušící se pošinutí téhož místa.

Stejná úvaha platí o kterékoli jiné složce plošných sil. Tak můžeme přidružiti veličiny

$$Y_z, \ -Y_z, \ Y_{-z}, \ -Y_{-z}$$

veličinám $y_z, \ -y_z, \ y_{-z}, \ -y_{-z}$

a přiděliti jim, majícím stejnou absolutnou hodnotu, různý význam. Zde ovšem, při tangencialných silách plošných, ztrácí se názornosť významů: tah Y_z a tlak Y_{-z}, a zůstává pouze neutralný pojem napjetí. Analogie tu setrvává, uvážíme-li, že hledí tah Y_z způsobiti, tlak Y_{-z} zameziti kladnou deformaci y_z. Antithesa veličin Y_z a Y_{-z} co akcí a reakcí vysvitá právě tak dobře jako v případě předešlém.

Jakkoli elementarnými jsou předcházející poznámky, mohou přece posloužiti k přesnějšímu vymezení některých pojmů a zameziti lecjaké nedorozumění.

Jak známo, staví někteří spisovatelé (na př. Kirchhoff, Neumann) tlaky (Druckkräfte) do popředí a pojímají tahy co záporné tlaky; jiní spisovatelé (na př. Clebsch, Barré de Saint-Venant, Thomson, Weyrauch) mluví v první řadě o napjetích (Spannungen) ve smyslu tahů (Zugkräfte) a těm jsou tlaky zápornými napjetími.

Rozdíl v označení jest však z druhé strany podmíněn rozdílem směru, tak že napjetí opačného směru mají se k sobě též jako kladné

a záporné veličiny. Ve dvojím významu záporného označení ukrývá se pramen četných nedopatření. Nedopatření tomu vyhneme se, když přidružíce náležitě plošné síly a deformace rozdíl mezi napjetími a tlaky klademe do označení přípon a rozdíl ve směru do označení veličin samých. Při tom jest nám na základě rovnic (A) vždy volno, tam kde nedorozumění jest vyloučeno, pojímati tlaky za záporná napjetí a naopak.

Základní rovnice rovnováhy v theorii pružnosti píší se někdy ve tvaru

$$(1) \qquad hU + \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0,$$

někdy ve tvaru

$$(2) \qquad hU = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z},$$

kdež klademe po sobě X, Y, Z místo U. Zde výslovně nutno podotknouti, že znamenají v případě prvém U_x, U_y, U_z, tahy, v případě (2) tlaky. Oba případy uvedeme v souhlas, píšíce místo (2)

$$(3) \qquad hU = \frac{\partial U_{-x}}{\partial x} + \frac{\partial U_{-y}}{\partial y} + \frac{\partial U_{-}}{\partial z}$$

a tato rovnice platí mimo to i pro vnitřní reakci hmoty, kdežto jsou v (1) složky U_x, U_y, U_z aequivalenty vnějších sil čili akce na hmotnou částici působící.

Podobně shledáváme podminky pro povrch psané buď ve tvaru:

$$(4) \qquad U_x \cos(nx) + U_y \cos(ny) + U_z \cos(nz) = U_n,$$

neb ve tvaru:

$$(5) \qquad U_x \cos(nx) + U_y \cos(ny) + U_z \cos(nz) + U_n = 0,$$

kdežto by dle našeho označení rovnice (4) zůstaly, rovnice (5) pak následujícími nahraženy byly:

$$(6) \qquad U_{-x} \cos(nx) + U_{-y} \cos(ny) + U_{-z} \cos(nz) + U_n = 0.$$

Rovnice (5), na pohled správnější než (4) má vyjádřiti podminky rovnováhy nekonečně malého při povrchu položeného jehlance; pokládáme-li však veličiny s kladnými příponami za akce, t. j. za vnější

síly povrchové na hmotu působící, neb jejich aequivalenty, jest rovnice ta nesprávná, a musí býti nahražena buď rovnicí (4), která značí aequivalenci vnější plošné síly a její složek, neb rovnicí (6), která značí rovnováhu vnější plošné síly se vnitřními reakcemi. Rovnici (6) lze ovšem psáti též takto:

$$U_x \cos(nx) + U_y \cos(ny) + U_z \cos(nz) + U_{-n} = 0.$$

Obojetnost dosavadního způsobu označení jeví se zvláště při stanovení práce vnitřních sil (reakcí hmoty proti deformaci). Pro práci tu obdržíme, volíme-li za východiště rovnice tvaru (1) a (4), a nazveme-li dS částici prostorovou hmoty, jejíž deformaci vyšetřujeme, výraz*):

$$(7) \qquad \delta J = -\int \delta U dS,$$

kdež jest (srv. pozn. na str. 619.):

$$(8) \qquad \begin{aligned} \delta U = & X_x \delta x_x + X_y \delta x_y + X_z \delta x_z \\ & + Y_x \delta y_x + Y_y \delta y_y + Y_z \delta y_z \\ & + Z_z \delta z_x + Z_y \delta z_y + Z_z \delta z_z. \end{aligned}$$

Práce vnitřních sil má zde tedy záporné označení, což se jinak nevyskytuje; práce sil na objemové částice působících jest:

$$(9) \qquad \delta Q = \int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) h dS.$$

Podobně jest veškerá práce sil plošných, na povrch hmoty v částicích povrchových $d\sigma$ působících,

$$(10) \qquad \delta R = \int (X \; \delta x + Y_n \delta y + Z_n \delta z) d\sigma.$$

Veškerá práce, rovná se změně kinetické energie δT:

$$(11) \qquad \delta T = \delta Q + \delta R - \delta J.$$

Čím to jest však, že první dva členy mají označení kladné, poslední člen označení záporné? Hodnota práce může ovšem býti

---

*) Srv. na př. Clebsch, Theorie d. Elasticität § 16; Weyrauch, Theorie d. Elasticität, § 40—42. — Ti spisovatelé, kteří zavádějí tlaky a tudíž vycházejí od rovnic (2) a (5), mají ovšem pro práci kladné označení; v. Kirchhoff Vorl. üb. math. Physik, XI. Vorl. § 5.

a zde fakticky jest zápornou; ve všeobecném takřka absolutném výrazu by se to označení nemělo však jeviti, právě tak, jako se nejeví při δQ a δR, ač tyto veličiny také mohou býti záporné. Záhada objasní se, uvážíme-li, že složky X_x atd. neznačí, jak při způsobu odvození rovnic (1), (7) a (8) snadno poznáme, vnitřní reakci hmoty, nýbrž aequivalenty vnějších sil na povrch hmotných částic dS prostřednictvím celé hmoty působících, tedy akce. Reakcemi jsou složky X_{-x} atd.; píšeme-li

$$(12) \qquad \delta J' = \int \delta U' dS,$$

$$(13) \qquad \begin{aligned} \delta U' = & X_{-x}\delta x_x + X_{-y}\delta x_y + X_{-z}\delta x_z \\ & + Y_{-x}\delta y_x + Y_{-y}\delta y_y + Y_{-z}\delta y_z \\ & + Z_{-x}\delta z_x + Z_{-y}\delta z_y + Z_{-z}\delta z \quad , \end{aligned}$$

máme před sebou výraz pro práci vnitřních sil neb reakcí hmoty ve tvaru absolutném. Rovnici (11) lze pak psáti:

$$(14) \qquad \delta T = \delta Q + \delta R + \delta J'$$

Identita obou výrazů $-\delta J$ a $\delta J'$ pro práci vnitřních sil jest ovšem patrna; normalným jest však co výraz principu zachování energie tvar (14) nikoliv tvar (11). Rovnice (1), které jsou vedle rovnic (4) základem všech dalších zde uvedených, obdržíme, jak známo, isolujeme-li hmotnou částici dS, a myslíme-li si, že na její povrch působí síly $X_x \ldots . Z_z$, jež jsou právě aequivalenty daných vnějších sil, nahražujíce tyto při (fiktivném) isolování částice. Skutečně působí na hmotu a pracují v ní pouze dané vnější síly a vnitřní reakce, tak že práce těchto sil jest aequivalentem přírůstku kinetické energie.

III.

Zbývá ještě poukázati k jednomu zajímavému vztahu mezi deformacemi (všeobecněji mezi různými druhy stejnorodého pohybu) a mezi silami jim přidruženými, vztahu, jenž má ovšem spíše ráz dualné antithese nežli analogie. Z mechaniky nepromenných útvarů znám jest dualismus translací a rotací z jedné, translačních a rotačních sil, t. j. sil obyčejných a dvojic z druhé strany. Translace jest vektor, jejž lze v prostoru kamkoli klásti — ovšem s podržením velkosti a směru. Rotaci kolem určité osy lze naopak nahraditi stejnou rotací kolem osy rovnoběžné jen tak, že k ní při-

pojíme translaci určité velikosti, kolmou k ose rotační. Podobně, avšak s výměnou obapolných funkcí, má se to se silami translaci a rotaci způsobujícími.*) Rotační síla t. j. ona dvojice, na níž jsme velkost momentu co délku vnesli, jest vektor, jejž lze s podržením velkosti a směru kamkoli do prostoru klásti. Naopak lze translační, t. j. obyčejnou sílu nahraditi stejnou silou v jiném bodu působící jen tak, že k ní připojíme určitou dvojici, jejíž osa jest kolmá ku směru translační síly.

Stejný vztah jeví se mezi elongacemi neb dilacemi a translacemi z jedné, a mezi obyčejnou silou a mezi silami elongace neb dilace způsobujícími z druhé strany. Elongaci způsobují normalné, dilaci tangencialné složky napjetí tahů a tlaků.

Elongace má vždy centralnou rovinu, obsahující body, jež nedoznají žádného pošinutí. Chceme-li ji nahraditi elongací stejnou, vztahující se k jiné centralné rovině, musíme dle známé poučky**) připojiti k této elongaci onu translaci, kterou by nová rovina centralná v původní elongaci měla.

Stejnorodá normalná síla plošná (napjetí neb tlak) nemá naproti tomu centralné roviny, může býti kamkoli kladena, zůstává-li sobě rovnoběžnou, či lépe řečeno, prostupuje celý útvar stejnoměrně.

Síla taková skládá se vlastně vždy ze dvou stejně velkých, proti sobě působících sil a může se tudíž vhodně zváti elongační dvojicí, kdežto jest Poinsotem zavedená dvojice rotační dvojicí.

V mechanice neproměnných (idealných) útvarů vykládá se, že lze sílu (obyčejnou) do kteréhokoli bodu vlastního směru jejího beze změny výsledku přeložiti. Věta ta, pro neproměnné útvary platná, neplatí více pro skutečné, hmotné útvary; přeložením síly vnášíme v útvar napjetí (tah neb tlak), jehož účinek nelze zanedbati. Působí-li síla ve směru AB původně v bodu A, smíme si v bodu B mysleti dvě stejně velké síly opačných směrů; síla původní v A a síla opačného směru v B se v útvarech neproměnných na vzájem ruší, a zbývá obyčejná síla stejného směru jako původní v bodu B. V útvarech skutečných tvoří však síly opačného směru v A a B elongační dvojici, která v našem případě jest zápornou, stlačujíc hmotu ve směru svého působení. Kdybychom byli původní sílu ve směru AB v A působící přeložili do bodu B′ v prodloužení směru BA položeného, byli bychom k stejné síle v B′ působící obdrželi elon-

---

*) V. na př. mé Theoretické mechaniky §. 82.
**) V. na př. mé pojednání z r. 1885: O základních druzích pohybu, §. 4.

gační dvojici kladnou, t. j. tah způsobující prodloužení hmoty v témž směru.

Mysleme si rovnoběžnostěn neb hranol, na jehož základnici působí normalný tlak. Tlak ten udílí mu předně celkové urychlení ve svém směru, a způsobuje v něm za druhé stlačení, t. j. elongaci zápornou, v případě tom ovšem nestejnoměrnou, anaž při základnici první jest největší a postupně k základnici druhé dle zákona linearného se zmenšuje, rovnajíc se při této základnici nule. Mysleme si, že tatáž síla působí v témž směru na základnici druhou. Pak udílí hmotě ovšem totéž celkové urychlení, ale způsobuje zároveň v hmotě napjetí kladné, (tah) a tím elongaci kladnou, která ovšem zase jest nestejnoměrně rozdělena, ubývajíc od základnice, na kterou nyní síla působí, až k základnici druhé.*) Obě síly jsou tedy jen co do translačního účinku aequivalentní; aequivalenci úplnou obdržíme teprv, připojíme-li k síle v druhém případě elongační dvojici, která v útvaru k elongaci kladné nestejnoměrné připojuje stejnoměrnou elongaci zápornou, jež dle principu superposice dává tutéž výslednou deformaci jako v případě prvém jednoduchá síla.

Máme tedy pro síly a elongační dvojice následující větu aequivalence:

Jediná síla obyčejná jest aequivalentní souboru stejné síly v jiném bodu vlastního směru působící, připojíme-li k ní přiměřenou elongační dvojici.

I pojem momentu může zde býti zaveden. Čím dále totiž od původního působiště sílu překládáme, tím větší část hmoty jest podrobena elongaci, tím více práce koná tudíž elongační dvojice. Intensitu síly násobenou délkou, o kterou jsme sílu pošinuli, můžeme zváti momentem elongační dvojice. Součin téhož momentu s (nesmírně malým) koefficientem elongace jest práce elongační dvojice. Jeví se tu úplná analogie s pojmem momentu rotační dvojice.

Budiž nyní dána dvojice rotační, která útvaru udílí jakési urychlení rotační. Otočme ji o nějaký úhel ve vlastní rovině. Připojíme-li k silám dvojice takto otočené stejné síly opačné, ruší se v útvarech neproměnných tyto síly se silami dvojice v původní poloze. Výsledek jest, že jest dvojice v nové poloze aequivalentní dvojici pů-

*) Můžeme si rozdíl znázorniti vlakem, jejž lokomotiva jednou tlačí, podruhé táhne. Staticky, totiž s eliminováním pohybu jeví se týž rozdíl při sloupci jednou svisle postaveném, podruhé svisle zavěšeném. Bychom druhý případ převedli na první, musíme sloupec zdola podpírati, tak že napjetí v místě závěsu zmizí.

vodní. Pro útvary skutečné však tato prostá aequivalence neplatí. Obě dvojice, o nichž jsme dříve pravili, že se ruší, způsobují ve skutečnosti symmetrickou dilaci celého útvaru; můžeme tudíž jejich soubor považovati co dilační dvojici. Účinek její roste při zvětšení úhlu, o který jsme dvojici otočili až do 90°, načež se opět zmenšuje. Momentem dilační dvojice můžeme zváti veličinu, kterouž musíme násobiti koefficient dilace, abychom obdrželi práci dilační dvojice. Je-li M moment rotační dvojice a otočili-li jsme o úhel α, jest moment dilační dvojice:

$$2M \sin \alpha.$$

Lze tudíž říci:

Dvojice rotační o jistý úhel otočená jest původní dvojici aequivalentní jen tehdy, připojíme-li k ní určitou dvojici dilační.

Ostatně lze ještě jiným způsobem pohlížeti na onu dvojici, již jsme si zvykli považovati za příčinu rotace.

Viděli jsme při jiné příležitosti*), že jest jednoduchá dilace souborem rotace a symmetrické dilace. Podobně jest dvojice tangencialných tahů neb tlaků vlastně soubor rotační a dilační (deformační) síly. Mysleme si rovnoběžnostěn, na jehož stěny s rovinou XY rovnoběžné působí tangencialná napjetí Y_z a $-Y_z$. V mechanice útvarů nepromĕnných způsobí takové síly rotaci, v skutečnosti však vedle rotace i deformaci (symmetrickou dilaci). Opačnou rotaci, stejnou však deformaci hledí způsobiti tangencialné síly Z_y a $-Z_y$ ve stěnách rovnoběžných ku rovině XZ. Ryze rotační dvojicí v souboru těchto sil jest:

$$\pm (Y_z - Z_y)$$

a ryze deformační neb dilační dvojicí soubor:

$$\pm (Y_z + Z_y).$$

Předpokládáme-li, jako v theorii pružnosti, kde od translace a rotace abstrahujeme, že jest

$$Y_z = Z_y,$$

odpadá ovšem rotační dvojice a zbývá jen dvojice dilační.

---

*) V. mé pojednání z r. 1885: O aequivalencích základních druhů pohybu, §. 4.

Mysleme si, že pouze ve dvou stěnách rovnoběžnostěnu, protínajících se v pravém úhlu působí síly tangencialné Y_z a Z_y. Obě skládají se u výslednici translační, udílející útvaru celkové urychlení ve směru úhlopříčny rovnoběžnostěnu. Mimo to způsobují však dilaci symmetrickou nestejnoměrnou, anaž jest maximalná poblíž hrany, v níž se obě stěny silám podrobené protínají, a minimalná t. j. nula ve hraně protější. Mysleme si, že síly dané nahradíme stejnými, působícími ve stěnách protějších. Obě síly ty skládají se opět v sílu výslednou, udílející hmotě co celku totéž urychlení jako dříve, mimo to způsobují však opět nestejnoměrnou dilaci symmetrickou, která jest však opačného označení, a maximalná při té hraně, ve které se nyní stěny silám podrobené protínají, rovnajíc se při druhé hraně nule. Abychom obdrželi aequivalentní soustavu sil, musíme k nynějšímu uspořádání sil připojiti dilační dvojici způsobující v celém rovnoběžnostěnu stejnoměrné symmetrické pošinutí.

Jak známo,*) můžeme stejnoměrné symmetrické pošinutí nahraditi stejným pošinutím o rovnoběžné ose a rovnoběžných rovinách centralných, připojíme-li vhodnou translaci. Oproti této větě nalezli jsme nyní větu dualnou:

Translační sílu tangencialnými tlaky neb napjetími podmíněnou můžeme nahraditi jinou ve vlastním směru jejím pošinutou, připojíme-li vhodně volenou dvojici dilační.

Soubor těchto a podobných vět v soustavném spracování tvořil by doplnění geometrie sil, jejíž jednu část obmezující se na dynamické činitele nepromĕnných útvarů tvoří vyhledání vzájemných vztahů mezi (translačními) silami a (rotačními) dvojicemi.

42.

Neue Beiträge zur Kenntnis der Pflanzen des böhmischen Cenomans.

Vorgetragen von Dr. **J. Velenovský** am 12. November 1886.

(Mit 1 Tafel.)

Im Laufe der letzten Jahre wurden die böhmischen phytopalaeontologischen Museumssammlungen mit einer Menge verschiedener

*) V. pojednání: O základních druzích pohybu. §. 8.

Pflanzenabdrücke aus den Perucer (Cenomaner) Schichten bereichert, von welchen freilich die Dicotylen-Blätter die zahlreichsten sind. Der billigen Forderung moderner Phytopalaeontologen folgend wollen wir aber die botanisch nicht bestimmbaren Dicotylen-Pflanzenfragmente bei Seite lassen, bis vielleicht die Zukunft glücklichere Funde bringen wird.

Deswegen forschte ich nach solchen Pflanzenüberresten, welche nicht nur aus Blättern oder Früchten, sondern auch aus anderen Pflanzentheilen bestehen und sich in einzelnen Schichten in solcher Menge vorfinden, dass man von jeder Art eine ganze Sammlung zusammenstellen kann. Ich selbst arbeitete mehrere Tage in den Schieferthonschichten der Vyšerovicer, Schlaner, Lipenecer und Landsberger Standorte und beschäftigte mich nur mit dieser oder jener Art. Bei den meisten Arten konnte ich jedoch zu keinem definitiven Resultate gelangen; da ich aber ein reiches Material zu weiteren Studien zusammenbrachte, so war diese Arbeit doch nicht fruchtlos. In einigen Fällen gelang es mir aber sehr interessante Entdeckungen zu machen, welche sich vor allem auf die Coniferen und Cycadeen, deren Natur selbst zur Fossilisation am besten geeignet ist, beziehen. Vier dieser letzteren bildete ich auf der beiliegenden Tafel ab. Die Abbildungen sind theilweise restaurirt dargestellt, eine Methode, welche ich für die beste halte, freilich nur in Fällen, wo man sich auf ein reiches und somit verlässliches Material stützen kann. Aus den Abbildungen zerquetschter und zerfetzter Fragmente kann sich der Leser keine Vorstellung über das ganze Objekt machen, wenn auch die einzelnen Theile ziemlich gut erhalten wären.

Cunninghamia elegans Corda. Fig. 1—5.

Beblätterte Zweige dieser Conifere sind beinahe aus allen Fundorten der Cenomaner Pflanzen bekannt Die Überreste angeblich derselben Art sind bisher in Böhmen, Westfalen, Grönland (Patootschichten), Südfrankreich (im Turon), bei Quedlinburg, Aachen und bei Moletein gefunden worden. In Böhmen kennzeichnet sie die meisten Perucer Schieferthonschichten, in denen sie stellenweise massenhaft auftritt. Wir haben Belege von Jinonic, Lidic bei Schlan, Vyšerovic, Mšeno, Peruc, Landsberg und Lipenec bei Laun.

Ihre Abdrücke bestehen meist aus mehr oder weniger grossen Zweigen, welche in gerade, nicht lange Äste getheilt sind. Durch die Dicke der Zweige und die schönen Blattpolster sowie die scharf

abgedrückten, breiten Blätter ist diese Pflanze leicht erkennbar. Die sterilen Äste sind von denen der lebenden Cunninghamia sinensis sehr wenig verschieden, wie ich es schon in meiner Arbeit über die Gymnospermen der böhm. Kreideformation (S. 14) eingehend beschrieben habe. Schon aus dieser Analogie könnte man daher schliessen, dass es zwei nahe verwandten Arten sind. Die Zapfen und Blütentheile der fossilen Art waren aber bis jetzt unbekannt und das, was man für ähnliche Gebilde beschrieb (l. c. und Schenk, Handbuch der Palaeontologie) ist entweder falsch oder verdächtig.

Es gelang uns in der letzten Zeit die Fruchtzapfen dieser interessanten Conifere in allen Einzelheiten kennen zu lernen. Schon vor drei Jahren fand ich bei Vyšerovic und Lidic Zapfen, deren Bestimmung mir einige Schwierigkeit bereitete. Sie sind 4—6 cm lang und etwa 2 cm breit, an der Spitze vollständig, unten aber abgebrochen. Die Schuppen sitzen an einer geraden, ziemlich starken Spindel und zeigen die Gestalt und Grösse der Fig. 3. Sie sind flach, geschnäbelt und längs-gerunzelt. An anderen Schuppen sieht man einen hohen, quer verlaufenden Kiel, welcher im Gesteine tief abgedrückt ist, und von welchem ein flacher, breiter Schnabel über eine feine Querrinne emporsteigt. Sehr häufig bleibt der massive, schildartige untere Theil auf der einen, der flache Schnabel aber auf der anderen Hälfte des Steinstückes zurück. Nach einer kurzen Vergleichung konnte ich leicht die ganze Gestalt der Schuppen entwerfen. Die Fig. 2 zeigt uns dieselbe von der Rückseite, die Fig. 4 im Durchschnitte.

Bei Landsberg ward ich im Jahre 1885 durch dieselbe Zapfenart überrascht. Der hier aufgefundene Zapfen ist aber besser erhalten, indem die einzelnen Schuppen verkohlt sind und ihre ursprüngliche Form und parastichische Anordnung behalten. Leider ist wieder nur der obere Theil des Zapfens erhalten. Die Form der Schuppen ist dieselbe wie jene der Vyšerovicer und Lidicer Zapfen. Die Grösse und Form dieses Zapfens diente als Grundlage zur Abbildung Fig. 1.

Im Frühjahre 1886 arbeitete ich drei Tage im ersten Steinbruche beim Dorfe Vyšerovic, um die Verhältnisse seiner Flora zur Flora der nächsten Brüche, welche übrigens mit demselben zusammenhängen, zu untersuchen. Die Schieferthone sind hier zwar im Sandstein in derselben Höhe und derselben Weise eingebettet wie in anderen Brüchen, das Gestein besteht aber aus einer festen, kaum spaltbaren, grauen und mit zahlreichen weissen, wurzelähnlichen Linien durchsetzten Masse. Während man in anderen Brüchen eine

Menge der verschiedensten Dicotylen-Blätter (auch Crednerien) antrifft, so finden sich in diesem Bruche nur einzelne, lange Blätter der fein gezähnten Myrica serrata und Eucalyptus angustus. Dagegen sind hier sehr gemein die Widdringtonien, Sequoien und grosse Zweige von Cunninghamia elegans, so dass ich diesem Fundorte den Namen der Coniferen-Schichten gegeben habe. In diesen Schichten fand ich nun auch die oben beschriebenen Fruchtzapfen, welche nicht selten mit den Cunninghamia-Zweigen auf demselben Steinstücke liegen. Nach einer näheren Untersuchung ergab sich, dass jedes Steinstück, welches Cunninghamien enthielt auch einige Zapfen dieser Art oder wenigstens abgebrochene Schuppen derselben aufwies. So war die Vermuthung erweckt, ob die beiden zu derselben Pflanze nicht angehören. Nach weiterem Nachforschen hat sich diese Vermuthung in der deutlichsten Weise bestätigt. Denn in zwei Fällen erschien der untere Theil eines Zapfens noch in Verbindung mit einem beblätterten Zweige der Cunninghamia elegans. Die schuppigen Blätter unter dem Zapfen gehen allmälich in die gewöhnliche Blattform auf den sterilen Ästen über. Diese Exemplare dienten als weitere Grundlage zur Restauration Fig. 1.

Jetzt war es mir auch klar, warum diese Zapfenart überall mit Cunninghamia-Zweigen vorkommt. Dabei ist zugleich einzusehen, dass meine schmalblättrige Art C. sterophylla (l. c.) kaum eine selbständige Art ist, da sich in ihrer Gesellschaft dieselbe Zapfenform bei Landsberg und Lidic fand.

Vergleicht man nun unsere Kreide-Cunninghamia mit der lebenden Cunninghamia sinensis, so findet man, dass die erstere einen Übergang von der Gattung Cunninghamia zur Gattung Dammara bildet. Die vegetativen Theile stimmen vollständig mit Cunninghamia überein, der Fruchtzapfen gehört aber vielmehr der Dammara an. Die Schuppen des Dammara-Zapfens entsprechen denen der fossilen Cunninghamia in auffallender Weise. Fig. 6 stellt eine Schuppe von Dammara australis zur Vergleichung dar. Entfernt man den häutigen Flügelrand des unteren Schuppentheiles, so erhält man die Schuppe Fig. 2.

Während die Schuppen der Gattung Dammara nur einen Samen tragen, tragen die der Gattung Cunninghamia drei. Obwohl auf einigen gut erhaltenen fossilen Zapfenfragmenten zwischen den Schuppen (auf der Oberseite!) deutliche Samen wahrzunehmen sind konnte ich ihre Anzahl doch nicht feststellen, weshalb die Einreihung der Kreide-Cunninghamia auch jetzt unentschieden bleibt. Auf einer

Platte, die mehrere Cunninghamia-Zweige, Zapfen und Zapfenschuppen enthält, sind einzelne Samen recht gut zu sehen (Fig. 5), welche zwar dieselbe Form und Grösse zeigen, wie die Samen der Dammara australis, das flügelartige Anhängsel ist jedoch nirgends vorhanden. Es war entweder abgebrochen oder es ist im Gesteine wegen seiner Zartheit nicht mehr erhalten.

Ceratostrobus sequoiaephyllus Vel. Fig. 7—10.

In meinem Werke „Die Gymnospermen der böhm. Kreideformation" habe ich die mit den Sequoien verwandte neue Gattung Ceratostrobus in zwei Arten beschrieben. Im Sommer dieses Jahres besuchte ich den Lipenecer Standort bei Laun und suchte besonders Ceratostrobus sequoiaephyllus in zahlreichen Stücken zu sammeln. Meine Bemühung wurde durch eine reiche Ausbeute belohnt. Die Äste dieser Conifere sind hier sehr gemein und nicht selten in grossen Stücken vorhanden. Einen ähnlichen Zweig habe ich a. a. O. Fig. 16. Taf. XII. abgebildet und eingehend beschrieben. Als ich die Beschreibung von C. sequoiaephyllus veröffentlichte, lag mir der einzige Zapfen (Fig. 15. Taf. XII.) vor, diesmal fand ich aber 28 Zapfen, wovon die meisten sehr anschaulich und vollständig erhalten sind, so dass man sich über ihre Zusammensetzung gut belehren kann. Mehrere stehen noch in Verbindung mit den Ästen. Einen ähnlichen Zapfen habe ich Fig. 7. in naturgetreuer (fast nicht restaurirter) Ausführung und natürlicher Grösse dargestellt. Die Zapfen sind kugelig und sitzen einzeln auf den Zweigenden. Die holzigen Schuppen bestehen aus einem unteren längs-gestreiften, keilförmigen Theile und aus einem oberen rhombischen Schildchen, welches in einen viereckigen, ein wenig aufwärts gekrümmten, festen Schnabel allmälig übergeht (Fig. 8, in natürl. Gr.). Der Schnabel variirt aber nicht selten. In der Regel ist er mehr als halb so lang als der untere Schuppentheil, selten kürzer. Ich fand auch Formen desselben, die ein hohes, kegelförmig ausgewölbtes Gebilde darstellen und am Ende ein kurzes Spitzchen tragen (Fig 9.).

Ich beobachtete auch die Samen zwischen den Schuppen. Ihre Gestalt und Grösse (Fig. 10) entspricht denen der Sequoia, ihre Anzahl hinter einer Schuppe konnte ich jedoch nicht feststellen.

Cer. echinatus, welchen ich von Vyšerovic und Liebenau her beschrieben habe (l. c. Taf. XI.), stimmt, was die Zapfenbildung betrifft, mit den Lipenecer Zapfen überein, scheint aber eine andere

Art zu sein. Seine Zapfen sind bedeutend kleiner, die Schuppenblätter stark abstehend, scharf zugespitzt und ziemlich kurz. Das kleine Zäpfchen Fig. 15. ist gewiss ein männliches, so dass wir die neue Gattung Ceratostrobus auch in dieser Hinsicht kennen. Das andere Zäpfchen Fig. 13. gehört aber der Widdringtonia Reichii an.

Die Gattung Ceıatostrobus steht jedenfalls der Gattung Sequoia sehr nahe, von welcher sie sich nur durch den starken Schnabel unterscheidet. Bei der lebenden Sequoia sempervirens findet man zwar auch einen kleinen, spitzigen Fortsatz, der aber sehr kurz ist und aus dem Centralnabel des Schildchens hervortritt, während der Schnabel des Ceratostrobus das ganze, schnabelig verlängerte Schildchen vorstellt. Die Vergrösserung der Schuppe (Fig. 14. Taf. XII. l. c.) ist in dieser Hinsicht nicht gut ausgeführt. Naturgetreu sind Fig. 14. Taf. XI. und Fig. 8—9. unserer Tafel.

Eine nicht geringe Ähnlichkeit haben die Ceratostrobus-Zapfen auch mit den Zapfen der Araucaria Cunninghami.

Sequoia minor sp. n. Fig. 11—12.

Die Gattung Sequoia war zur Kreidezeit durch zahlreiche Arten vertreten. Heer hat mehrere Arten aus den mit dem böhmischen Cenoman gleichzeitigen Schichten Grönlands beschrieben und viele auch mit Fruchtzapfen abgebildet, so dass ihre Stellung im System gesichert ist. Die meisten sind jedoch nur in vegetativen Theilen bekannt, so dass man sie niemals im streng botanischen Systeme aufführen kann, da man aus vielen Beispielen weiss, wie die Ähnlichkeit der vegetativen Theile täuschen kann.

Aus der böhmischen Kreideformation habe ich a. a. O. 6 Sequoia-Arten beschrieben, wovon ich aber selbst nur 3 für verlässlich bestimmt halte. Es ist die S. Reichenbachi, S. fastigiata und S. crispa, welche uns in Zapfen und Zweigen in ziemlich grosser Menge vorliegen. Die übrigen sind bis jetzt nur in Zweigen oder ungenügenden Bruchstücken bekannt. Die schönste Art ist die S. crispa, welche in den Schieferthonen bei Lidic massenhaft vorkommt und zierlich beschuppte Zweige und grosse, kugelige Zapfen trägt. Ihre Zweige sind nach den sichelförmig gekrümmten Blättern überall auch ohne Zapfen kenntlich. Die zweite ist S. fastigiata, welche ellipsoidische Zapfen und kurze, breite Schuppenblätter be-

sitzt; die dritte die überall verbreitete, langblättrige S. Reichenbachi, welche grosse, kugelige Zapfen trägt.

Zu diesen drei Arten kommt noch eine vierte, welche ebenfalls im Fruchtstande bekannt ist. Es ist S. minor (Fig. 11.), deren Abbildung in natürlicher Grösse und nur theilweise restaurirt nach den Lidicer Exemplaren hergestellt ist. Überreste dieser Art finden sich sehr häufig in den grauen Schieferthonen des ersten Steinbruches bei Vyšerovic und in einer ziemlich schwachen Schicht bei Lidic unweit von Schlan. Die reichlich verzweigten Äste sind schlank, dünn, den Zweigen der Widdringtonia Reichii auf den ersten Blick nicht unähnlich. Die Schuppenblätter der letzteren sind aber scharf zugespitzt und lang herablaufend, so dass die stärkeren Ästchen tief gestreift aussehen (Fig. 16. Taf. VIII. l. c.). Die Schuppenblätter der S. minor sind dagegen sehr kurz, breit und wenig herablaufend (Fig. 12. vergr.). Nur auf den jüngeren Ästchen verwandeln sich die Schuppen in mehr verlängerte, scharf zugespitzte Blätter, wie es bei den Sequoien gewöhnlich der Fall ist.

Auf den Ästen sitzen die Fruchtzapfen, von welchen uns mehrere Stücke aus beiden Standorten vorliegen. Sie sind haselnussgross, kugelig, am Grunde ein wenig verschmälert. Die Fruchtschuppen sind sehr klein (Fig. 13. in natürl. Gr.), mit einem rhombischen Schildchen und centralen Nabel auf demselben.

Widdringtonia Reichii Ett. sp. Fig. 14—16.

Diese Conifere begleitet fast alle Pflanzenabdrücke der Perucer Schichten und ist überall an den sehr feinen, dünnen, ruthenförmigen Ästchen kenntlich. Gemein ist diese Art in allen Schichten der Vyšerovicer Steinbrüche, wo sie auf den grossen Schieferplatten nicht selten in 40 cm langen Zweigen erscheint. Ebenso häufig ist sie bei Kaunic und Liebenau, selten bei Landsberg, Mšeno, Peruc und Lipenec. Eine Abbildung des beblätterten Ästchens findet sich in meinen Gymnospermen auf der Taf. VIII. Fig. 16.

Die Fruchtbildung dieser Conifere war bis jetzt sehr ungenügend bekannt. Aus dem Bruchstücke Fig. 4. meines Werkes konnte ich nur in negativer Weise schliessen, dass ihre Zapfen mehrere, nach der Art der meisten Taxodineen und Cupressineen angeordneten Schuppen nicht besitzen. Zu demselben Ergebnisse führte ein anderer Zweig, welchen ich in diesem Frühjahre bei Vyšerovic fand. Dieser Zweig hat die Form des Zweiges Fig. 14, nur ist er etwas grösser.

Die Mittelaxe ist ziemlich gerade und endet mit einem kugeligen Körper, auf welchem weder Schuppen noch etwas anderes wahrnehmbar ist. An dessen Stelle habe ich in unserer Abbildung einen restaurirten, reifen Fruchtzapfen dargestellt.

Über die Beschaffenheit der Zapfen können uns also beide erwähnten Abdrücke nicht belehren. Schon vor mehreren Jahren beobachtete ich aber bei Vyšerovic in denselben Schiefern, wo die Widdringtonien häufig vorkommen, kreisförmige Abdrücke, deren Deutung aber nicht klar genug war. Ich konnte zwar auf denselben grosse, abgerundete Schuppen, welche stets einen starken Mittelkiel aufwiesen, unterscheiden, ihre Verbindung, Anzahl und Zugehörigkeit blieb mir jedoch räthselhaft.

Glücklicher Weise entdeckte ich in einem Steinstücke wieder einen ähnlichen Pflanzenüberrest, welcher noch mit einem Ästchen von Widdringtonia Reichii zusammenhieng. Hierdurch ist nun sicher gestellt, dass die beschriebenen Gebilde Fruchtzapfen von Widdringtonia Reichii sind. Es war aber nicht so leicht aus den zerquetschten Abdrücken im Gesteine die Form des ganzen Zapfens zusammenzustellen. Doch bietet ein Exemplar, dessen eine Hälfte im positiven, die andere im negativen Abdrucke vorliegt, in dieser Hinsicht einen verlässlichen Leitfaden. In sehr wenig restaurirter Form sieht man es Fig. 15. Der ganze Zapfen besteht nämlich aus vier grossen, vorn abgerundeten oder beinahe ausgerandeten, unten verschmälerten Schuppen, welche sehr dick und holzig und durch einen in der Mitte hoch hervortretenden Kiel in zwei Hälften getheilt sind. Wenn der geöffnete Zapfen im Gesteine so zu liegen kommt, dass sich die einzelnen Schuppen theilweise decken, so ist es leicht begreiflich, dass die Zusammensetzung des ganzen Zapfens unklar werden muss.

Die Form des Zapfens kann man sich nun am besten vorstellen, wenn man die Zapfen der lebenden Callitris quadrivalvis zuhilfe nimmt. Ich habe auch auf dieser Grundlage den Zapfen Fig. 14. restaurirt. Der Zapfen ist aus vier massiven, holzigen Schuppen gebildet, welche auf der Innenseite mit einem hohen Kiele zusammenstossen und auf der entsprechenden Rückseite mit einer vertieften Furche versehen sind. Gut erhaltene Abdrücke zeigten auf den Schuppen irgend eine verkohlte und zerquetschte Masse, es war aber unmöglich aus derselben die Form eines Samens zu erkennen.

Gleichzeitig gelang es auch 6 männliche Zäpfchen von Widdringtonia Reichii bei Vyšerovic zu finden. Diese sind länglich-

walzenförmig, mit zahlreichen kleinen Schuppen in Parastichen besetzt und stehen noch mit Ästchen von Widdringtonia Reichii in Verbindung. Ein solches Zäpfchen ist bei Fig 16. unserer Tafel und Fig. 13. Taf. XI. meiner Gymnospermen abgebildet. Zwischen den einzelnen Schuppen ist noch etwas wahrzunehmen, das man für Pollensäcke halten könnte, es ist aber sehr schlecht erhalten.

Die verdickten Enden der Ästchen Fig. 1. Taf. X., welche ich ursprünglich für männliche Organe hielt, stellen sich jetzt freilich nur als Endknospen heraus.

Auf diese Weise sind uns also die Blüthen- und Fruchtstadien unserer Kreide-Widdringtonia ziemlich gut bekannt und wir können sie also in das System der Coniferen einreihen. Die lebende Widdringtonia cupressoides Endl. hat, wie es schon genügend in meinen Gymnospermen auseinandergesetzt wurde, abwechselnde Blattpaare, während die Widdringtonia Reichii mit deutlich abwechselnden Schuppenblättern bekleidet ist. Nur auf den Zweigenden ist eine gegenständige Anordnung derselben erkennbar, doch ziemlich undeutlich. Auch die W. helvetica der Tertiärzeit zeigt eine gegenständige Blattstellung. Die männlichen Zäpfchen dieser beiden Arten sind kugelig, diejenigen der Kreide-Widdringtonia aber länglich-walzenförmig und grösser. Die Fruchtzapfen der W. Reichii sind zwar von einer anderen Form als die der lebenden Art, im wesentlichen zeigen sie aber dieselbe Zusammensetzung.

Fassen wir nun alle diese Umstände zusammen, so ergiebt sich, dass W. Reichii mit W. helvetica und W. cupressoides verwandt ist, obwohl sie einen fremden Typus vorstellt, der den Übergang von der Gattung Widdringtonia und Callitris zu den Taxodineen bildet.

Podozamites striatus Vel. Fig. 17.

Auf der Taf. II. Fig. 8. meiner Gymnospermen habe ich ein Blatt abgebildet, welches ich mit dem Namen Podozamites einer Cycadee zurechnete. Die Überreste verschiedener Cycadeenarten sind in der Cenomaner Flora ungewöhnlich häufig, so dass man ihnen überall begegnet. Ihre meisten Typen schliessen sich eng an diejenigen der mesozoischen Zeit an. Das erwähnte Blatt von Liebenau unterscheidet sich aber von allen böhm. Kreide-Arten durch mehrere Merkmale. Es zeigt wohl dieselbe fest lederartige Beschaffenheit, lässt aber auf der Oberfläche ziemlich feine parallele Längsstreifen

und zwischen diesen noch andere stellenweise verwischte Mittellinien unterscheiden. Die Nervation der meisten Podozamites-Arten besteht dagegen aus ziemlich starken, parallelen Nerven derselben Art. Eine verwandte Nervation wie das Liebenauer Blatt zeigen höchstens die Krannera-Blätter, obwohl die letztere viel regelmässiger ist und überall deutlich hervortritt.

Bei meinem letzten Ausfluge nach Liebenau fand ich ein vollkommen erhaltenes Blatt (Fig. 17.), welches ich sogleich als P. striatus erkannte. Die Nervation dieses Exemplares ist noch mehr verwischt und sticht sehr scharf von jener der mit ihm massenhaft vorkommenden echten Podozamites-Blätter ab. Der gut erhaltene Blattstiel ist auffallend lang und deutlich von der Blattspreite getrennt, während die Blattspreite der hiesigen Podozamiten allmälich in einen undeutlichen Blattstiel übergeht.

Ich halte nun dafür, dass dieses Blatt kaum der Gattung Podozamites angehört, sondern vielmehr einer echten Dammara. Die Blätter der Dammara Binoti, welche ich aus dem Sychrover Garten besitze, weisen eine ähnliche Form und dieselbe Nervation auf. Wir besitzen aber weder Zapfen noch andere Pflanzentheile von dieser Art, um über ihre definitive Bestimmung ein sicheres Urtheil zu fällen.

Cycas sp.

In den Schieferthonen bei Liebenau fand ich ein Blattfragment, welches ohne Zweifel einem Cycas angehört. Dasselbe zeigt eine ungewöhnlich starke Mittelrippe, von welcher beiderseits in gleichen Entfernungen lineale, derb lederartige Blättchen abspringen. Die Blättchen sind nervenlos und kommen in den Schiefern auch vereinzelt vor. Dieses Blattbruchstück stimmt mit den prächtigen Cycadeen-Blättern, welche Heer aus der arktischen Kreide (l. c.) beschreibt, gut überein. Weil wir aber von unserem unzweifelhaften Cycas nicht mehr besitzen, so wagen wir die Art nicht zu bestimmen.

Podozamites lanceolatus Heer Fig. 18.

Bei Libenau sind, wie schon erwähnt, Abdrücke der Podozamites-Blätter sehr gemein; die am häufigsten vorkommenden gehören P. lancolatus an, einer Art, welche in den verschiedensten Ländern vom Jura bis in die Kreide verbreitet ist. Bei uns war er bis

jetzt bloss in Fiederblättchen bekannt, bei Liebenau gelang es mir aber den ganzen oberen, noch mit der Mittelrippe versehenen Theil eines gefiederten Blattes (Fig. 18) zu finden, wodurch nachgewiesen wird, dass auch der böhmische P. lancolatus einer Cycadee angehört.

Pseudoasterophyllites cretaceus O. Feist. sp. Fig. 19—25.

In den aschgrauen, bröckeligen Schieferthonschichten bei Lipenec ist ein Pflanzenabdruck, dessen Abbildung Fig. 19 gibt, einer der häufigsten unter allen dortigen Pflanzenresten. Viele Schieferplatten sind mit ihm über und über bedeckt. Im letzten Sommer habe ich eine möglichst reiche und instruktive Sammlung dieser Pflanze ins Museum gebracht, um über ihre systematische Stellung wenigstens Anhaltspunkte zu finden.

Die abgebildete Pflanze unterscheidet sich von allen anderen der Lipenecer Schichten dadurch, dass sie durchaus in grösseren und unbeschädigten Ästen erhalten ist und sich in massenhaft nebeneinander liegenden Resten vorfindet. Die Beschaffenheit der Blätter und Achsen weist auf einen schwachen und gracilen Bau der lebenden Pflanze hin. Neben den beblätterten Ästchen liegen auch sehr zahlreiche dicke Stengel oder Rhizome. Aus diesen Umständen lässt sich mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit schliessen, dass diese Pflanze dasselbe Wasser belebte, in welchem sie mit hineingefallenen Pflanzentheilen anderer Arten der nächsten Umgebung eingebettet wurde.

Der Stengel muss aus weichen, durch stärkere Gefässbündelstränge kaum durchsetzten Zellen gebildet worden sein, da sein Abdruck im Gesteine stets nur matt hervortritt. Er ist wie die übrigen Äste in regelmässigen Entfernungen gegliedert. Auf dickeren Theilen sind sehr matte Andeutungen von Blättern oder Wurzeln, welche von den Knoten wirtelartig abstehen (Fig. 25). Hier beginnen auch die gabeligen Verzweigungen. Aus den Stengeln entspringen die dünneren Äste, welche sich mehrmals gabelig verzweigen und an den Knotenstellen Blattquirle tragen (Fig. 19). Diese Blätter sind auch sehr matt und fein abgedrückt. Sie sind schmal-lineal, kurz zugespitzt, ganzrandig und nervenlos. Unter dem Mikroskope zeigt die Epidermis (Fig. 21) längs-gezogene, hexagonale, ziemlich dickwandige Zellen, auf der ganzen Blattfläche von gleicher Form. Hie und da sieht man rundliche Spaltöffnungen, welche nur aus zwei einfachen Schliesszellen gebildet sind. Die innere Zellenschicht der Blätter ist

verkohlt und undeutlich. Die Blätter stehen zu 6 in regelmässigen Quirlen.

Glücklicherweise gelang es auch den Fruchtstand dieser Pflanze zu finden. Das wertvolle Bruchstück ist in naturgetreuer (nicht restaurirter!) Form Fig. 22 abgebildet. Das eine Ästchen endet hier mit einem länglichen Zäpfchen, welches aus mehreren, sehr deutlich erhaltenen Schuppen zusammengesetzt ist. Diese Schuppen (Fig. 23 vergr.) sind breit, kurz zugespitzt, ganzrandig, mit einem Rückenkiele und enthalten in der Achsel Samen oder Sporen. Sie sind im Zäpfchen spiralig angeordnet. Bemerkenswert ist, dass die zwei Blattquirle unter dem Zäpfchen ungleich gestaltete Blätter enthalten. Zwei von denselben sind nämlich länger und vier bedeutend kürzer, breiter und am Ende stumpf abgerundet. Es scheint, als wären es zwei Blätter mit 4 Nebenblättern.

Ein anderes Stück zeigt ein ebenso beblättertes Ästchen, welches mit einem ähnlichen Zäpfchen endet. Und das dritte enthält ein Zäpfchen, welches in deutlicher Verbindung mit schlecht erhaltenem Ästchen steht.

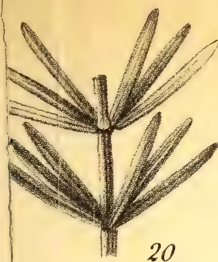
Es ist auffallend, dass die beblätterten Zweige so selten Zäpfchen tragen, obwohl die letzteren auf einigen Schieferplatten massenhaft nebeneinander liegen. Sie müssen demnach im reifen Zustande leicht von der Pflanze abgefallen sein.

Vergleichen wir nun alles, was wir über die Zusammensetzung unserer Pflanze wissen, mit bekannten lebenden und ausgestorbenen Pflanzentypen, so können wir über ihre Stellung im Systeme keineswegs ein endgiltiges Urtheil fällen. Aller Wahrscheinlichkeit nach ist es eine cryptogamische Wasserpflanze. Eine Conifere kann es nicht sein.

Das ganze Aussehen der fraglichen Pflanze erinnert lebhaft an die palaeozoische Gattung Asterophyllites, weshalb sie auch H. Dr. O. Feistmantel vorläufig Asterophyllites cretaceus benanntt hat. Die spiral gebauten Zäpfchen, die nicht gestreiften Internodien, die gabeligen Verzweigungen, die Structur der Epidermis gestatten jedoch niemals eine Einreihung in die Calamiteen oder Equisetaceen.

Erklärung der Tafel.

Fig. 1—5. Cunninghamia elegans Corda. Fig. 1, der ganze Zapfen, Fig. 2, eine Fruchtschuppe von der Unterseite,



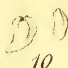
20



8



9

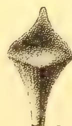


10



11

18



2



4



3



5



6





13

Lith. Farský Prag.



Velenovský del.

Lith. Farský Prag.

Fig. 3, dieselbe von der Oberseite, Fig. 4, im Durchschnitt. Fig. 5, ein Same.

Figur 6. Fruchtschuppe der Dammara australis.

Fig. 7—10. Ceratostrobus sequoiaephyllus Vel. Fig. 7, die Zapfen. Fig. 8—9, Fruchtschuppen. Fig. 10, Samen.

„ 11—13. Sequoia minor Vel. Fig. 11, ein zapfentragender Zweig in natürl. Grösse. Fig. 12, ein junges Ästchen, vergr. Fig. 13, Fruchtschuppen in natürl. Grösse.

„ 14—16. Widdringtonia Reichii Ett. sp. Fig. 14, ein Zweig mit einem reifen, geschlossenen Zapfen. Fig. 15, ein geöffneter Fruchtzapfen mit vier Schuppen. Fig. 16, männliches Zäpfchen.

Figur 17. Podozamites striatus Vel. Ein Blatt in natürl. Grösse, vielleicht eine echte Dammara.

Figur 18. Podozamites lanceolatus Heer. Ein gefiedertes Blattfragment.

Fig. 19—24. Pseudoasterophyllites cretaceus O. Feistm. sp. Fig. 19, ein beblätterter Zweig. Fig. 20, zwei Blattquirle, vergr. Fig. 21, stark vergr. Epidermis mit Spaltöffnungen. Fig. 22, ein beblättertes Ästchen mit einem Fruchtzäpfchen. Fig. 23, das Fruchtzäpfchen, vergröss. Fig. 24, ein Durchschnitt des Fruchtzäpfchens mit Sporen in den Schuppenachseln.

43.

Redruthit z Jáchymova.

Přednášel prof. dr. **Karel Vrba**, dne 26. listopadu 1886.

S jednou dřevorytinou.

Pan vrchní báňský správce J. Babánek v Jáchymově zaslal mi roku minulého několik kusů drobnozrného arsenu, jehož se v dolu Hideprantově v Jáchymově značné množství objevilo. Jelikož v průbírně v něm značné množství stříbra nalezeno, mělo se za to, že pochází z malých, černých, kovově lesklých, v dutinách arsenu narostlých krystalků, jež náležejí některé stříbrem bohaté rudě, snad stefanitu, s nímž i co do tvaru i co do srůstu dvojčatného na první pohled skorem úplně souhlasily. Avšak při qualitativném rozboru

lučebném drobných těchto krystalků objevily se měď, železo a síra, nikoli však stříbro a antimon.

Pan Otto Rosam, assistent při lučebném laboratoři vysoké školy technické, zjistil pak na sporém množství úplně čistých krystalků skorem 79% mědi, čímž zmíněné krystalky nade vší pochybnosť co redruthit určeny byly, s nímž i tvar i hutnosť = 5.48 (s fragmenty 0·21 gr. pyknometrem určená) souhlasily.

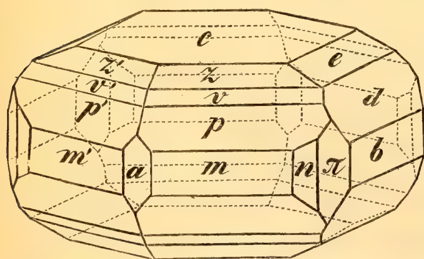
V dolech Jáchymovských (na Rothe-Fiedler-a Geistergang) byl redruthit s chrysokollem, s černí měděnou, mědí, smaltinem, erythrinem, lavendulanem a křemenem dle J. F. Vogla*) již častěji, však vždy jen kusovitý a vtroušený, pozorován.

Jak již praveno, nacházejí se malé, toliko 1—3 mm. dlouhé a rovněž tak široké krystalky redruthitu buď osamotnělé, buď v malé druzy srostlé pospolu s velmi drobnými, sotva 0·5 mm. vysokými a rovněž tak širokými rhomboedry zažloutlého dolomitu v dutinách drobnozrnného, na povrchu šedočerně naběhlého arsenu, v němž nad míru jemné, neozbrojenému oku zřídka kdy viditelné částečky stříbra, tu hojněji jinde spořeji, jsou vtroušeny, z čehož zjevno, že stříbro při zkoušce lučebné objevené, jest stříbro vtroušené.

Krystalky redruthitu jsou vesměs dvojčata a trojčata dle kolmého hranolu. Ku goniometrickému zkoumání není povaha ploch deskovitého, často modře naběhlého redruthitu právě způsobilá, an ukončující plochy dle brachydiagonaly jeví jemné rýhování, kteréž v pásmu brachydom jest mnohem hrubší ba často dosti hluboké. Rovněž i plochy jehlanců, na anglických redruthitech jinak dosti rovné a hladké, vždy ve směru hran středních jsou rýhované.

Nejpřízniněji vyvinuty jsou vždy jen úzké plochy hranolu a makropinakoid, ačkoliv poslední dosti rovná plocha málo je rozsáhlá a jen slabě lesklá.

Na 4 poměrně nejlepších krystalcích redruthitu podařilo se mi určiti 11 vesměs již známých tvarů, které na každém z měřených čtyř krystalků pozorovány byly a spojku tvaru obrazce připojeného tvořily. Z úhlů měřením obdržených, nebylo lze určiti parametry, an jak již podotknuto, následkem rýhování skorem veškerých ploch



*) Gangverhältnisse von Joachimsthal. Teplitz 1857, 152 a v. Zepharovich Lexicon I. 375.

reflexy jen málo spolehlivé obdržeti bylo lze a protož položil jsem za základ výpočtu data Millerem*) uvedená.

Tvary, jež jsem pozoroval, jsou následující:

c (001) $0P$; *e* (012) $\frac{1}{2}P\breve{\infty}$; *d* (021) $2P\breve{\infty}$; *b* (010 $\infty P\breve{\infty}$; *z* (113) $\frac{1}{3}P$; *v* (112) $\frac{1}{2}P$; *p* (111) P; *m* (110) ∞P; *n* (230) $\infty \breve{P}\frac{3}{2}$; *π* (130) $\infty \breve{P}3$; *a* (100) $\infty \bar{P}\infty$.

Měřením obdržené suplementy sklonu ploch jakož i z dat Millerových vypočítané hodnoty theoretické sestavené jsou v následujícím přehledu.

		Počtem		Měřením (střed. hod.)	
c 001	: *e* 012	25°	53′	25°	54½′
	: *d* 021	62	44	62	49
	: *b* 010	90	0	89	59½
	: *z* 113	32	44	32	42
	: *v* 112	43	57	44	1
	: *p* 111	62	35	62	36
b 010	: *m* 110	59	47½	59	46¾
	: *n* 230	48	52	48	59½
	: *π* 130	29	47½	29	49
	: *a* 100	90	0	90	0.

44.

Parisit z Nové Granady.

Sděluje prof. dr. **K. Vrba**, dne 10. prosince 1886.

S jednou dřevorytinou.

Medici-Spada poznal roku 1835 z vlastností fysikalných, že tento vzácný nerost z údolí Muso v Nové Granadě tvoří novou, samostatnou species, kterouž dle naleziště „Musit“ pojmenoval. Bunsen,**) jemuž Medici-Spada úlomek krystallu zaslal, později tento mineral i po stránce morfologické i po stránce lučebné zkoumal, zároveň pak po nálezci J. J. Parisovi, parisitem nazval, jelikož jména „musit“ již pro jistou odrudu pyroxenu z alpy Mussa v Piemontě užito bylo.

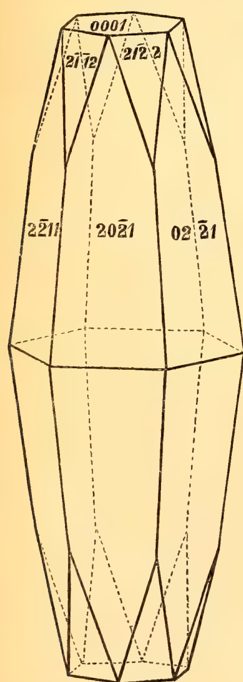
*) Brooke and Miller Introduction to Min. 1852, 159.

**) Annal. d. Chem. und Pharmacie LIII. 147, 1845.

Bunsen stanovil na úlomku představujícím polovinu šesterečného jehlanu s uraženým rohem velkosť hrany polarní na goniometru reflekčním = 120° 34′ z čehož hranu basalní = 164° 58′ a poměr $a : c = 0{\cdot}1524 : 1$ vypočítal.

Později A. Des Cloizeaux*) více krystallků této vzácné substance goniometricky prozkoumal a celkem 14 různých tvarů s větší neb menší jistotou stanovil. O jakosti a rozsahu ploch různých tvarů pronesl se Des Cloizeaux následovně: „La base p est ordinairment un peu courbe; les faces $b^3/_2$, b^2, b^1, $b^1/_2$ sont larges, mais canellés horizontalement; les faces a^8, a^6, a^4, a^3, a^2, $a^3/_2$, a^1 sont étroites et striées paralellement à leur intersection avec p; x ($b^1/_3$ $b^1/_6$ $h^1/_5$) est étroite, mais assez nette; les mesures d'angles presentent donc une assez grande incertitude."

Základním jeho úhlem, jejž určil na 97° 30′, byl sklon jehlanu převládajícího $b^1/_2 = 20\bar{2}1 = 2P$ ku ploše spodové, uvádí tudíž poměr $b : h = 1000 : 3289.057$, jenž jest dosti blízkým poměru dříve Bunsenem stanovenému $a : c = 1 : 3.28084$, pakli c na polovinu skrátíme.



Mezi četnými úlomky parisitu, které jsem před delší dobou od svého kollegy p. prof. dr. O. Feistmantla obdržel, nalezl jsem též dva malé, úplně průhledné krystallky, které mimo převládající jehlan $20\bar{2}1 = 2P$ ještě plochu spodovou $0001 = 0P$ a jehlan druhořadý $11\bar{2}2 = P2$ jevily. Jeden z obou těchto krystallků znázorněn jest v idealním vývoji ploch obrazcem vedle stojícím. Kdežto prve jmenovaný tvar pro značné rýhování, jaké též Des Cloizeaux na něm pozoroval k přesnějšímu určení velkosti hrany zvlášť pak k určení hodnoty osy hlavní naprosto se nehodil, poskytly i basis i jehlan řady druhé i při nepatrných svých rozměrech reflexy velice ostré, čímž změření jich s plnou přesností provedeno býti mohlo.

Jestliže dle způsobu Des Cloizeauxa převládající jehlan co $20\bar{2}1 = 2P$ pojmeme, vypočte se z úhlu pozorovaného

$$11\bar{2}2 : 0001 = 73^\circ\, 26'\, 50''$$

poměr osy vedlejší ku ose hlavní

*) Manuel, Tome II. 162, 1874.

Značky Millerovy	Značky Des Cloizeauxovy	Počtem Vrba	Měřením Vrba	Počtem Des Cloizeaux	Měřením Des Cloizeaux
$0001 : 11\bar{2}8$	$p : a^8$	40° 2′	—	39° 26′	40° cca
$: 11\bar{2}6$	$: a^6$	48 17	—	47 38	48°—49°
$: 11\bar{2}4$	$: a^4$	59 16	—	58 42	58° 15′—61°
$: 11\bar{2}3$	$: a^3$	65 58	—	65 29	65° 30
$: 11\bar{2}2$	$: a^2$	—	*73 26$^5/_6$	73 5	72°—74°
$: 22\bar{4}3$	$: a^{3/2}$	77 26	—	77 9	77°
$: 11\bar{2}1$	$: a^1$	81 33	—	81 21	82°—82° 25′
$: 10\bar{1}2$	$: b^2$	62 46	—	62 14	62°—63°
$: 20\bar{2}3$	$: b^{3/2}$	68 53	—	68 27	67° 20′
$: 10\bar{1}1$	$: b^1$	75 34	—	75 15	75° cca
$: 20\bar{2}1$	$: b^{1/2}$	82 40	82 40	—	*82° 30′
$: 63\bar{9}5$	$p : b^{1/3}\, b^{1/6}\, h^{1/5}$	80 47	—	80 35	—
$10\bar{1}1 : 10\bar{1}2$	$b^1 : b^2$	12 48	—	13 1	13° 25′
$20\bar{2}1 : 20\bar{2}\bar{1}$	$b^{1/2} : b^{1/2}$	14 40	14 40$^1/_2$	15 0	15° 0
$22\bar{4}3 : 4\bar{2}\bar{2}3$	$a^{3/2} : a^{3/2}$	58 25	—	58 21	58° 15′
$63\bar{9}5 : 11\bar{2}1$	$b^{1/3}\, b^{1/6}\, h^{1/5} : a^1$	10 47$^1/_2$	—	10 47	9° 0′
$: 2\bar{1}\bar{1}1$	$: a^1$	48 29	—	48 28	49° 0′
$11\bar{2}1 : 2\bar{1}\bar{1}1$	$a^1 : a^1$	59 15	—	59 15	59 25
$10\bar{1}1 : 01\bar{1}1$	$b^1 : b^1$	57 55	—	57 50	—
$20\bar{2}1 : 02\bar{2}1$	$b^{1/2} : b^{1/2}$	59 28	59 26	59 26	59° 0′
$10\bar{1}1 : 11\bar{2}2$	$b^1 : a^2$	28 58	—	28 55	28 50
$20\bar{2}1 : 11\bar{2}1$	$b^{1/2} : a^1$	29 44	—	29 43	29° 40′—43′
$: 11\bar{2}2$	$: a^2$	30 44	30 42$^1/_2$	—	—
$10\bar{1}2 : 11\bar{2}2$	$b^2 : a^2$	29 43	—	29 42	29° 0
$10\bar{1}1 : 01\bar{1}2$	$b^1 : b^2$	57 0	—	56 52	57 45

$$a : c = 1 : 3.36456,$$

který od poměru Bunsenem i Des Cloizeauxem stanoveného dosti značně se líší.

V předcházejícím přehledu uvádím svá vlastní měření, jakož i ona, jež Des Cloizeaux provedl; k direktnímu porovnání pak úhly theoretické, jednak mnou ze zmíněné délky osní vypočítané, jinak z elementu Des Cloizeauxova vyplývající. Kdežto theoretické hodnoty sklonu jehlanů k ploše spodové z mé hodnoty osy vertikalné vypočítané s úhly Des Cloizeauxem měřenými dosti značně differují, přibližují se uspokojivě vzhledem ku hranám polarným i úhly theoretické i změřené. Příčinu toho dlužno hledati jednak ve vysoké hodnotě osy hlavní, která větší vliv má na hranu basalní než na hranu polarní, jinak jest difference tato podmíněna nepříznivým povrchem ploch jehlanových, které, jak již zmíněno, rovnoběžně ku kombinační hraně s plochou basalní značně rýhovány jsou, pročež reflexy od nich nejen nejsou dosti ostré, nýbrž často směrem kolmým na směr rýhování značně protáhlé. Že hodnota osy hlavní, jak Des Cloizeaux ji stanovil a z této úhly theoretické počítané správnější než dotýčné úhly z mé osy hlavní plynoucí nejsou, vysvitá z porovnání úhlů Des Cloizeauxem změřených s úhly jeho theoretickými i pak ode mne počítanými, které stejná množství positivních i negativních odchylek jeví. Souhlas skorem úplný na obou krystallcích ode mne měřených a z mého elementu *c* vypočítaných zajisté poskytuje velkou záruku správnosti hodnoty osy hlavní, kterou jsem byl stanovil.

45.

Příspěvky k fauně Šumavské.

Přednášel **Antonín Štolc**, dne 10. prosince 1886.

Velebná Šumava ode dávna vábila k sobě četné přírodozpytce české, jimž půvab horské fauny a flory zajisté vždy byl více nežli dostatečnou náhradou za útrapy cestovní a jiné, jež každá exkurse šumavská nevyhnutelně s sebou přináší. Nelze si skutečně stěžovati, že by Šumava zanedbávána byla přírodozpytci českými, mezi nimiž botanikům ovšem první místo v ohledu tom přísluší, co však zoologických výzkumů se týče, jsou známosti naše neli chatrné, tedy značně neúplné, čehož příčiny jsou na snadě: faunistická zkoumání Šumavy nedála se dosud systematicky, nýbrž spíše jen nahodile a kuse, jak toho právě doba roční, v níž zkoumání se dála dovolovala a dále nedostatek pomůcek, jimiž zkoumatel disponovati mohl. Bohužel jest

se mi přiznati, že také má pozorování nedála se systematický a všestranně, aby dovedla vztahovati se na veškeru faunu šumavskou. K tomu nedostávalo se mi jednak ani prostředků, jednak ani času. Nemoha z příčin jistých spoléhati na podporu veřejnou, mohl jsem úmysl svůj uskutečniti pouze šlechetnou obětovností osoby soukromé a poněvadž tím již předem čas pobytu mého v Šumavě jen na krátce vyměřen byl, neosměloval jsem se doufati v poněkud jen příznivý výsledek cesty své. Než přece považoval jsem prostředky své za dostatečné, abych aspoň v oblíbeném studiu svém annulatologickém v Šumavě s prospěchem pokračovati mohl. Proto také měl jsem tentokráte zřetelu pouze ku vodám šumavským a přiměřeně k času, jenž mně byl vyměřen, toliko na vody Šumavy východní, totiž jezero *Plöckensteinské*, některé *prameny horské* a *Zlatou stoku švarcenberskou.* V následujících řádcích podávám skrovné výsledky zkoumání svých, koje se tou nadějí do budoucnosti, že na příště budu tak šťastným, abych mnohem rozsáhleji a všestranněji bohatou faunu naší památné Šumavy poznati a zkoumati mohl.

I. Jezero Plöckensteinské.

Klidné toto jezero horské, jehož hladina ozářena jasnými paprsky odpoledního slunce, jen časem lehkým vánkem slabě byla zčeřována, činilo na mne již předem dojem jakési mrtvosti. Ačkoliv skalnaté dno všude, kam oko dosáhnouti mohlo, pokryto bylo zetlelou prstí, patrně pocházející z nahnívajících kmenů a větví stromových, jež z vody porůznu vyčnívajíce břeh jezera lemovaly, přece nepostihl jsem ani té nejmenší vegetace, jež by z oné hojnosti rozkládajících se látek život svůj čerpala. Ani stopy po nějakém sparganiu, skřípině neb ostřici, jež přece tak stálými jsou hosty jezer jihočeských! Pro mne, zoologa, jenž naučil jsem se znáti vzájemnou podmíněnost a nutnosť pospolitého života květeny a zvířeny, bylo to předzvěstným znamením, pod jehož dojmem netroufal jsem sobě přílišné naději se oddávati. Však horské jezero bylo pro mne zjevem dosti novým, jenž dovedl potlačiti vzmáhající se předtuchu nezdaru a tajemná hloub jezerní byla příliš lákavou, než abych v lůně jejím tušiti nechtěl existenci života organického. Tanulo mi na mysli několik typických organismů horských jezer, jichž existenci tuto zjistiti jsem doufal. Abych některé z těchto organismů jmenoval, byl to zejména zajímavý korýš B r a n c h i o n e c t a, jejž professor W i e r z e j s k i v jezerech tatránských byl odkryl, kdež ostatně ve společnosti téhož korýše na-

lezeno několik červů i u nás domácích a podivuhodná turbellarie Monotus relictus Zachariasem v jezerech krkonošských nedávno nalezená a popsaná.*)

Ohledal jsem nejprve pobřeží jezerní, téměř v celém obvodu jeho, načež upravil jsem vlečnou síť i jinou menší, příruční a přijav s povděkem přátelskou pomoc doprovázejícího mne soudruha, přikročil jsem ku vlastní práci své. Loveno bylo především pelagicky, vyšetřeno pobřeží, splav a voda pod splavem, na to pak uchýleno se ku manipulaci se sítí vlečnou, což pro četné kmeny ve vodě splývající a balvany na dně se povalující dosti obtíží způsobovalo.

Celkem loveno bylo několik hodin, výsledek zkoumání byl pak asi následující:

1. Ve vodě pobřežní vyskytl se čolek alpský (Triton alpestris.) Krásný tento čolek s ohnivě rudým břichem objevoval se tu u velikém množství a to ve všech téměř stadiích vývoje. Pod kameny a jinými předměty jezerního dna nalezena průsvitně rosolovitá vajíčka, několik z nich s embryony pokročilého stadia vývoje. Četně zastoupeni byli mladí mloci se zevnějšími žabrami, kteří však co do počtu ustupovali dospělým samicím a samcům, kteří to poslední zejména svými ozdobně vyvinutými hřebeny nádherně ve vodě se vyjímali.

2. Pelagickým lovením získáno několik rodů a specií našich cladocer, copepodů a cypridek, jež však většinou jsou obyčejnými v jezerech jihočeských, pročež od vyjmenování jich upouštím.

3. Zetlívající prsť dna jezerního vytažena na břeh objevila se nevyčerpatelnou téměř skrýší, v níž hemžily se četné larvy vodních komárů a brouků, jakož i povalovaly se svleklé pokožky vážek a šídel, což však vše jest docela obyčejným zjevem na dně každé větší nádržky vodní, pročež i tu upouštím od podrobného vyjmenování forem.

4. V pobřežním dně ulovena konečně pro mne nejzajímavější kořisť jezera Plöckensteinského, jež zaplatila poněkud dojem nezdaru, jenž při úvaze o konečném výsledku zmocňovati se mne počal. Byl to úhledný červ, Stylodrilus Heringianus Clap., jenž pod kameny a dřevy na dně se povalujícími, zejména však mezi kořeny borůvek, jež částečně i do vodního dna pobřežního se byly zapustily své sídlo byl vyvolil.

Stylodrilus Heringianus znám byl prof. Vejdovskému z rašelinišť u Doks**), ve větším množství nabyl jsem pak tohoto

---

*) Zeitschr. f. w. Zool. 1885.

**) System u. Morphologie der Oligochaeten, pag. 53.

červa roku loňského i předloňského ve Vltavě u Prahy. Individua z jezera Plöckelsteinského byla vesměs opaskem opatřena, tudíž pohlavně dospělá, zajímala mne pak některými odchýlkami, jakéž u porovnání s exemplary vltavskými na nich byl jsem konstatoval. Kdežto individua z Vltavy honosila se barvou krásně do růžova červenou, byli červi z jezera Plöckelsteinského barvy matné, bledě červené, tak že žlutý obal žaludeční značně prosvítal a nad barvou červenou vynikal; taktéž velikosť exemplářů plöckensteinských byla dosti menší nežli vltavských. Ostatně organisace vnitřní, jak později mikroskopem byl jsem ji ohledal, odpovídala úplně znakům, jakéž Claparède pro našeho červa byl stanovil.

Shrneme-li v jedno na konec výsledky, jakýchž při faunistickém ohledání jezera Plöckensteinského jsem byl docílil, jeví se konečný resultat dosti chudým. Zejména se mi nepodařilo konstatovati přítomnosť zástupců fauny hlubokých jezer horských a fauny relictní, nicméně nelze z tohoto záporného výsledku dokazovati absolutní jich tuto nepřítomnosť, zvláště když nepodařilo se mně, abych ku středu jezera se byl dostal a tuto jezerní dno přímo ohledal. Tudíž vztahuje se resultát zkoumání mého pouze na jistou část jezera a stane se jen tehdy úplným, pokud podaří se vyšetřiti samu střední partii jezerní, což ovšem se dosti značným nákladem jest spojeno, zejména pro nevyhnutelné upotřebení loďky, nicméně pro úplné faunistické poznání jezer šumavských nanejvýše žádoucno.

II. Některé prameny horské.

Ohledal jsem faunisticky několik těchto pramenů šumavských, jež zejména pod samým Plöckensteinem v značnějším množství se prýští. Prameny tyto prodírají se úsilně skalnatou půdou těsně mezi kořeny a pod kořeny stromů, vytvořujíce v průběhu svém často malé kaskady, opodál kterých větší nádržky vodní se tvoří, na jejichž dně pak dosti značné vrstvy hrubozrného písku se usazují. Břehy těchto nádržek, jakož i balvany skalní v pramenech trčící lemovány jsou hustou třásní jatrovkovitých i listnatých mechů, jež právě se svým písčitým podkladem poskytují skrýš sporé fauně. Voda těchto pramenů téměř ledově jest studená, což také asi jest příčinou, že tak chuda jest na organismy živočišné. Věnoval jsem těmto pramenům delší dobu svého zkoumání i nalezl jsem tu některé zástupce červů, kteréž dovolím si tuto blíže vyjmenovati;

1. V písku pod mechem vyskytoval se často, někdy i v dosti značné hloubce bílý červík z čeledi Enchytraeidův. Po bližším

ohledání objevil se býti formou náležející do rodu Pachydrilus. Bohužel nebyl pohlavně dospělým, čímž správné specifické určení jeho stalo se nemožným.

2. Rovněž v písku pod mechem a jinde v písčitém dně objevoval se, ač dosti spoře, jiný úhledně růžový červ. Určil jsem jej jakožto Stylodrilus Gabretae Vejd. — Prof. *Vejdovský* nalezl poprvé tohoto červa v Šumavě r. 1881 i popsal jej ve svém díle.*) Celkem druží se velmi úzce ku *Claparèdově* formě (Stylodrilus Heringianus), rozlišuje se však velmi přesně jistými podstatnými znaky anatomickými, zevnějšími i vnitřními. Ostatně, jak svědčí předcházející faunistická zpráva o jezeře Plöckensteinském objevují se v Šumavě obě formy pospolu, což ostatně i dále sděleným faunistickým výzkumem stoky Švarcenberské dotvrzeno bude.

3. Vedle obou tuto jmenovaných červů nalezen tu i tam annulat dosud mně záhadný. Velikostí podobal se Tubifexu neb Ilyodrilu, byl však objemnější, barvy slabě pak růžové. Což však zvláště jej vyznačovalo, byla význačná průhlednosť tohoto červa, kteráž ostatně upomínala na jistou formu Tubificidův, již na jaře roku letošního s prof. *Vejdovským* ve Vltavě na Štvanici byli jsme nalezli, dosud však pro krátkosť času blíže nepopsali.

Bohužel několik exemplarů tohoto červa, jež jediné jsem byl nalezl a do zvláštní láhvičky uschoval, zahynulo mi na cestě, dříve než-li ku vyšetření mikroskopickému jsem přikročiti mohl i nezbývá mi než badání v tomto směru odložiti na dobu příští.

III. Stoka Švarcenberská.

Ohledal jsem některé partie této stoky v okolí Plöckensteinu, zejména poblíže vesničky Spitzbergen. Průzračná, značně studená voda teče tu povlovně zúženým korytem, jehož dno značně hrubozrným pískem jest pokryto. Tu a tam na dně několik kamenů, kusy dřev a větví, kůry a jiných předmětů, což vše vadí běhu vody, však znamenitým jest útulkem organismů vodních tuto žijících. Pustiv se u výzkum, volil jsem zejména místa, která většími nánosy písku byla vyznačena; tušilť jsem zajisté, že tyto zdánlivě mrtvé spousty písečné jsou dobře mi známým úkrytem, v němž hemží se a rýje celý svět annulatů, turbellarií, volně žijících nematodů a jiných organismů. Ovšem jest pochopitelno, že v úzké a mělké této stoce nebylo mi

*) System n. Morphologie der Oligochaeten, pag. 53.

lze operovati se škrabadlem neb ruční síťkou. Volil jsem tudíž methodu, která při sbírání materialu k studiu annulatologickému nejvíce jest odporučení hodna. — Vybírámeť jednoduše písek rukou, načež jemně jej přebíráme, nalezené pak červy pinsetou, stéblem neb jiným jemnějším předmětem uchopujeme a do připravené, vodou naplněné nádoby skládáme. Uživ této methody byl jsem skutečně překvapen nad úžasně hojným množstvím červů, jakéž písčité dno stoky Švarcenberské v sobě chová. Než překvapující tato hojnosť týkala se pouze počtu jednotníků, na specie a rody jest voda stoky Švarcenberské dosti chuda. — Stylodrilus Heringianus Clap. tuto dominoval, k němu pak rovnoměrně družil se St. Gabretae Vejd. Skutečně nápadna byla neobyčejná velikosť obou těchto druhů; neboť jako St. Heringianus z jezera Plöckensteinského vynikal svou nepatrností u porovnání s exemplary vltavskými, tak opětovně nápadna byla mohutností svou individua stoky Švarcenberské. Jak z tohoto udání a z předcházejících vysvítá, jsou oba jmenované druhy rodu Stylodrilus v Šumavě velmi hojnými i mohu tudíž tvrditi, opíraje se též částečně o pozorování prof. *Vejdovského*, že náležejí k nejobyčejnějším zjevům vodní fauny šumavské.

Vedle obou tuto jmenovaných oligochaetů byl pro mne nade vše zajímavou kořistí vzácný u nás i jinde oligochaet Spirosperma ferox Eisen.*)

Nelze upříti, že tento annulat, jehož podivný, téměř bizzarní habitus při povrchním již ohledání jest nápadným, chová v sobě pro faunu naši domácí cosi cizího, což osamocuje jej mezi Tubificidy, nájmě mezi domácími oligochaety vůbec. Vyskytnutí se tohoto červa ve Vltavě u Prahy bylo také jednou z pohnůtek, proč odhodlal jsem se podniknouti exkursi k vodám šumavským. Neboť soudě podle stanovisek jeho v cizině domníval jsem se právem, že bydliště jeho ve vodě vltavské u Prahy bude asi druhotným, že pak vlastním, původnějším jeho stanoviskem budou asi nepochybně vody šumavské.

V úvaze této utvrzoval mne též zjev, jejž po čas svých zkoumání po více než-li tři leta měl jsem příležitosť pozorovati. — Každoročně po jarním vystoupnutí a opětovném sklesnutí vody vltavské usazují se blíže jezů pražských značné spousty bahnitého písku, s nimi pak zároveň splaveno bývá obrovské množství rozličných organismů vodních, mezi nimiž právě nejvíce oligochaetů se objevuje a mezi těmito opětovně význačným zjevem jest *Spirosperma ferox.*

---

*) Viz „Přehled českých Tubificidův"; ze zpráv král. čes. spol. nauk, 1885.

Ovšem nalezl jsem Spirospermu ve vodě vltavské u Prahy v různých dobách ročních, žije tedy zde stále, dospívajíc zde pohlavně a rozmnožujíc se, jak tomu nasvědčuje mladá podzimní generace, patrně z jarní pohlavně dospělé pošlá. — Nicméně vždy však mohu konstatovati, že největší část červů, jež na jaře se zde objeví, pochází z jižních krajin Čech, byvši sem jarním vystoupením vody splavena. — Ostatně podléhají témuž osudu splavovacímu i jiní oligochaeti, jež ve vodě vltavské u Prahy lze nalézti, z čehož dlužno souditi, že fauna jihočeská na červy štětinaté velmi jest bohata, což ve skutečnosti pravdivo jest. Mohu poukázati právě na Spirospermu, jejíž úžasná hojnosť ve vodách Šumavských mne až překvapovala. Ve stoce Švarcenberské jest zjevem zcela obyčejným a kdykoliv jsem zde zalovil, mohl jsem bezpečně očekávati, že několik exemplárů tohoto červa ukořistím. I tato hojnosť zdá se svědčiti, že šumavské stanovisko tohoto červa jest původnější, ač jest přirozeno, že podmínky životní tuto pro červa našeho mnohem příznivější jsou. Konečně ne-li rozhodujícím, tedy důležitým pro naši otázku zdá se mně býti poukázání na stanovisko tohoto červa mimo Čechy. *Eisen* nalezl jej ve Švédsku v jezeře Ifö a řece Motala, *Kessler* v jezeře Onežském, *Grube* (jak dalece lze se na nedokonalý popis spolehnouti) v jezeře Ženevském a *Wierzejski* v jezerech Tatranských.

Jsou to tedy stanoviska, k nimž stanovisko šumavské jsouc přirovnáno, jeví se býti zajisté stejně významným. Ze stanovisek těchto vysvítá však také dále, že Spirospema jest po výtce formou jezerní, jež teprve druhotně v řekách a jiných vodách se objevuje. Však dále lze z těchže stanovisek uzavírati, že Spirosperma řadí se ku oněm nejstarším organismům sladkovodním, jež velká neb hluboká jezera obývají a z nichž někteří jako Monotus, Plagiostoma a j. své zástupce mořské dosud mají.

Abych malou řadu červů ve stoce Švarcenberské se vyskytujících dovršil, jest mi ještě jmenovati jednoho zástupce jejich, jímž jest malá turbellarie rhabdocoelní, *Catenula Lemnae* Dugès. — Catenula Lemnae dosud v Čechách nalezena nebyla, a ačkoliv dle některých autorův jest hojnou v stojatých vodách okřehkem porostlých, přece jest velmi málo těch, kdo Catenulu zkoumali, ba sám *Graff* pojednává o ní jen na základě popisů stávajících. — Ve stoce Švarcenberské sice okřehek neroste, však Catenula Lemnae vyskytuje se zde velmi hojně. Catenulu popsal a pojmenoval poprvé r. 1836 *Dugès* (Annal. d. scien. nat. XXVI), avšak pravou povahu její jako plo-

štěnky poznal teprve *Leydig* r. 1854 (v Müller's Arch. für Anat.) *Graff* řadí Catenulu v čeleď Stenostomidae, zavrhuje pak staré jméno Catenula a označuje naši turbellarii jako Stenostoma Lemnae. Však dle mého přesvědčení není změna ta nikterak připadnou, neboť Catenulu nutno rozhodně vyřaditi z rodu Stenostoma. Vyjímaje snad způsob rozmnožovací dělením a souhlasné uložení organu exkrečního, nemá Catenula s rodem Stenostoma nic společného i jest sloučení obou rodů v jedno úplně neodůvodněno. Skutečně jest organisace Catenuly dosud velmi málo známa, neboť kromě některých údajův *Parádiho*, *O. Schmidta* a amerického zoologa *Sillimana* a kromě delšího popisu v Graffově monografii téměř nic více o ní v novější literatuře zoologické neexistuje. — Maje po ruce hojného materialu, mohl jsem s důstatek poznati organisaci této zajímavé turbellarie i dovolím si tuto poukázati na některé její zevnější i vnitřní znaky anatomické, reservuje sobě delší pojednání na dobu příhodnější.

Catenula Lemnae vyskytuje se vždy v řetězcích o dvou až čtyřech zooidech velikostí 2—4 mm. Tělo jest válcovité, značně protáhlé i lze na něm celkem tři odstavce pozorovati: přední konická část s uzlinou mozkovou, část střední s ústy a pharyngem a část zadní, největší se větší částí roury zažívací. Vedle těchto tří oddílů jest celé tělo paralelními záhyby zvraskalé, neboť značně jest kontraktilní a dá se silně vyvinutou vrstvou svalů podélných význačně smrštiti, při čemž zvíře zvláštního karakteristického tvaru nabývá. — Ústa zvířete nalezají se na straně břišní uprostřed oddílu středního, jsou tvaru laločnatě trojhranného i vedou do živě vířícího jícnu, jenž kolenovitě do vnitř těla se zahýbá. Vlastní roura zažívací táhne se v ose podélné celým tělem, tudíž i předním odstavcem tělním, i tvořeny jsou stěny její velikými elipsoidními buňkami jež téměř celé tělo červa vyplňují, následkem čehož parenchym tělní na slabou vrsřvu pod svalovinou tělní umístěnou jest redukován. Uzlina mozková nad pharyngem v oddílu tělním předním umístěná, jest nepárovitá, tvaru nepravidelně konického i chová v sobě veliký sluchový organ, pozůstávající z váčku čirou tekutinou naplněného, kteráž ve středu svém chová čočkovitý ostře světlo lámající otolith. Orgán exkreční jest nepárovitý i nalezá se na hřbetní straně zvířete, kdež po celé délce v střední čáře a v četných záhybech se táhne až ku zadnímu konci těla, kdež v jisté vzdálenosti před koncem tělním v malou ampulu ústí, jež na venek opět nepatrným otvůrkem se otevírá. Pohlavní organy u zvířete jsem nepozoroval, jelikož toto po celý čas mého zkoumání velmi

čile dělením se rozmnožovalo. Ostatně zvíře samo jest velmi křehké a dá se jen velmi obtížně pod mikroskopem sledovati trhajíc se a hynouc v málo okamžicích. Jinak rychlým svým dělením dá se zvíře dosti dlouho na živu zachovati, chová-li se za podmínek jen poněkud přiměřených. Podařilo se mi několik individuí v malé láhvičce až do Prahy dopraviti, i dovedl jsem jich až dosud na živu zachovati.

Tímto vyčerpán jest malý příspěvek můj k fauně šumavské, jenž ovšem nikterak na úplnosť nároky činiti nemůže, jímž však jednak rozřešiti jsem se snažil některé stránky biologie našich oligochaetův se týkající, jednak upozorniti jsem chtěl na zajímavosť a zvláštnosť fauny šumavské, jež věru toho zasluhuje, aby studiu jejímu obzvláštní péče věnována byla.

46.

Verrucocoelia vectensis, Hinde.

Nová spongie pro český útvar křidový z okolí Roudnice.

Přednášel **Čeněk Zahálka** dne 10. prosince 1886.

(*S 1 tabulkou.*)

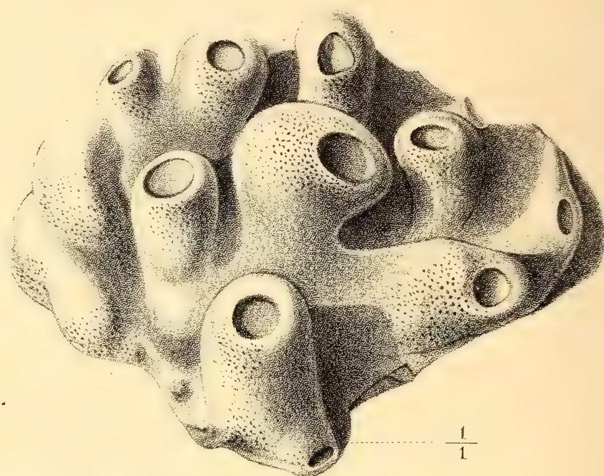
Verrucocoelia vectensis je spongií, kterou objevil Hinde v anglickém útvaru křidovém. Hinde udává stupeň útvaru a naleziště její Chalk Marl: Ventnor na ostrově Wight (Mantellova coll.)[1]) Spongie Verrucocoelia vectensis náleží do řádu hexactinellid, podřadí dictyonin a čeledě euritid.[2])

Exemplary jmenované mořské houby nalezl jsem též v českém útvaru křidovém a sice na výšině Rohatecké u Roudnice, ve stráni zvané „Na vinici", v měkkém slínu teplického pásma[3]) (Turon, Scaphitové pásmo). Mají tvar kužele, jenž je poset kolkolem četnými válcovitými kalíšky, jež jsou na konci zakulaceny. Výšku hub nemohl jsem určiti, jelikož žádný z exemplarů nalezených není celý. Zlomky dosahují až 70 mm výšky. Šířka obnáší až 80 mm. Kalíšky mají výšku až 20 mm a šířku až 18 mm. Stěny kalíšků

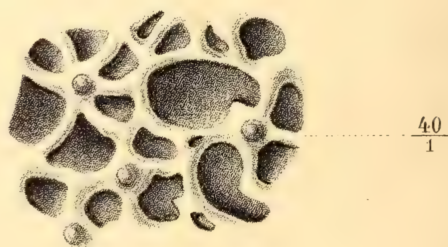
---

[1]) Hinde, Catalogue of the fossil sponges. P. 99.
[2]) Zittel, Studien I. S. 47.
[3]) Zahálka, Geologie výšiny Rohatecké str. 15.

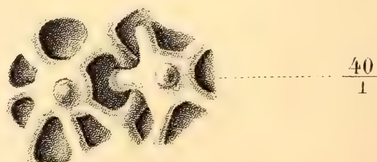
Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.



Č. Zahálka kreslil. *Tisk Farského v Praze.*

bývají až 2 mm široké. Vrcholy kalíšků zakončeny jsou kruhovitým neb vejčitým otvorem až 8 mm v průměru, ústí to středních chodeb. Chodby ty mezi sebou souvisí. Povrch houby je nepravidelně poset malými kruhovými ostiemi, které mají až $^1/_2$ mm šířky. Povrch houby je holý. Kostra sestává na povrchu z dosti velkých, slitých, šestipaprskových jehlic s hustými uzly (Tab. I. obr. 2. a 3.) a srovnává se s popisem a vyobrazením kostry Hindeovy Verrucocoelie vectensis.[1]) Chodby vyplněny jsou slínem. Kostra houby jest z největší části ve vápenec proměněna. Kyselinami získáme nepatrné zbytky křemité kostry. Nejlépe lze studovati kostru z povrchu, kdež je sice ve vápenec proměněna, tvar její ale dosti dobře zachován.

Vlastnosti druhové co do tvaru i kostry souhlasí s Hindeovým druhem „vectensis“ a rodové znaky souhlasí s rodem „Verrucocoelia“.[2])

Z exemplarů, jež jsem nalezl, jsou zvláště dva pozoruhodnější. Jeden má tvar pěkně kuželovitý ale kalíšky stlačené, druhý vyniká krásnými zachovalými kalíšky, a ten vyobrazil jsem na tab. I. obr. 1.

Naleziště naší Verrucocoelie vectensis u Roudnice jest v geologickém ohledu zajímavo tím, že spadá do téhož stupně útvaru křidového jako naleziště na anglickém ostrově Wight. Náležíť měkké slíny „Na vinici“ k teplickému pásmu, jež souhlasí se severoněmeckým turonem, a anglický Chalk Marl spadá též do stupně turonského.

Vysvětlení tab. I.

Obr. 1. *Verrucocoelia vectensis,* Hinde. Zlomek. Přirozená velikosť. Z teplického pásma výšiny Rohatecké u Roudnice.

Obr. 2. a 3. Část kostry z předešlého exemplaru. Z povrchu kalíšku. Kresleno dle 40násobného zvětšení.

---

[1]) Catalogue etc. P. 98. Pl. 24 fig. 3 a.

[2]) Etallon, Actes de la société jusassiene d'émulation de Porrentruy 1860. S. 129.

47.

Zur Kenntniss der Fauna der Etage F – f1 in der palaeozoischen Schichtengruppe Böhmens.

Vorgetragen von **Ottomar Novák** am 11. November 1886.

(*Mit zwei Tafeln.*)

Bekanntlich wird Barrande's Unterabtheilung *f*1, aus schwarzen, meist dünnbänkigen, bald dichten, bald fein krystallinischen, mitunter auch aus schieferigen, den Graptolithenschiefern der Etage *E*—*e*1 nicht unähnlichen Kalksteinen zusammengesetzt.

Das typische Gestein dieser Unterabtheilung bilden jedoch schwarze, feste, beim Anschlagen mit dem Hammer hell klingende Plattenkalke*), die namentlich bei Prag (unterhalb Lochkov im Radotiner Thale) aufgeschlossen sind und daselbst an einigen Punkten zu industriellen Zwecken ausgebeutet werden.

Doch ist die petrographische Beschaffenheit der diese Unterabtheilung zusammensetzenden Gesteine nicht überall dieselbe.

Mitunter werden die Kalke grob-krystallinisch, dickbänkig, büssen ihre schwarze Farbe ein und werden dunkelgrau oder hellgrau (*Dvorec*, *Gross-Chuchle*). Ihre Fauna stimmt aber mit der der typischen Plattenkalke vollkommen überein. *Bronteus umbellifer*, *Phacops miser*, *Proetus lepidus*, *Tentaculites intermedius*, *Platyostoma gregarium Barr.* **) gehören auch hier zu den häufigsten Erscheinungen.

Anderorts werden die Kalke dünnschieferig und enthalten neben undeutlichen Graptolithen***) und den soeben citirten Formen auch noch häufige, die typischen schwarzen *f1*-Kalke charakterisirende Thierreste wie: *Hercynella nobilis* Barr. sp., *Herc. bohemica* Barr. sp., *Tentaculites intermedius* Barr., *Tent. acuarius* Richt.†) sowie auch zahlreiche Exemplare von *Dalila*, *Praelucina*, *Discina*, *Lingula* etc. Dies sieht man namentlich in dem, in das Radotiner Thal ein-

*) Die typischen *F—f1* Kalke führen daher den populären Namen „*Cinkava*".

**) *Natica gregaria* Barr. in *Bigsby Thesaurus siluricus* p. 168.

***) Vergl. *Barrande* Syst. Silur Boh. Vol. III. Ptéropodes, p. 119. sowie auch Déf. des Col. III. p. 91.

†) *Tentaculites longulus* Barr. Ibid. p. 133.

mündenden Kosořer Thale, dessen nördliche Partie mit dem Streichen der daselbst in einem grossen Steinbruche aufgeschlossenen *f1*-Schichten zusammenfällt.

An anderen Punkten sind die Kalke hellgrau, verlieren ihren krystallinischen Charakter, werden dicht, und sind von den grauen *G—g1*-Kalken kaum zu unterscheiden. In solchen Fällen weichen sie derart von ihrer typischen Beschaffenheit ab, dass auf ihr Vorhandensein nur nach den Lagerungsverhältnissen geschlossen werden kann. Derartige dichte an *G—g1* erinnernde *f1*-Kalke, sind in einem zwischen *Suchomast* und *Měnan,* nördlich von *Vinařic* gelegenen Steinbruche aufgeschlossen. In diesem Steinbruche sieht man zu unterst typische schwarze *E—e2*-Kalke mit *Scyphocrinus elegans*, wie solche auch bei *Dvorec, Braník, Vyskočilka* und *Karlstein* bekannt sind, auf diese folgen dichte, hellgraue f1-Kalke mit *Machaeracanthus Bohemicus*, die von typischen rothen *F—f2*-Kalken überlagert werden. Letztere übergehen dann in die allgemein bekannten, weissen, an Versteinerungen überaus reichen Korallenbänke von *Koněprus.*

Bemerkenswerth ist das wechselseitige Verhältniss der Kalke der Abtheilung *f1* zu denjenigen der Abtheilung *f2*. Es hat sich nämlich herausgestellt, dass je mächtiger die Kalke der ersteren Abtheilung werden, desto geringer wird der Grad der Entwickelung der letzteren und umgekehrt. Auch sind Fälle bekannt, wo eine Abtheilung auf Kosten der anderen gänzlich fehlt.

So z. B. werden bei *Dvorec* die typischen schwarzen *f1*-Kalke mit *Bronteus umbellifer* und *Tentaculites intermedius* direkt von den *g1*-Knollenkalken überlagert und die rothen *f2*-Kalke fehlen gänzlich.

Dasselbe gilt auch von den oben erwähnten unterhalb *Lochkov* im Radotiner Thale aufgeschlossenen Kalken der Etage *F*, die nur aus schwarzen, die Abtheilung *f1* charakterisirenden Bänken zusammengesetzt werden. Die hier vorkommenden Thierreste wie *Cheirurus (Crotalocephalus) Sternbergi*, *Cheir. (Crot.) gibbus, Harpes venulosus*, *Cyphaspis hydrocephala*, *Platyostoma gregarium**), *Hercynella bohemica*, *Tentaculites acuarius* etc. sind auch in den rothen und weissen f2-Kalken der Umgebung von *Měnan* und *Koněprus* zahlreich vertreten.

Auch die graptolithen-führenden, schieferigen *f1*-Kalke des Thales von *Kosoř***) werden direkt von den *g1*-Knollenkalken mit *Dalmania (Odontochile) Hausmanni* überlagert.

---

*) *Natica gregaria* bei Barrande, nach Kayser identisch mit *Platyostoma naticoides* A. Roem. (Fauna d. ält. Devonablag. d. Harzes p. 100 Taf. 16 Fig. 4.)

**) Barrande Déf. des Col. III. pag. 91.

An einer anderen Stelle und zwar südlich von Prag, längs der von *Hlubočep* nach *Klein-Chuchle* führenden Strasse, ist die Etage *F* bereits durch beide Abtheilungen vertreten. Die allgemein bekannten, vielfach gefalteten, schwarzen *f1*-Kalke sind daselbst verhältnissmässig sehr mächtig. Dagegen ist die Abtheilung *f2*, nur durch einen etwa 2—3 Meter breiten, rothen Streifen vertreten.

In der Gegend von *St. Iwan*, *Tetin, Tobolka*, *Koněprus*, *Měnan*, *Srbsko* etc. gelangen nur die rothen Kalke der Abtheiluug *f2* zur Entwickelung. Sie sind daselbst sehr mächtig und werden nirgends von *f1*-Kalken unterlagert. Wenigstens ist es mir nicht gelungen in dieser Gegend irgend eine Spur dieser letzteren zu entdecken.

Alle diese Beispiele sprechen dafür, dass die *f1*-Kalke von *f2* nicht getrennt werden können*), indem sich diese Abtheilungen gegenseitig vertreten. Es dürfte daher viel zweckmässiger erscheinen, beide Abtheilungen als verschiedene Facies eines Schichtencomplexes aufzufassen, und dies um so mehr als die *f1*-Kalke nur am südöstlichen Rande des böhmischen Silurbeckens**) entwickelt sind und gegen die Mitte desselben, also nach Nordwesten, allmählig in die typischen *f2*-Kalke zu übergehen scheinen.

Was nun die in Etage *F—f1* eingeschlossene Fauna selbst betrifft, so ist dieselbe bereits in *Barrande's Syst. Silur.* so ausführlich bearbeitet worden, dass nur ganz geringe Beiträge zur Kenntniss dieser Fauna nachgeliefert werden können.

Doch sind durch spätere, nach dem Tode unseres Altmeisters *Barrande* erfolgte Nachforschungen, einige sehr interessante Typen entdeckt worden, die insofern von Interesse sein dürften, als sie bis jetzt nur aus devonischen oder noch jüngeren, jedoch nicht aus silurischen Ablagerungen bekannt sind. Dies gilt vor allem von den Gattungen *Machaeracanthus, Gyroceras*, *Crotalocephalus*, so wie auch von dem, nur aus hercynischen Schichten bekannten und daselbst horizontal und vertical sehr verbreiteten *Tentaculites acuarius* Richter. Zwei andere Typen, nämlich die Gattung *Aristozoe* und die von mir neu aufgestellte Hyolithengruppe *Orthotheca*, kommen wol schon im böhmischen Obersilur *(étage E)* vor, doch fällt, wie später gezeigt

---

*) Vergl. *Kayser*: Über die Grenze zwischen Silur und Devon in Böhmen etc. Neues Jahrbuch Bd. II. 1884 p. 82.

**) Im Sinne Barrande's.

werden soll, die Hauptentwickelung dieser beiden Gattungen erst mit dem nächst jüngeren Niveau, nämlich der Abtheilung *f2* zusammen.

Es wird daher nicht ohne Interesse sein, die nachstehend aufgezählten 5 Typen, einer näheren Betrachtung zu unterziehen:

1. *Machaeracanthus Bohemicus* Barr. sp.
2. *Gyroceras Kayseri* nov. sp.
3. *Tentaculites acuarius* Richt.
4. *Hyolithes (Orthotheca) intermedius* nov. sp.
5. *Aristozoe solitaria* nov. sp.

I. Fische.

1. Machaeracanthus bohemicus Barr. sp.

Taf. I. Fig. 14.

1865. *Ctenacanthus Bohemicus* Barr. Déf. des. Col. III. p. 22.

1868. *Ctenacanthus Bohemicus* Barr. in Bigsby Thes. Silur. p. 192.

1872. *Ctenacanthus Bohemicus* Barr. Syst. Silur. Boh. Vol. I. Supplt. p. 641. Pl. 28, 30 et 34.

1878. *Ctenacanthus Bohemicus* Kayser. Fauna ält. Devonablager. Harz. p. 4. Taf. XXXV. Fig. 12.

1884. *Machaeracanthus Bohemicus* Kayser. N. Jahrb. für Min. II. Band p. 82.

Flossenstachel dieses Fisches waren bis jetzt blos aus den Subdivisionen *f2* und *g1* bekannt. Das auf der beiliegenden Tafel abgebildete Stück stammt jedoch aus den typischen *f1*-Kalken von *Slivenec*. Demgemäss ist *M. Bohemicus* der älteste aus dem palaeozoischen Schichtencomplexe Böhmens bekannte Vertreter der Fische.

Ein anderer, viel besser erhaltener Flossenstachel dieser Art ist mir aus dem schon früher erwähnten Steinbruche nördlich von *Vinařic* bekannt*).

Machaeracanthus Bohemicus ist daher, wie aus der beträchtlichen Anzahl der von Barrande l. c. angeführten Fundorte geschlossen werden kann, nicht nur horizontal, sondern auch vertical sehr verbreitet. Überall kommen aber nur vereinzelte Bruchstücke vor.

---

*) Dieses Stück befindet sich in der Sammlung Sr. Durchlaucht des Fürsten Karl Schwarzenberg in *Gross-Vosov*.

II. Cephalopoden.

2. Gyroceras Kayseri Nov.

Taf. I. Fig. 1—7.

Das Gehäuse dieser Art ist vollständig frei gewunden und dürfte die Anzahl der Umgänge kaum mehr als zwei betragen. Die ganz allmählig an Breite zunehmende Schale hat einen kreisförmigen Umriss. Die Höhe der letzten Windung beträgt am Mundrande 17 mm. und reduzirt sich in der Mitte derselben Windung auf 9 mm. Die Länge der Wohnkammer nimmt etwa ein Drittel der letzten Windung ein. Die Kammern sind mässig gewölbt, werden aber an der Externseite etwas steiler als an der Internseite. Der Abstand der Querscheidewände beträgt etwa 3 mm. Sipho cylindrisch, dicht an der Externseite gelegen. Die sehr dünne Schale ist nur theilweise erhalten. Sie war mit äusserst feinen, gedrängten Querstreifchen bedeckt und ausserdem mit einzelnen, unregelmässig abstehenden, mässig erhabenen Ringen versehen (Fig. 6—7).

Diese letzteren, sowie auch die Streifchen sind an der Internseite horizontal, verlaufen an den Seitenflächen etwas schräg nach rückwärts und bilden an der Externseite einen mässig tiefen Sinus (Fig. 7).

Vorkommen. Im schwarzen Kalke der Abtheilung f1 unterhalb *Lochkov.* (Sehr selten, bis jetzt nur das abgebildete Exemplar bekannt.)

Gyroc. Kayseri gehört jedenfalls in die Gruppe des *Gyroc. alatum* Barr.*) aus *f2* und *g1*, und *G. modicum* Barr.**) aus *g1.* Beide unterscheiden sich von der eben beschriebenen Art durch den stark quer ausgedehnten, elliptischen Querschnitt, sowie auch durch die complicirtere Schalenornamentik.

Bemerkung. G. modicum Barr., kann jedenfalls nur als eine *Mutation* von *G. alatum* betrachtet werden, bei welcher die rinnenförmigen Querfortsätze der Schale wahrscheinlich viel schwächer entwickelt waren als bei den typischen, l. c. Pl. 44 abgebildeten Koněpruser Exemplaren. Übrigens ist die schlanke, ebenfalls im Koněpruser Kalke vorkommende, auf l. c. Pl. 103 Fig. 17—19 dargestellte Varietät des *G. alatum* von *G. modicum* kaum zu trennen.

---

*) Syst. Silur. II. Pl. 44 und 103.

**) Ibidem. Supplt. Pl. 517.

III. Conulariden*).

3. Tentaculites acuarius Richter.

Taf. I. Fig. 8.

(Synonymen siehe *Novák*: *Tentaculiten***).

In meiner Arbeit über Tentaculiten***) habe ich darauf aufmerksam gemacht, dass diese Art in den Subdivisionen *f2*, *g1*, *g2* und *h1* vertreten ist. Seit dieser Zeit ist es mir gelungen einige sehr charakteristische Exemplare derselben auch in dem Etagen *f1* und *g3* zu entdecken. Hiemit ist *T. acuarius* in dem ganzen vorläufig mit dem Namen „*Hercyn*“ zusammengefassten Schichtencomplexe vertreten.

Bemerkenswerth ist, dass das Vorkommen dieser Art auch am Ostabhange des Urals nachgewiesen wurde. Die uralischen von *Karpinsky*†) abgebildeten Stücke stimmen namentlich mit der in den Etagen *G—g2* und *H—h1* vorkommenden, an der Spitze ungeringelten Varietät überein. Dagegen sind mir aus *f1*, *f2* und *g1* bloss solche Varietäten bekannt, deren Anfangsspitze bis an den Embryonalnucleus geringelt ist.

Vorkommen. Aus *F—f1* sind mir bis jetzt bloss einige seltene Exemplare aus den schwarzen Kalken unterhalb *Lochkov* bekannt.

---

*) Die Gattungen *Conularia, Hyolithes, Tentaculites* etc., die nach dem alten Usus von den meisten Autoren zu den *Pteropoden* gestellt wurden, werden von *Neumayr* (*Zur Kenntniss der Fauna des untersten Lias p. 18*), und dies wohl mit Recht, unter dem Collectivnamen *Conulariden* zusammengefasst. In der citirten Arbeit *Neumayr's* wird auch auf die Verwandtschaft dieser Gruppe zu derjenigen der palaeozoischen *Capuliden* aufmerksam gemacht.

Zu einer ähnlichen Ansicht gelangt auch *Walcott (American Journal of Science.* Vol. *XXX.* July 1885. p. 17) indem er die zur oben genannten Gruppe gehörigen Typen (die Gattung *Tentaculites* ausgenommen) nur mit „*considerable reservation*“ zu den Pteropoden stellt, und auf die Verwandtschaft dieser Typen mit den Gastropoden hinweist.

Die Gattung *Tentaculites*, wird von *Vine* (Quart. Journal. 1882 Vol. *XXXVIII* p. 385), nach dem Vorgange *Sa.ter's*, neben *Cornulites* zu den Anneliden gestellt. — Jedenfalls werden die als Tentaculiten aufgefassten Formen, nochmals einer gründlichen Revision unterzogen werden müssen.

**) Beiträge zur Palaeontologie Oesterreich-Ungarn's II. Band 1882 p. 53.

***) Ibid. p. 54 und p. 69.

†) Pteropoden am Ostabhange des Urals (Mém. Acad. St. Pétersbourg Tome *XXXII* 1884 Nro. 1. p. 6. Tab. I. Fig. 1—5).

Die Art wird in *f2* schon viel häufiger und erreicht das Maximum ihrer Entwickelung in *g1*. Von da angefangen nimmt die Anzahl der Individuen allmählig ab, so zwar dass sie in *g3* und *h1* wieder nur sehr vereinzelt getroffen werden.

Bemerkung.

Tentaculites acuarius ist eine in den hercynischen Schichten nicht nur zeitlich, sondern auch räumlich weit verbreitete Thierform. Darüber ist (l. c.) seinerzeit von mir und späterhin von *Karpinsky* (l. c.) bereits berichtet worden. Jedenfalls ist die Verbreitung dieser Form eine noch viel bedeutendere als in den bisherigen Literaturangaben bereits sichergestellt wurde.

4. **Hyolithes intermedius** Nov.

Taf. I. Fig. 9—13 und Taf. II. Fig. 11—17.

1867. *Hyol. obvius* Barr. (pars) Syst. Silur. Boh. III. p. 86. Pl. 12—15.

Diese Art ist der einzige in der Abtheilung *f1* vorkommende Repräsentant der Gattung *Hyolithes*. Einzelne Exemplare waren bereits Barrande bekannt, doch wurden sie mit *Hyol. obvius*, einer die Abtheilung *e2* charakterisirenden Form verwechselt.

Meine an zahlreiches Material gestützten Untersuchungen zeigen jedoch, dass die aus *f1* stammenden Exemplare, von *Hyol. obvius* getrennt, und als selbstständige Form aufgestellt werden müssen.

Die Gehäuse pflegen, wie es bei der Feinheit der Schale und dem schieferigen Gestein, in dem sie vorkommen, nicht anders zu erwarten ist, in verschiedenen Richtungen zusammengedrückt zu sein, doch lässt sich nach den auf Taf. I. Fig. 9 und 11 dargestellten Exemplaren die äussere Gestalt derselben leicht erkennen.

Die abgebildeten Stücke lassen auf ein gerades, gleichmässig an Breite zunehmendes Gehäuse schliessen, dessen Wachsthumswinkel etwa 15° betragen dürfte. Das Jugendende ist scharf zugespitzt und bei einzelnen Exemplaren mit einer geringen Anzahl (4—6) Querscheidewände versehen*).

---

*) Auf das Vorhandensein von Septen in dem zugespitzten Theile einiger primordialen Hyolithen hat kürzlich *G. F. Matthew* (*Illustrations of the Fauna of the St. John Group No. III. Trans. Roy. Soc. Canada Sect. IV. 1885 p. 48*) das Subgenus *Camerotheca* gegründet.

Hiezu erlaube ich mir zu bemerken, dass das Vorhandensein oder das Fehlen von Quersepten im zugespitzten Theile des Hyolithengehäuses, an und für sich nicht als generisches Merkmal benützt werden kann. Ich

Die beiden vorderen Wände des Gehäuses bilden eine zusammenhängende, convexe, halbkegelförmige Fläche, die mit gerundeten Kanten in die flache oder auch schwach concave Hinterwand übergeht. Demgemäss wäre der Querschnitt des Gehäuses mit einem Dreieck mit gerundeten Ecken zu vergleichen und zwar so, dass die beiden, den kleinen Flächen entsprechenden Schenkel des Dreieckes convex, die der entgegengesetzten Fläche entsprechende Basis aber gerade oder auch schwach concav wäre.

Wie nach der Richtung der Anwachsstreifen, sowie auch nach der in Fig. 11—12 dargestellten hinteren Kante der Mündung geschlossen werden kann, war die hintere Fläche („*grande face*“ Barrande) des Gehäuses mit keinem zungenförmig vorragenden Fortsatze versehen, sondern quer abgestutzt. Da aber diese Fläche doch etwas länger war als die beiden vorderen („*petites faces*“, Barrande) so mussten die sämmtlichen Mundränder in einer schräg nach vorn geneigten Ebene liegen.

Die Schale der sämmtlichen Flächen zeigt eine doppelte Streifung, nämlich eine transversale und eine longitudinale. Die Längsstreifen der grossen Fläche sind sehr fein, die der kleinen Flächen viel stärker, beide aber nur unter der Loupe sichtbar. Diese Längsstreifen sind erhaben und vervielfältigen sich bei fortschreitendem Wachsthum der Schale, durch Intercalation. Die ebenfalls erhabenen Querstreifchen sind nach vorn etwas concav und mitunter zu Bündelchen gruppirt, wodurch der ganzen Oberfläche ein welliges Ansehen verliehen wird.

Das beschriebene Gehäuse gehört einer mittelgrossen Art an. Einzelne Exemplare erreichen eine Länge von 20 mm. Die Breite der Mündung beträgt dann 5 mm.

Vorkommen: Ziemlich häufig in den schwarzen *f1*-Kalken von *Lochkov*, *Kosoř* und *Slivenec*.

Vergleichung.

Das Gehäuse dieser Art zeigt eine derartige Analogie mit dem aus dem osturalischen Hercyn stammenden *H. Uralicus* Karpinsky*)

selbst habe oft Gelegenheit gehabt, zahlreiche böhmiche Hyolithenarten zu untersuchen, deren Schalen im Inneren theils gekammert waren, theils aber nicht die geringste Spur von Septen zeigten. Diese Eigenschaft ist jedenfalls blos individuell und kann selbst bei der Bestimmung der Arten nicht besonders verwerthet werden. Dagegen gibt es, wie ich im Nachstehenden zeigen werde, einige wesentliche Merkmale, die zu einer übersichtlicheren Gruppirung der zahlreichen Hyolithenarten führen können.

*) Pteropoden am Ostabhange d. Ural. Mém. Acad. St. Petersbourg Tome XXXII. Taf. I. Fig. 9—14. Separatabdruck p. 15 (1884.)

dass die Identitaet dieser Formen nicht ausgeschlossen ist. Doch sind die uralischen Exemplare viel zu unvollständig; es erscheint daher die Identitaet noch zweifelhaft.

Bemerkenswerth ist, dass die von *Karpinský* bei *Pokrowskoje* (im Irbitschen Kreise Ost. Abh. d. Ural) entdeckte Form dortselbst, ebenso wie in unserem *F1*, mit *Tentaculites acuarius* Richt. und mit einer ausschliesslich in *F-f1* vorkommenden, an *Tent. intermedius Barr.**) stark erinnernden Form, gleichzeitig vorkommt.

Karpinsky verglich l. c. seinen *H. Uralicus* mit den aus dem böhmischen Obersilur (étage E) stammenden *H. simplex* Barr. und *H. obvius* Barr. Doch haben diese beiden Arten mit der Uralschen schon desswegen nichts Gemeinsames, weil ihre Hinterwand mit bogenförmig vorragendem Mundrande versehen ist und daher, wie ich später zeigen werde, einer ganz anderen Gruppe angehören.

Bemerkungen über das Operculum von Hyol. intermedius.

Gleichzeitig mit *H. intermedius* Nov. finden sich in den schwarzen *f1*-Kalken kleine, etwa 3 mm hohe und 5 mm breite Schälchen, die von *Barrande* als *Phyllopoden* gedeutet, und mit dem Namen *Cryptocaris suavis* **) bezeichnet wurden.

Ich bin im Verlaufe meiner Studien zu der Überzeugung gelangt, dass die von *Barrande* nnter dem Gattungsnamen *Cryptocaris* zusammengefassten Schälchen, mit Ausnahme von *Cryptocaris rhomboidea****) sämmtlich als Deckelchen von Hyolithen aufgefasst werden müssen.

Im vorliegenden Falle gehört nun *Cryptocaris suavis* Barr. als Deckelchen dem soeben beschriebenen *Hyol. intermedius* an. Dafür spricht:

1. Das gemeinsame Vorkommen, und dies um so mehr als in den schwarzen *f1*-Kalken nur eine Hyolithenform bekannt (*H. intermedius*) ist und diese stets nur von einer *Cryptocarisform* (*C. suavis*) begleitet wird.

2. Die allgemeine Form von *Cryptocaris suavis*, die dem Querschnitte des citirten Hyolithen vollkommen entspricht.

3. Die Übereinstimmung der Grössenverhältnisse von *C. suavis*, mit den Maassen am Mundrande des Gehäuses von *Hyol. intermedius*.

---

*) Ibid. Taf. I. Fig. 24.

**) Syst. Silur. Vol. I. Supplt. p. 463. Pl. 31. Fig. 10—11.

***) Ibid. Pl. 31 Fig. 14—15.

4. Die Sculptur der Schälchen, an denen die concentrische, und radiaere Anordnung der Streifchen den Querstreifen und Längsstreifchen an der Oberfläche des Gehäuses entspricht.

5. Die Analogie der sämmtlichen *Cryptocaris*-Schälchen mit den Deckelchen anderer *Hyolithen.* (Vergl. Taf. II.)

Was nun diese Analogie betrifft, so sei mir erlaubt folgendes zu bemerken:

Ein Hyolithendeckelchen wäre nach Barrande mit einem querelliptischen, von zwei unter einem stumpfen Winkel zusammenstossenden, ungleich grossen Flächen gebildeten Schildchen zu vergleichen. Denkt man sich das Operculum in natürlicher Lage,*) so deckt die kleinere, meist halbmondförmige (der Lage nach vordere) Fläche („*Limbe vertical*“ *Barr.*) die über den beiden kleinen (vorderen) Mundrändern des Gehäuses liegende Partie der Mündung. Die grössere (der Lage nach hintere) Fläche („*Partie conique*“ Barr.) deckt nun die vor dem vorragenden Fortsatze der Hinterwand des Gehäuses liegende Partie der Mündung. Da nun die Ebene dieses vorspringenden hinteren Mnndrandes mit der Ebene der beiden halbkreisförmig zusammenhängenden, querliegenden Vorderränder der Mündung sich winkelig schneiden müssen, wird das Deckelchen längs einer Querfurche („*rainure*“ *Barr.*) wie gebrochen erscheinen.

Nun ist aber dies nicht wie Barrande annimmt, und wie ich im Nachstehenden zeigen will, bei allen Hyolithen der Fall, denn es gibt Gehäuse (wie das eben beschriebene und mehrere andere), deren Hinterrand keinen halbkreisförmigen Fortsatz bildet, sondern gerade abgestutzt ist. In diesem Falle liegen die sämmtlichen Mundränder in einer Ebene. Das Deckelchen ist nicht winkelig gebrochen, und die früher erwähnte Querfurche fällt weg. Dies ist nun bei den Barrande'schen *Cryptocariden* in der That der Fall. (Vergl. Taf. II. Fig. 11.)

Trotz dieses Unterschiedes ist die Analogie zwischen den Deckeln echter Hyolithen und der Cryptocaris-Schälchen eine ganz auffallende.

Wollen wir zunächst unsere Aufmerksamkeit denjenigen Theilen widmen, welche von *Barrande* an einem Cryptocaris-Schälchen unterschieden werden.**)

---

*) Vergl. z. B. *Hyol. maximus.* Barr. in Syst. Silur. Vol. III. Pl. 10 Fig. 27, 28 und Fig. F a-b und A a-b. sowie auch *Hyol. discors* Barr. auf Taf. II. Fig. *18*, *20* und *25* der vorliegenden Arbeit.

**) Syst. Silur. Vol. I Supplt. p. 459 etc.

Dasselbe repraesentirt ein niedriges gleichschenkeliges Dreieck mit gerundeten Ecken. Die beiden gleichen Schenkel bilden ein zusammenhängendes, dem Halbkreis sich näherndes Bogensegment. Der dritte Schenkel des Dreieckes entspricht der Secante dieses Bogens. An der Oberfläche des Schälchens unterscheidet nun *Barrande* eine kleinere, mit dem Bogensegmente der beiden gleichen Schenkel concentrische Rand-Partie, die er *„Bande (Partie) externe“* nennt, während die Bezeichnung *„Partie interne“* für den erübrigenden grösseren Theil des Schälchens vorgeschlagen wird. Die kleine Partie pflegt nun gewöhnlich etwas aufgebogen zu sein, ist aber von der grösseren durch keine Querfurche getrennt.

Werfen wir nun einen Blick auf unsere Tafel II. Fig. 11, so sehen wir, dass die kleinere aufgebogene Partie des nach dem *Cryptocaris*-Modell gebauten Deckelchens (*Partie externe*) dem vorderen, kleineren Theile (*Limbe vertical*) des Hyolithen-Deckelchens entspricht, während die grössere *„Partie interne“* mit der *„Partie conique ou principal“* dieses Deckelchen homolog ist.

Es tritt also auch bei den Cryptocaris-Schälchen die Eintheilung in eine *vordere*, kleinere und eine *hintere* grössere Fläche deutlich hervor, nur ist diese Eintheilung, in Folge des Mangels einer Querfurche, keine so scharfe, wie bei den echten Hyolithendeckelchen.

Barrande unterscheidet ferner an der Oberfläche eines Hyolithen-Operculum zwei Gruppen von Unebenheiten, die vom Scheitel der grösseren, kegelförmigen Partie (*„sommet de la partie conique ou principal“*) des Deckelchens ausgehen. Diese Unebenheiten kommen aber, da sie der Innenfläche des Deckelchens angehören, nur an Steinkernen deutlich zum Vorschein. Sie wurden von Barrande als Muskeleindrücke gedeutet. Man kann diese Gruppen, der Lage nach, als *vordere* und *hintere* Gruppe unterscheiden.

Die in der Mitte der kleineren Fläche liegende Gruppe besteht stets nur aus zwei symmetrisch gelegenen, tiefen, nach vorn divergirenden Eindrücken (*„deux cavités plus ou moins profondes“*), die von zwei in das Innere des Gehäuses vorragenden *Zahnfortsätzen* herrühren, von denen jedoch Barrande nichts erwähnt. (Vergl. Taf. II. Fig. 4—5, 8—10, sowie auch Fig. 22—25.)

Die hintere Gruppe besteht meist aus einem, seltener aus zwei, oder auch drei Paar radiaer gegen die Seitenkanten des Gehäuses ausstrahlenden Furchen, denen an der Innenseite des Deckelchens ebensoviele *Leistchen* entsprechen. Auch diese Leistchen sind bis jetzt unberücksichtigt geblieben.

Alle diese Unebenheiten können bei den Cryptocaris-Schälchen in gewissen Modificationen wieder erkannt werden.

Die der vorderen Gruppe angehörigen, von den oben erwähnten Zahnfortsätzen herrührenden Eindrücke, treten selbst bei folgenden von Barrande abgebildeten Cryptocariden deutlich hervor:

Cryptocaris pulchra Barr. Vol. I. Supplt. Pl. 25. Fig. 1— 6
" *obsoleta* " " " " " " " 16—23
" *tardissima* " " " " " 34. " 23—24

Hiezu kommt noch das Taf. I. Fig. 13 und Taf. II. Fig. *14* und *16* dieser Arbeit abgebildete Deckelchen von *Hyolithes intermedius* (*Cryptocaris suavis* Barr.). Die citirten Figuren stellen einerseits (Fig. 14) die Innenfläche selbst, anderseits aber (Fig. 16) den Abdruck derselben dar. In Barrande's l. c. Fig. 11. Pl. 31. ist wol auch die Innenfläche des Schälchens abgebildet. Doch ist diese Figur insofern unrichtig, als die beiden Zahnfortsätze, die im Original weggerissen sind, nicht angedeutet wurden.

Immerhin sind die Zahnfortsätze eines *Cryptocaris*-Schälchens nie so stark entwickelt wie die der meisten typischen Hyolithendeckelchen.

Was die hintere Gruppe der Unebenheiten betrifft, so besteht dieselbe bei Cryptocariden stets aus zwei radiaer ausstrahlenden, symmetrisch gelegenen, flachen, aber ziemlich breiten Wülstchen, die bei allen mir bekannten Formen deutlich hervortreten. Sie divergiren ebenfalls nach rückwärts, schliessen aber einen schärferen Winkel ein., als dies bei den Deckelchen der typischen Hyolithen der Fall ist Es ist also auch in dieser Hinsicht die Analogie zwischen diesen letzteren und den Cryptocaris-Schälchen eine unverkennbare.

Was nun die von Barrande bei einigen Cryptocariden beobachtete Mediansutur, die dieser Forscher nur bei *C. pulchra**) und *C. Bohemica***) nachweisen konnte, betrifft, so sei bemerkt, dass diese Sutur kaum von besonderer Bedeutung sein kann, wenn man sich der bekannten Thatsache erinnert, dass es palaeozoische Cephalopoden gibt, deren Deckelchen längs der Medianlinie theils getrennt, theils aber in ein Stück verwachsen sind. Es scheint überhaupt, dass man es bei *Cryptocaris* mit keiner Sutur zu thun hat, indem bis jetzt keine in der Mitte getrennten Formen sich vorfanden. Dasselbe gilt auch von den Deckeln echter Hyolithen. Ausserdem ist die

---

*) Syst. Silur. Boh. Vol. I. Supplt. Pl. 25 Fig. 1--6.

**) Ibid. Pl. *31* Fig. *13*.

„*Sutur*“ der Cryptocariden nicht immer auf beiden Seiten des Schälchens bemerkbar und auch nicht immer durch eine Furche, sondern mitunter auch durch ein erhabenes feines Leistchen angedeutet. Übrigens habe ich z. B. bei *Crypt. suavis* Individuen mit einem Medianleistchen oder Furche neben solchen, bei denen keine Spur derselben vorhanden war, beobachtet. Das Vorhandensein oder Fehlen der „Mediansutur“ ist also selbst bei einer und derselben Art nicht wesentlich.

Aus dieser Schilderung geht hervor, dass die Cryptocariden in der That als Deckelchen von Hyolithen aufgefasst werden müssen.

Jedenfalls haben sie mit Crustaceen, speciell aber mit *Phyllopoden*, zu denen sie von Barrande, wol nur provisorisch, gestellt wurden, nichts zu thun.

Es wird daher nothwendig erscheinen, den sich auf Deckelchen von Hyolithen beziehenden Namen *Cryptocaris* fallen zu lassen.

Trotzdem kann aber diese Bezeichnung für eine Form, nämlich für *Cryptocaris rhomboidea* Barr. (l. c. Pl. 31. Fig. 15) aufrecht gehalten werden.

Warum Barrande diese Form, wenn auch nur mit Vorbehalt*) zu seiner Gattung *Cryptocaris* gezogen hat, bleibt mir unverständlich. Aber selbst *C. rhomboidea* zeigt mit *Phyllopoden* sehr wenig Analogie. Diese Form müsste, wie aus dem Ganzen Habitus des zweiklappigen Schälchens geschlossen werden kann, viel eher zu den *Ostracoden* gestellt werden.

Eine kürzlich von *G. F. Matthew* mit dem Namen *Beyrichona***) belegte Ostracodengattung lässt übrigens einige Verwandtschaft mit Barrande's *Cryptocaris rhomboidea* nicht verkennen.

Diese kurze Mittheilung lehrt, dass man es in den palaeozoischen Schichten Böhmens mit zwei Gruppen von gestreckten Hyolithen-Gehäusen zu thun hat.

Eine Gruppe umfasst Formen mit halb-kreisförmig vorragender Hinterwand und mit in zwei unter einem stumpfen Winkel sich schneidenden Ebenen liegenden Mundrändern und demgemäss angepassten Deckelchen.

Auf diese Gruppe, glaube ich, muss der von *Eichwald* ursprünglich eingeführte Name *Hyolithes* beschränkt bleiben und zwar

---

*) „pour éviter de créer un nouveau genre“ l. c. p. 464.

**) *Beyrichona papilio* Matthew, Fauna of the St. John Group. III. (Trans. Roy. Soc. Canada. Section IV. 1885. p. 65 Pl. VI. Fig. 20.)

desswegen weil *H. acutus**) Eichw., die erste unter diesem Gattungsnamen eingeführte Form, ebenfalls ein dieser Gruppe angehöriges Gehäuse repraesentirt.

Zu *Hyolithes* gehören die sämmtlichen in Böhmen vorkommenden cambrischen und untersilurischen, sowie auch die meisten obersilurischen und ein Theil der hercynischen Formen.

Die zweite Gruppe umfasst Formen mit querabgestutzter Hinterwand und mit bloss in einer Ebene liegenden Mundrändern, sowie auch mit nach dem Cryptocaris-Modell gebauten Deckeln.

Diese Formengruppe scheide ich von der vorigen aus, weil sie von derselben sehr scharf getrennt ist und schlage für sie den Namen *Orthotheca* vor.

Zu *Orthotheca* gehört ein Theil der obersilurischen und hercynischen Hyolithen Böhmens. Von fremden Formen wäre *H. Uralicus* Karp. hieher zu rechnen, welcher, wie schon bemerkt wurde, mit *H. intermedius* identisch sein dürfte.

Sollte sich der bei *Krekling* gleichzeitig mit *Paradoxides Forchhammeri* und *Agnostus* vorkommende *Hyol. plicatus* Brögger**) auch als zur Gattung *Orthotheca* gehörig herausstellen, so wäre diese Gattung auch schon in primordialen Ablagerungen vertreten. Doch dies bedarf noch einer näheren Bestätigung.

In der nachstehenden Tabelle sind die sämmtlichen aus den palaeozoischen Schichten Böhmens bis jetzt bekannten Arten der Gattung *Orthotheca* übersichtlich zusammengestellt.

Arten	Cambrium	Unter-Silur	Ober-Silur		Hercyn					
	C	D	E		F		G			H
			e1	*e2*	*f1*	*f2*	*g1*	*g2*	*g3*	*h1*
Orthotheca columnaris***) . . Barr.	.	.	+	+	.	.	.	.	.	.
„ hexagona . . . . . „	.	.	.	.	.	+	.	.	.	.
„ intermedia . . . . Nov.	.	.	.	.	+	.	.	.	.	.
„ nobilis . . . . Barr.	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.
„ novella . . . . . . „	.	.	.	.	.	.	.	+	.	+
„ secans . . . . . . „	.	.	.	.	.	.	+	.	.	.

*) *Sil. Schicht. Syst. in Esthland* p. 97 und *Lethaea Rossica* p. 1045. Tab. XL. Fig. 13—14.

**) Om paradoxides-skiferne ved Krekling. Nyt. Mag. for Naturvidenskaberne 1877 XXIV. I. pag. 61. Tab. IV. Fig. 15.

***) Diese Art. wird von Barrande (Syst. Silur. Boh. Vol. III. p. 79) auch aus *f2* angeführt, doch beruht diese Angabe auf einem Irrthum.

IV. Phyllocariden.

5. Aristozoe solitaria Nov.

Taf. I. Fig. 15—19.

Trotzdem von diesem Thiere bis jetzt nur das mit der „*Furca*“ verwandter Crustaceen zu vergleichende letzte Postabdominalsegment (Telson) bekannt ist, unterliegt es keinem Zweifel, dass man es in dem vorliegenden Falle mit einer *Aristozoe* zu thun hat.

Ich verweise hier bloss auf meine Arbeit über *Aristozoe regina*,*) in welcher ein ganz analog gebauter Postabdominalstachel abgebildet wurde.

Der von *A. solitaria* unterscheidet sich von dem von *A. regina Barr.***) durch seine grössere Breite und geringere Höhe, wie dies namentlich an den Querschnitten deutlich hervortritt, ferner durch die zahlreichen, an den beiden dorsalen Seitenkanten angebrachten, dicht an einanderschliessenden Insertionsöffnungen der beweglichen Kammborsten.

Was nun das verdickte Vorderende (*Bulbus)* des Telson betrifft, so sind die in Fig. 16. ersichtlichen, auf der Ventralseite desselben angebrachten, mit den Querfortsätzen des vorletzen Abdominalsegmentes (*Bactropus Barr.)* articulirenden Gelenkgrübchen deutlich erhalten.

An eine Verwechslung dieses Stachels mit dem Medianstachel von *Ceratiocaris* ist in dem vorliegenden Falle nicht zu denken, indem die Gelenksverbindung mit dem vorletzten Postabdominalgliede bei dieser Gattung eine von der der Gattung *Aristozoe* ganz verschiedene war.

Auf diesen Gegenstand hoffe ich aber in einer anderen Arbeit zurückzukommen, doch sei mir erlaubt folgendes zu bemerken.

In meiner Arbeit über *Aristozoe regina* habe ich die Vermuthung ausgesprochen, dass das Telson dieser Art vielleicht aus drei beweglichen Stacheln zusammengesetzt gewesen sein dürfte, etwa so wie dies bei den Gattungen *Ceratiocaris*, *Dithyrocaris, Elymocaris*, *Echinocaris* etc. der Fall ist.

---

*) Sitzungberichte d. böhm. G. d. W. 1885 Tab. I. Fig. 8—10.

**) Syst. Silur. Vol. I. Supplt. p. 448, Pl. 19. Fig. 20—27. und Pl. 31. Fig. 16—19. (*Ceratiocaris debilis.)*

Da diese Ansicht auch in den „*Third Report of Committee on the Fossil Phyllopoda of the Palaeozoic Rocks*“ aufgenommen wurde, sei hier darauf aufmerksam gemacht, dass ich durch sorgfältiges Praepariren eines zahlreichen, nachträglich gesammelten Materials zu der positiven Überzeugung kam, dass bei *Aristozoe* nur die Medianspitze (*Pointe principale* Barr. = *Style* Woodw.) entwickelt war. Gegen das Vorhandensein von seitlich eingefügten Nebenspitzen (*Pointes secondaires* Barr., = *Stylets* Woodw.) spricht schon der Mechanismus der durch Präparation blossgelegten Gelenke selbst.

Das einspitzige Telson wäre also, indem ich diese Eigenschaft auch bei einigen anderen Arten der Gattung *Aristozoe* nachweisen konnte, als ein fernerer Beitrag zur Kenntniss dieser Gattung hervorzuheben.

Die nachstehende Liste gibt eine Übersicht der sämmlichen bis jetzt aus f1 bekannten Thierformen. Sie ist zum Theil nach den Beobachtungen *Barrande's*, theils aber nach meinen eigenen Erfahrungen zusammengestellt.

Letzteres gilt namentlich von den *Crustaceen* und den *Conulariden.* Die Liste der *Trilobiten* weicht, was die verticale Vertheilung einzelner Arten betrifft, von der in *Barrand'es Syst. Silur I. Supplt.* p. 276 et sqq. gegebenen Übersicht wesentlich ab.

Einzelne Arten wie die sub No. 4, 8 und 11 angeführten *Trilobiten*, sowie auch die sämmtlichen *Phyllocariden* sind neu, und werden demnächst in einem zweiten Supplemente zu *Barrande's* Vol. I. ausführlicher beschrieben und abgebildet werden.

Übersicht der Fauna der Etage F—f1.

No.	Gattungen und Arten	Ober-Silur E e1	Ober-Silur E e2	Hercyn F f1	Hercyn F f2	Hercyn G g1	Hercyn G g2	Hercyn G g3	Hercyn H h1
	Fische.								
1	*Machaeracanthus* Bohemicus . . Barr. sp.	.	.	+	+	+	.	.	.
				1					
	Trilobiten.								
2	*Acidaspis* vesiculosa . . . . . . Beyr. sp.	.	.	+	+	.	.	.	.
3	*Bronteus* umbellifer . . . . . . Beyr.	.	.	+	.	.	.	.	.
4	*Calymene* sp. indet.	.	.	+	.	.	.	.	.
5	*Crotalocephalus* gibbus . . . . Beyr. sp.	.	.	+	+	+	.	.	.
6	„ Sternbergi . . Boeck sp.	.	.	+	+	+	+	.	.
7	*Cyphaspis* hydrocephala . . . . A. Röm.	.	.	+	+	+	.	.	.
8	*Harpes* microporus . . . . . . Nov.	.	.	+	.	.	.	.	.
9	„ venulosus . . . . Cord.	.	.	+	+	.	.	.	.
10	*Phacops* miser . . . . Barr.	.	.	+	.	.	.	.	.
11	*Proetus* sp. indet.	.	.	+	.	.	.	.	.
12	„ heteroclytus . . . . . Barr.	.	.	+	.	.	.	.	.
13	„ lepidus . . . . Barr.	.	.	+	.	.	.	.	.
14	„ micropygus . . . . . Cord.	.	+	+	.	.	.	.	.
				13					
	Phyllocariden.								
15	*Aristozoe* solitaria . . . . Nov.	.	.	+	.	.	.	.	.
16	*Ceratiocaris* modesta . . . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
17	„ Damesi . . . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
				3					
	Anneliden ?								
18	*Cornulites* cnf. major . . . . . Barr.	.	.	+	+	.	.	.	.
				1					
	Cephalopoden.								
19	*Cyrtoceras* {adornatum . . . . Barr.	.	.	+	.	.	.	.	.
	{(varietaet v. *exesum*) „	.	.						
20	„ distentum . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
21	„ durum . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
22	„ exesum . . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
23	„ genuinum . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
24	„ inexpectatum . . . „	.	+	+	.	.	.	.	.
25	„ {junceum . . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
	{(varietaet v. *pugio*) . „	.	.			.	.	.	.
26	„ perornatum . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
27	„ pugio . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
28	„ sporadicum . . . . „	.	.	+	+	.	.	.	.
29	*Gyroceras* Kayseri . . . . Nov.	.	.	+	.	.	.	.	.
30	*Orthoceras* bifrons . . . . Barr.	.	+	+	.	.	.	.	.
31	„ commemorans . . . „	.	.	+	+	.	.	.	.
32	„ culter . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
33	„ Davidsoni . . . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.

No.	Gattungen und Arten	Ober-Silur		Hercyn					
		E		F		G			H
		e1	e2	f1	f2	g1	g2	g3	h1
34	*Orthoceras* decorum . . . . . Barr.	.	.	+	.	.	.	.	.
35	„ deletum . . . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
36	„ dulce . . . . „	+	+	+	.	.	.	?	.
37	„ extenuatum . . . . . „	.	+	+	.	.	.	.	.
38	„ fidum . . . . „	.	+	+	.	.	.	.	.
39	„ macrosoma . . . . . „	.	+	+	.	.	.	.	.
40	„ Morrisi . . . . „	.	+	+	?	.	.	.	.
41	„ mutabile . . . . . . „	.	+	+	.	.	.	.	.
42	„ nycticorax . . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
43	„ originale . . . . . . „	+	+	+	.	.	.	.	.
44	„ Peleus . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
45	„ placidum . . . . . . „	+	+	+	.	.	.	.	.
46	„ pseudocalamiteum . „	+	+	+	+	+	.	.	.
47	„ repetitum . . . . . . „	+	+	+	.	.	.	.	.
48	„ rigescens . . . . . . „	.	+	+	.	.	.	.	.
49	„ styloideum . . . . . „	+	+	+	.	.	.	.	.
50	„ subannulare . . . . Münst.	+	+	+	+	.	.	.	.
51	„ superstes . . . . . . Barr.	.	.	+	.	.	.	.	.
52	„ taeniale . . . . „	.	+	+	.	.	.	.	.
53	„ teres . . . . „	.	+	+	.	.	.	.	.
54	„ Tiphys . . . . „	.	+	+	.	.	.	.	.
55	„ valens . . . . „	+	+	+	.	.	.	.	.
				37					
	Gastropoden.								
56	*Platyostoma* gregarium . . . . Barr. sp.	.	.	+	+	.	.	.	.
57	*Hercynella* bohemica . . . . . . „ „	.	.	+	+	+	.	.	.
58	„ nobilis . . . . „ „	.	.	+	.	.	.	.	.
				3					
	Conulariden.								
59	*Conularia* sp. indet.	.	.	+	.	.	.	.	.
60	*Orthotheca* intermedia . . . . Nov.	.	.	+	.	.	.	.	.
61	*Tentaculites* acuarius . . . . . Richt.	.	.	+	+	+	+	+	+
62	„ intermedius . . . Barr.	.	.	+	.	.	.	.	.
				4					
	Lamellibranchiaten.								
63	*Astarte* incerta . . . . Barr.	.	.	+	.	.	.	.	.
64	*Avicula* pusilla . . . . „	.	.	+	.	+	.	.	.
65	„ migrans . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
66	*Cardiola* orphana . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
67	*Cardium* ornatissimum . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
68	*Conocardium* aptychoides . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
69	*Cypricardinia* consocia . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
70	„ redux . . . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
71	*Dalila* incumbens . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
72	„ insignis . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
73	„ interjecta . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
74	„ obtusa . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.

No.	Gattungen und Arten		Ober-Silur		Hercyn					
			E		F		G			H
			e1	*e2*	*f1*	*f2*	*g1*	*g2*	*g3*	*h1*
75	*Dalila* resecta	Barr.	.	+	+	.	.	.	.	.
76	„ vermicularis	„	.	.	+	.	.	.	.	.
77	*Dualina* inexplicata	„	.	+	+	.	.	.	.	.
78	*Hemicardium* avis	„	.	+	+	.	.	.	.	.
79	„ seminotum	„	.	.	+	.	.	.	.	.
80	*Lunulicardium* analogum	„	.	.	+	.	.	.	.	.
81	„ evolvens	„	.	+	+	.	.	.	.	.
82	*Mila* insolita	„	+	+	+	.	.	.	.	.
83	*Modiolopsis* imperita	„	.	.	+	.	.	.	.	.
84	„ pupa	„	+	.	+	.	.	.	.	.
85	„ solitaria	„	.	.	+	.	.	.	.	.
86	*Mytilus?* insolitus	„	.	.	+	.	.	.	.	.
87	*Nucula* elongans	„	.	.	+	.	.	.	.	.
88	„ perplectens	„	.	.	+	.	.	.	.	.
89	*Panenka* amoena	„	.	.	+	.	.	.	.	.
90	„ desiderata	„	.	.	+	.	.	.	.	.
91	„ discreta	„	.	.	+	.	.	.	.	.
92	„ expansa	„	.	.	+	.	.	.	.	.
93	„ grata	„	.	.	+	.	.	.	.	.
94	„ jovialis	„	.	.	+	.	.	.	.	.
95	„ orphana	„	.	.	+	.	.	.	.	.
96	*Praelucina* ancilla	„	.	.	+	.	.	.	.	.
97	„ communis	„	.	+	+	.	.	.	.	.
98	„ confinis	„	.	.	+	.	.	.	.	.
99	„ libens	„	.	.	+	.	.	.	.	.
100	„ lustralis	„	.	+	+	.	.	.	.	.
101	„ soror	„	.	+	+	.	.	.	.	.
102	*Silurina?* obsolescens	„	.	.	+	.	.	.	.	.
103	*Služka* Bohemica	„	.	+	+	.	.	.	.	.
104	*Vevoda* exul	„	.	.	+	.	.	.	.	.
					42					
	Brachiopoden.									
105	*Atrypa* canaliculata	Barr.	.	+	+	+	.	.	.	.
106	*Chonetes* minor	„	.	+	+	.	.	.	.	.
107	*Cyrtia* trapezoidalis	His.	+	+	+	?	.	.	.	.
108	*Discina* intermedia	Barr.	.	.	+	.	.	.	.	.
109	„ signata	„	.	+	+	.	.	.	.	.
110	*Lingula* nigricans	„	+	+	+	.	.	.	.	.
111	*Orthis?* distorta	„	.	+	+	+	.	.	.	.
112	*Orthis* firma	„	.	.	+	.	.	.	.	.
113	„ interjecta	„	.	+	+	+	.	.	.	.
114	„ Iris	„	.	.	+	.	.	.	.	.
115	„ perdita	„	.	.	+	.	.	.	.	.
116	*Pentamerus* Janus	„	.	.	+	.	.	.	.	.
117	„ linguifer	Sow.	.	+	+	+	+	.	.	.
118	*Rhynchonella* barbara	Barr.	.	.	+	.	.	.	.	.
119	„ Latona	„	.	.	+	+	+	.	.	.
120	„ princeps	„	.	+	+	+	+	.	.	.
121	*Spirifer* digitatus	„	.	+	+	+	.	.	.	.

No.	Gattungen und Arten	Ober-Silur E		Hercyn F		G			H
		e1	*e2*	*f1*	*f2*	*g1*	*g2*	*g3*	*h1*
122	*Spirifer* inchoans . . . . . . Barr.	.	.	+	.	.	.	.	.
123	„ Nerei . . . . „	.	.	+	+	+	.	.	.
124	„ togatus . . . . „	.	+	+	+	.	.	.	.
125	*Strophomena* comitans . . . . „	+	+	+	+	+	+	+	.
126	„ emarginata . . . „	.	+	+	+	+	+	.	.
127	„ mimica . . . . . . „	.	.	+	.	.	.	.	.
				23					
	Graptolithiden.								
128	*Monograptus* sp. indet	.	.	+	.	.	.	.	.
				1					

Übersichts-Tabelle

der in der vorstehenden Liste angeführten Thierreste.

Classen und Ordnungen	Anzahl der verschiedenen Arten in *f1*	Blos in *f1* vorkommend	Mit Etage E gemeinsam	Wiedererscheinend in höher liegenden Etagen (*f2*—*h1*)	Gemeinsam mit E und mit höheren Etagen (*f2*—*h1*)
Fische	1	—	—	1	—
Trilobiten	13	7	1	5	—
Phyllocariden . . .	3	3	—	—	—
Anneliden	1	—	—	1	—
Cephalopoden . .	37	14	21	4	2
Gastropoden . . .	3	1	—	2	—
Conulariden . . .	4	3	—	1	—
Lamellibranchiaten	42	31	10	1	—
Brachiopoden . . .	23	8	13	11	9
Graptolithen . . .	1	1	?	—	—
Zusammen .	128	68	45	26	11

Rückblick auf die hier in Betracht gezogene Fauna.

Zur Erläuterung der in der vorstehenden Liste zusammengestellten Fauna, sei mir erlaubt, den einzelnen Thiergruppen folgende Bemerkungen hinzuzufügen:

Was zunächst die Classe der **Fische** betrifft, so sei hervorgehoben, dass das erste Ercheinen der Gattung *Machaeracanthus* in Böhmen mit Etage *f1* zusammenfällt, und dass diese Gattung aus dem echten Silur überhaupt nicht bekannt ist. Sie ist dagegen in devonischen Ablagerungen anderer Länder weit verbreitet*).

Machaeracanthus (Ctenacanthus bei Barrande**) *bohemicus* ist in *f1* wohl noch sehr selten, tritt aber in *f2* und namentlich in *g1* viel häufiger auf.

Von den 13 **Trilobiten** der Etage *f1*, ist bloss eine Art, nämlich *Proetus micropygus* Cord. schon aus Etage *E* bekannt, 7 Arten kommen ausschliesslich in *f1* vor, und nur 5 gehen in's Hangende hinauf. Von diesen letzteren ist *Cyphaspis hydrocephala* A. Röm. (= *C. Barrandei* Cord.), *Cheirurus (Crotalocephalus) Sternbergi*, *Crotaloc. gibbus* und *Acidaspis vesiculosa****) aus dem Devon anderer Länder hinreichend bekannt. Ausserdem ist bemerkenswerth, dass die zur *Untergattung Crotalocephalus* Salter†) gehörigen Cheiruriden im echten Silur nicht vorkommen, dagegen aber im Devon sehr verbreitet sind.

Von **Cephalopoden** ist das Verhältniss der Orthoceren hervorzuheben, von denen, nach *Barrande*, bloss 3 oder höchstens 4 in höher liegende Abtheilungen sich fortpflanzen, dagegen aber 21 bereits in *E* auftreten. Dies wäre also nahezu die Hälfte der sämmtlichen (45) den Etagen *E* und *f1* gemeinsamen Thierformen.

Hiezu muss ich bemerken, dass ich mir eine grosse Mühe nahm, die *f1*-Orthoceren gründlich durchzubestimmen, kam aber trotz eines recht zahlreichen Materials zu keinem befriedigenden Resultate. Fast die sämmtlichen Stücke sind unbestimmbar und wird eine Revision der vorstehenden Liste derselben, mit der Zeit eine gründliche Reduction erfahren müssen.

---

*) Vergl. *Kayser* Fauna älter. Devonabl. d. Harzes p. 4.

**) Syst. Silur I. Supplt. p. 641.

***) Vergl. *Barrois*. Calc. dévonien de Chaudefonds in Soc. géol. du Nord. T. XIII p. 173. 1886.

†) British Trilobites p. 61.

Auffallend ist allerdings das Fehlen der **Goniatiten**. Dieser Mangel wird jedoch durch das erste Erscheinen der Gattung **Gyroceras** aufgewogen, die ebenfalls erst in devonischen Ablagerungen auftritt. Hiebei darf man auch nicht vergessen, dass Goniatiten selbst in *f2* bei weitem noch nicht so häufig sind, wie in *g3*, wo sie ihre Hauptentwickelung erreichen.

Von **Gastropoden** habe ich nur diejenigen Arten angeführt, die von Barrande theils in *Bigsby's Thesaurus Siluricus* p. 168, theils in *Déf. des Col. III.* p. 43. citirt werden. Sie sind insofern wichtig, als sie einerseits in *E* überhaupt nicht auftreten, anderseits aber auch in den hercynischen Schichten anderer Länder, vielleicht durch identische, jedenfalls aber durch analoge Formen vertreten sind.*)

Aus der Gruppe der **Conulariden** sind namentlich die beiden, in der Liste angeführten *Tentaculiten* von besonderer Wichtigkeit. Von diesen ist *T. acuarius* Richt., wie schon früher hervorgehoben wurde, in hercynischen Schichten anderer Länder weit verbreitet.

Von den 42 nach der Liste Barrande's **) in *f1* vorkommenden **Lamellibranchiaten**, bleiben die meisten (31) auf diese Abtheilung beschränkt. Dagegen sollen jedoch 10 schon in *E* auftreten. Bedenkt man aber, dass die Anzahl der von *Barrande* unterschiedenen Arten, namentlich von *Panenka*, *Praelucina*, *Dalila* etc. doch etwas zu hoch gegriffen ist, so wird nach der Durchführung einer kritischen Revision der böhmischen Acephalen dieses Verhältniss wesentlich günstiger sich herausstellen.

Immerhin ist aber der grosse Reichthum an Individuen wenigstens für die schwarzen *f1*-Kalke sehr bezeichnend und ist die Continuitaet der ächten Silurfauna (*E*) mit der *f1*-fauna gerade in diesem Reichthum an Lamellibranchiaten am schärfsten ausgesprochen.

Die **Brachiopoden*****) bieten wenig entscheidendes, indem von den 23 in *f1* vorkommenden Formen 13 schon in *E* und 11 in höher liegenden Etagen *(f2—h1)* vertreten sind, auch in diesen ist der Zusammenhang der unmittelbar auf einander folgenden Faunen deutlich ersichtlich.

Von **Graptolithen** sind aus *f1* bloss *Monograpti* aus der Verwandtschaft des *Monograptus colonus* Barr. bekannt. Diese Art ent-

---

*) Vergl. *Kayser*: Fauna der ältesten Devonablagerungen des Harzes p. 252 et sqq.

**) Vergl. Silur Boh. Vol. VI. pag 178 et sqq.

***) Vergl. Syst. Silur. Vol. V. pag. 89 et sqq.

spricht, wie *Marr**) gezeigt haben will, dem obersten Graptolithenhorizont der Etage *e1*. Sie scheint aber auch noch in *e2* vertreten zu sein. Leider sind die sämmtlichen von mir bis jetzt in *f1* gesammelten Stücke schlecht erhalten und gestatten überhaupt keine Bestimmung. Wir müssen uns daher mit der blossen Thatsache, dass Graptolithen noch in dieser Stufe vertreten sind, begnügen.

Erwägt man aber, dass Graptolithen, indem sie meist in thonigen und mergeligen Sedimenten vorkommen, vorzugsweise schlammige Gewässer geliebt haben, so wird das Vorkommen derselben in *f1* schon darin eine theilweise Erklärung finden, dass sie auch hier auf schieferige, thonreiche Bänke gebunden sind.

Da nun die Schichtenfolge im palaeozoischen Gebiete Böhmens vom Cambrischen angefangen, bis zum Abschluss der landpflanzenführenden Etage *H* eine ziemlich ununterbrochene ist, und da ferner das in *e1* noch massenhafte Vorkommen der Graptolithen schon in *e2* bedeutend in Abnahme war, so wird es ganz natürlich erscheinen, dass sich ein kleiner Rest derselben auch noch in die nächst jüngere Abtheilung *f1* fortpflanzen konnte. Sie konnten sich in dieser Abtheilung um so mehr erhalten, als sie in derselben noch ein ihrer Lebensweise entsprechendes Medium (thonreiche Kalke) gefunden haben.

Hiemit ist aber die Dauer derselben in der palaeozoischen Schichten-Reihe Böhmens endgültig abgeschlossen, denn in den folgenden Etagen, also von *f2* angefangen, kommt keine Spur derselben mehr vor.

Korallen scheinen in *f1* gänzlich zu fehlen.

Anhang.

In den eben verflossenen Ferien ordnete ich das von mir in der letzten Zeit gesammelte Cephalopodenmaterial aus Etage *E—e2*, wobei namentlich einige Nautili ein grösseres Interesse erregten.

Eine Anzahl gut gelungener Medianschnitte hat die Bestimmungen wesentlich gefördert. Unter diesen fand sich auch ein sehr charakteristisches, von allen, bis jetzt aus dieser Abtheilung bekannten Formen verschiedenes Gehäuse, das ich mit dem Namen *Nautilus Alinae* belege, und dessen Beschreibung ich hier folgen lasse.

---

*) On the predevonian Rocks of Bohemia (*Quart. Journ. Geol. Soc. November 1880*).

Nautilus Alinae, Nov.

Taf. I. Fig. 20—22.

Gehäuse scheibenförmig seitlich etwas zusammengedrückt langsam an Höhe zunehmend und ebenso wie die sämmtlichen aus Etage *E* stammenden Nautilus-Formen weit genabelt. Anzahl der Umgänge unbestimmbar, da nur etwas über die Hälfte eines Umganges vorhanden ist.

Der Querschnitt bildet ein gegen aussen etwas verschmälertes Oval (Fig. 22.).

Die Höhe der Windung am Beginn der Wohnkammer beträgt 60 mm, die grösste Breite 40 mm. Die Distanz der Querscheidewände nimmt langsam aber regelmässig zu. Sipho subcentral, dem Externtheil genähert, aus dicken, sphaeroidischen, in den sehr kurzen Siphonalduten, stark verengten Elementen bestehend. Schale nicht erhalten.

Das Gehäuse dieser Art unterscheidet sich von den sämmtlichen, bis jetzt aus Etage *E* bekannten Nautilus-Formen durch geringe Höhenzunahme und die charakteristische Form des Sipho.

Vorkommen: Gleichzeitig mit *N. Bohemicus*, *N. Sacheri*, *N. Sternbergi* und *N. tyrannus* in der Kalketage *E—e2* von *Gross-Chuchle* bei Prag.

Erklärung der Tafeln.

Tafel I.

Fig. 1. *Gyroceras Kayseri* Nov. *Lochkov*, *F—f1.*
„ 2—3. *id.* Letzte Scheidewand und Längsprofil derselben. Beide orientirt wie Fig. 1.
„ 4. *id.* Von der Internseite.
„ 5. *id.* Von der Externseite.
„ 6. Vergrösserung einer Schalenpartie, orientirt wie Fig. 1.
„ 7. Vergrösserung der mit einem Schalenrest versehenen Rückenpartie.
„ 8. *Tentaculites acuarius* Richt. *Lochkov F—f1.* Vergrössertes Fragment ohne Spitze.
„ 9. *Orthotheca intermedia* Nov. Vorderansicht 2mal vergrössert. *Lochkov F—f1.*

Fig. 10. *id.* Kleine Partie der vorderen Wände sehr stark vergrössert.
„ 11. *id.* Hinteransicht (2mal vergrössert), die Spitze mit den Querscheidewänden nach einem anderen Exemplar restaurirt.
„ 12. *id.* Vergrösserte Schalenpartie mit dem Mundrande der Hinterwand.
„ 13. Abdruck der Innenfläche des Deckelchens derselben Art (*Cryptocaris suavis bei Barrande*). Diese Figur auf Taf. II. Fig. 16. verbessert.
„ 14. *Machaeracanthus Bohemicus* Barr. sp. Bruchstück eines Flossenstachels aus dem typischen *F—f1* Kalke des Thales von *Slivenec.*
„ 15. *Aristozoe solitaria* Nov. Letztes Postabdominalsegment (*Telson*) von der Seite in nat. Grösse. *Kosoř F—f1.*
„ 16. *id.* Proximalende von der Ventralseite 2mal vergrössert.
„ 17. Dasselbe Ende von der Dorsalseite.
„ 18. *id.* Stark vergrösserte Partie der Dorsalseite.
„ 19. *id.* Querschnitt mit restaurirten Kammborsten.
„ 20. *Nautilus Alinae* Nov. Bruchstück ohne Schale, von *Gross-Chuchle* bei Prag. *E—e2.*
„ 21. *id.* Medianschnitt.
„ 22. *id.* Querschnitt (orientirt wie Fig. 20.)

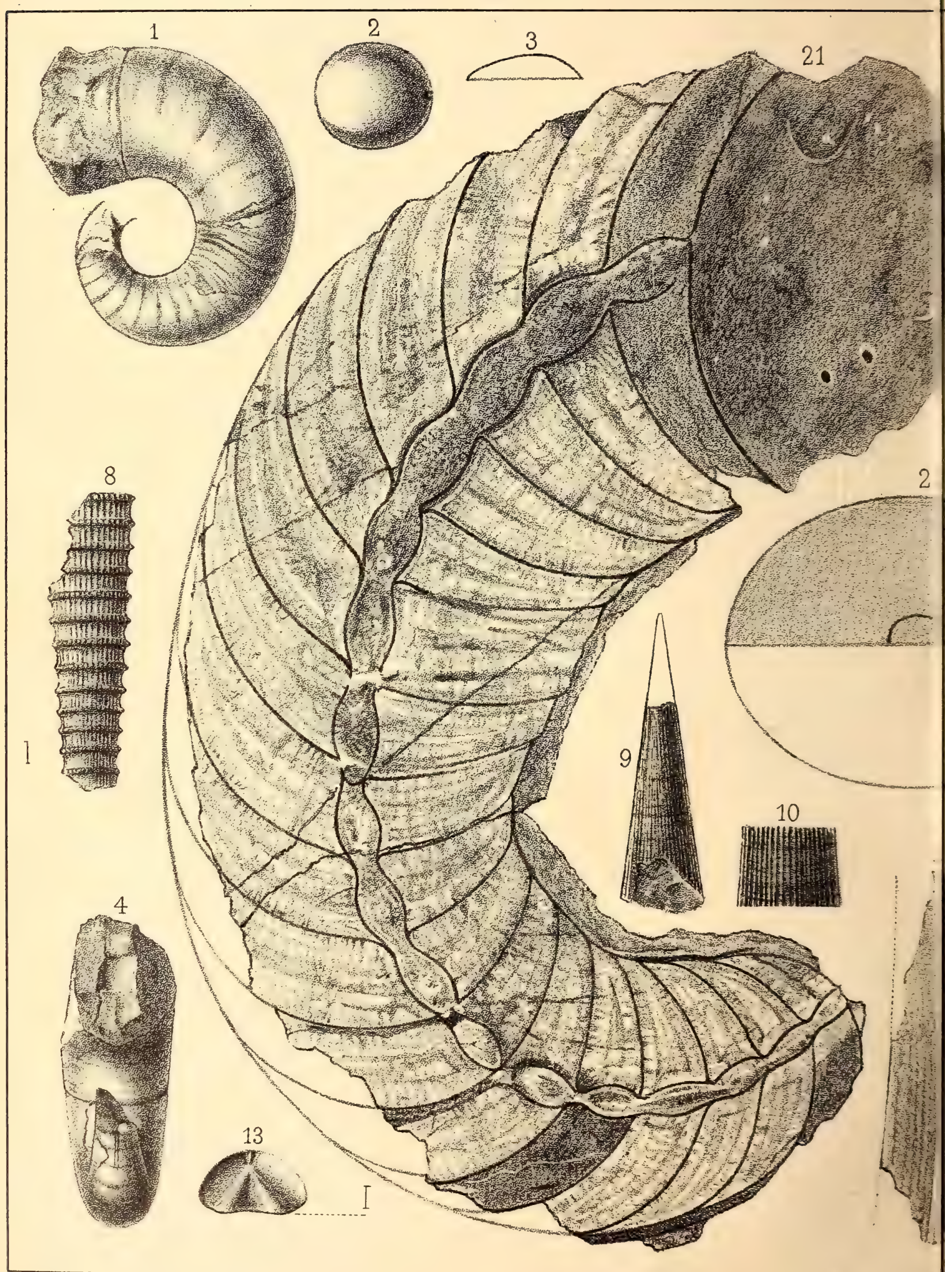
Tafel II.

Erklärung der bei sämmtlichen Abbildungen zur Anwendung gelangten Buchstaben-Bezeichnungen.

v = *Vordere Partie.*
h = *Hintere Partie.*
f = *Furche.*
l = *Leistchen.*
l' = *Eindrücke der Leistchen.*
z = *Zahnfortsätze.*
z' = *Eindrücke der Zahnfortsätze.*
w = *Wülste.*
w' = *Eindrücke derselben.*

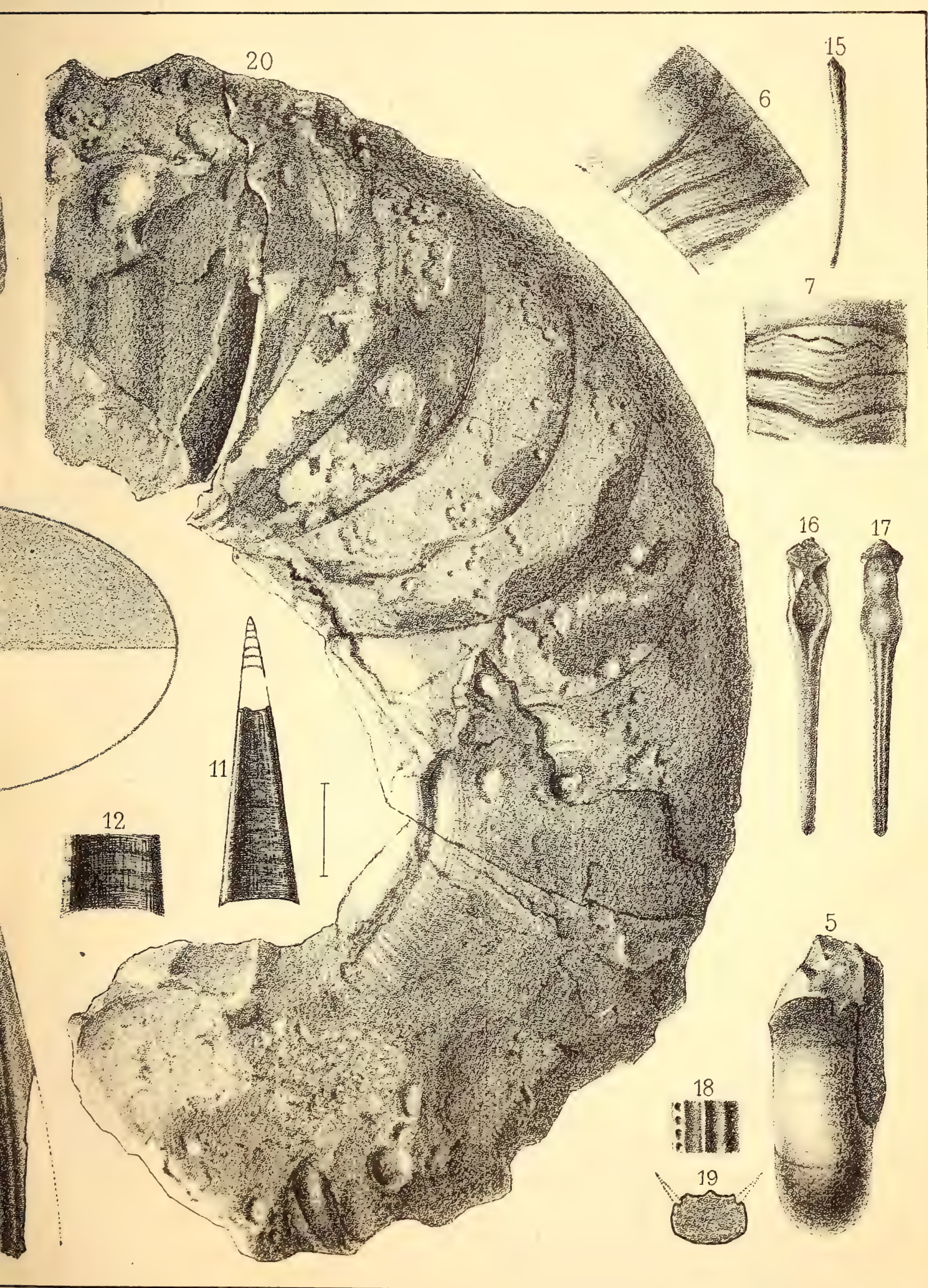
Fig. 1—10. Deckelchen von *Hyolithes euglyphus* nov. sp.*) (Operculum „*F*“ bei Barrande Syst. Silur. III. Taf. 10. Fig. F a—b) aus Etage *D—d1* von *Vosek.*

*) Das zu diesem Deckelchen gehörige Gehäuse wird in einer späteren Arbeit zur Abbildung und Beschreibung gelangen.



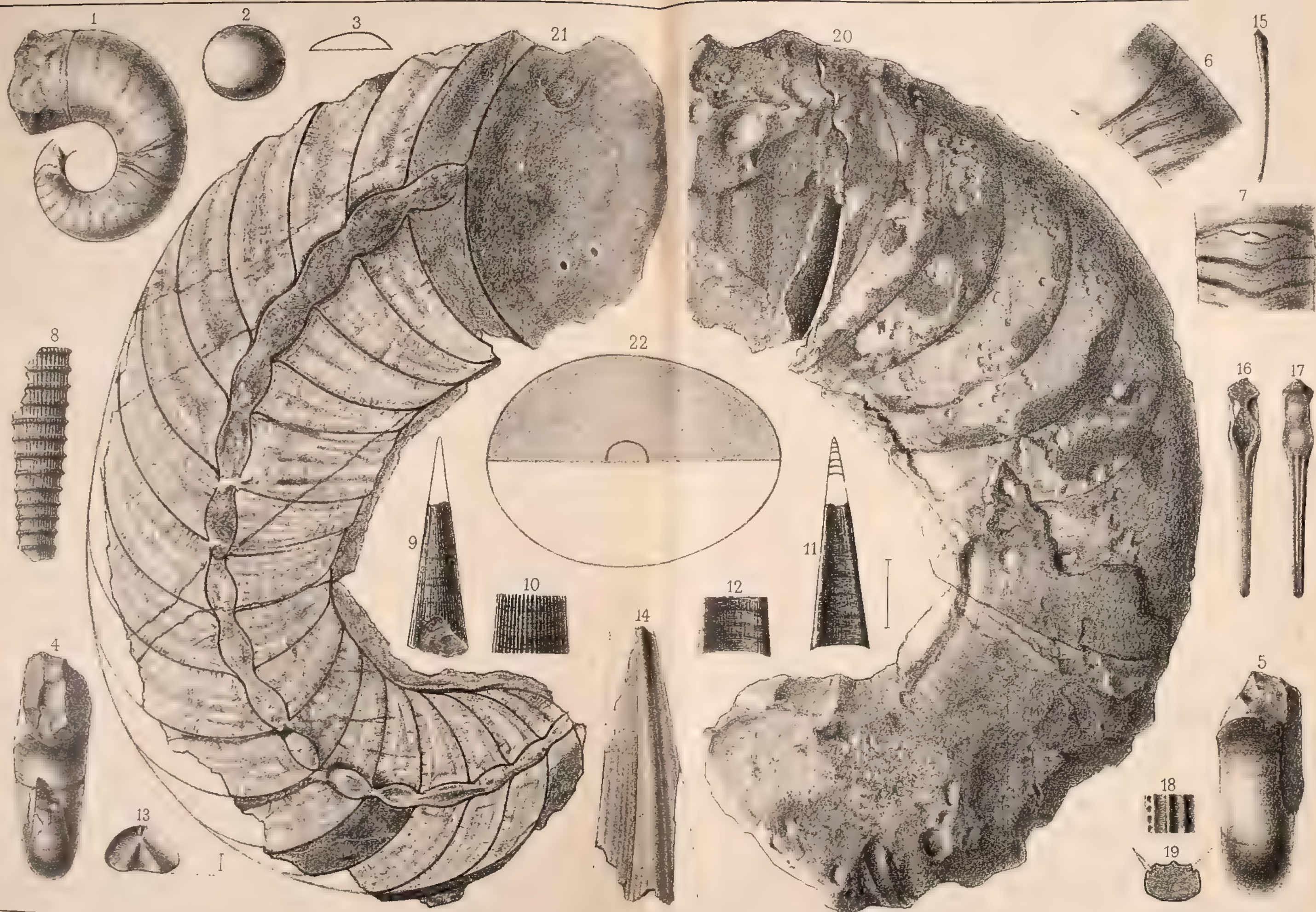
A. Šolta ad nat. delin. et lith.

Taf. I.



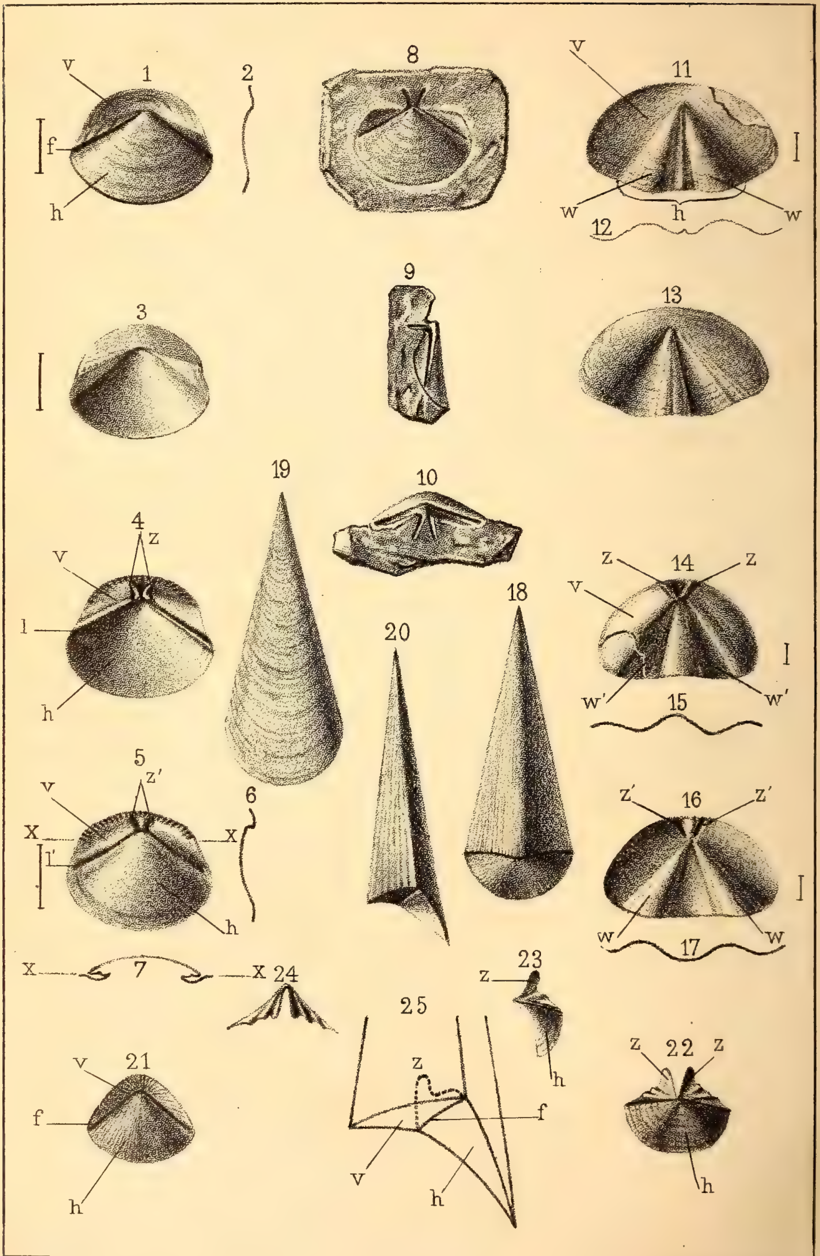
Druck Farský Prag.

esellschaft der Wissenschaften 1886.



A. Šolta ad nat. delin. et lith

Druck Farský Prag



A. Šolta aut. Druck Farský Prag.

Fig. 1. Aussenfläche.
„ 2. Längenprofil derselben.
„ 3. Abdruck derselben.
„ 4. Innenfläche.
„ 5. Abdruck der Innenfläche.
„ 6. Längenprofil derselben.
„ 7. Querschnitt nach der Linie x—x.
„ 8. Innenfläche mit abgerissener Vorderpartie, die entblösten Zahnfortsätze zeigend.
„ 9. *id.* Seitenansicht.
„ 10. *id.* Vordere Ansicht.

Fig. 11—17. Deckelchen von *Orthotheca intermedia* Nov. (*Cryptocaris suavis* bei *Barrande* l. c. Vol. I. Supplt. Taf. 31. Figur 10—11) aus Etage *F—f1.* von *Lochkov.*

Fig. 11. Aussenfläche.
„ 12. Querprofil derselben.
„ 13. *id.* Abdruck derselben.
„ 14. Innenfläche.
„ 15. Querprofil derselben.
„ 16. Abdruck der Innenfläche.
„ 17. Querprofil derselben.

Fig. 18—25. *Hyolithes discors* Barr. aus Etage *F—f2* von *Koněprus.*

Fig. 18. Vorderansicht des Gehäuses mit dem Deckelchen in natürlicher Lage.
„ 19. *id.* Hinteransicht.
„ 20. *id.* Von der Seitenkante gesehen.
„ 21. Isolirtes Deckelchen derselben Art.
„ 22. Anderes Deckelchen mit wegpraeparirter Vorderpartie, die beiden Zahnfortsätze zeigend.
„ 23. *id.* Seitenansicht (orientirt wie Fig. 20.).
„ 24. *id.* Vorderansicht der Zahnfortsätze.
„ 25. Diagrammatische Figur, die Lage der Zahnfortsätze des Operculum im Inneren des Gehäuses darstellend. (2 × vergrössert.)



INHALT. OBSAH.



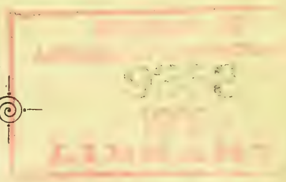
Sitzungsberichte

der königl. böhmischen

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.





VĚSTNÍK

královské

ČESKÉ SPOLEČNOSTI NAUK.

TŘÍDA MATHEMATICKO-PŘÍRODOVĚDECKÁ.


SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01304 4581